

1. STAN NAPRĘŻENIA

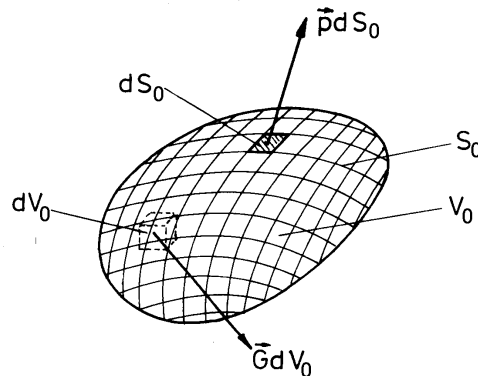


1.1. SIŁY POWIERZCHNIOWE I OBJĘTOŚCIOWE

Rozważmy ciało o objętości V_0 ograniczone powierzchnią S_0 , poddane działaniu sił będących w równowadze (rys. 1.1). Rozróżniamy tutaj dwa rodzaje sił:

- siły powierzchniowe,
- siły objętościowe (masowe).

Ponieważ rozpatrywane ciało jest z założenia ciągle, na jego powierzchni można wydzielić nieskończenie małe elementy dS_0 , a z jego objętości nieskończenie małe elementy dV_0 .



Rys. 1.1

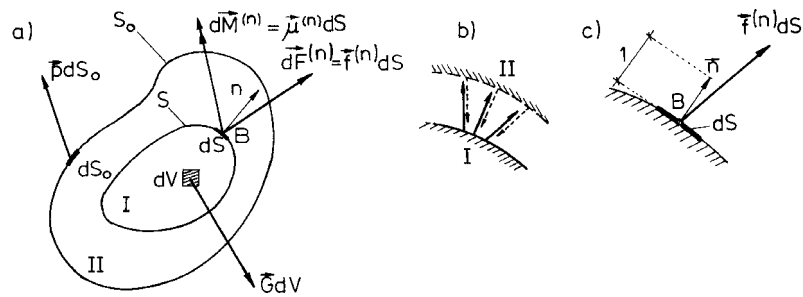
Siłę powierzchniową działającą w danym punkcie na element dS_0 określamy jako wektor $\mathbf{p}dS_0$. Skoro wielkość $\mathbf{p}dS_0$ przedstawia siłę, współrzędne wektora \mathbf{p} muszą być wielkościami wyrażonymi w jednostkach siły na jednostkę powierzchni, np. $[\text{kN}/\text{m}^2]$. Wektor \mathbf{p} nazywa się czasami gęstością sił powierzchniowych.

Przykładami sił powierzchniowych mogą być parcie cieczy na ciało w niej zanurzone lub siły oddziaływania gruntu na mur oporowy.

Siłę objętościową działającą w danym punkcie na element dV_0 określamy jako wektor $\mathbf{G}dV_0$. Wynika stąd, że współrzędne wektora \mathbf{G} są wyrażone w jednostkach siły na jednostkę objętości, np. $[\text{kN}/\text{m}^3]$. Wektor \mathbf{G} nazywamy gęstością sił objętościowych. Przykładem sił objętościowych mogą być siły ciężkości lub siły bezwładności, które są proporcjonalne do **masy** i odpowiednich przyspieszeń. Dlatego siły objętościowe często nazywa się również **siłami masowymi**.

1.2. WEKTOR NAPRĘŻENIA

Pod wpływem sił powierzchniowych i masowych ciało ulegnie odkształceniu. W konfiguracji odkształconej wydzielimy myślowo z ciała objętość V ograniczoną powierzchnią S (rys. 1.2). W ten sposób ciało zostało podzielone na część I o objętości V i część II o objętości $V_0 - V$. Na powierzchni kontaktu tych części wystąpią siły wzajemnego oddziaływania. Ciągłość ośrodka pozwala przyjąć, że rozkład tych sił na powierzchni S leżącej wewnątrz ciała jest również ciągły. Poza tym, stosownie do trzeciej zasady *Newtona* (zasada akcji i reakcji), wiadomo, że w każdym punkcie odpowiadające sobie siły odniesione do części I i II są liczbowo równe, ale przeciwnie skierowane.



Rys. 1.2

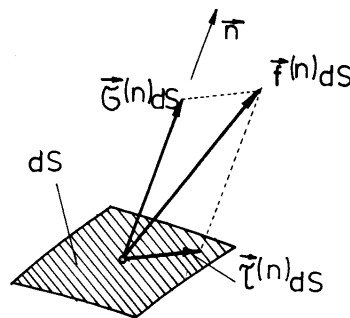
Rozpatrzmy teraz pewien element pola dS , styczny do powierzchni S w punkcie B . Przez \mathbf{n} oznaczymy wektor normalny do powierzchni S w tym punkcie. Na element dS działają wypadkowa siła $d\mathbf{F}$ i wypadkowy moment $d\mathbf{M}$, będące odpowiednio wynikiem redukcji sił wzajemnego oddziaływania, rozmieszczonych na elemencie dS . Wielkość

$$\mathbf{f}^{(n)}(B) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{F}}{dS} \quad (1.1)$$

nazywamy **wektorem naprężenia w punkcie B , odniesionym do płaszczyzny o normalnej \mathbf{n}** .

Łatwo zauważyć, że omówiona w p. 1.1 gęstość sił powierzchniowych jest po prostu wektorem naprężenia na powierzchni ograniczającej ciało.

Zgodnie z rys. 1.3 wektor naprężenia możemy rozłożyć na dwie składowe: normalną $\sigma^{(n)}$ i styczną $\tau^{(n)}$ do elementu dS o normalnej \mathbf{n} . Obliczenie tych składowych objaśniono w p. 1.6.



Rys. 1.3

Wzór (1.1) definiuje wektor naprężenia, będący wynikiem występowania elementarnej siły wypadkowej $d\mathbf{F}$. Podobnie można by zdefiniować wektor wynikający z występowania elementarnego momentu wypadkowego $d\mathbf{M}$:

$$\boldsymbol{\mu}^{(n)}(B) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{M}}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{M}}{dS} \quad (1.2)$$

Dla odróżnienia od wektora naprężenia „siłowych” $\mathbf{f}^{(n)}$ symbol $\boldsymbol{\mu}^{(n)}$ oznacza tak zwany **wektor naprężenia „momentowych”**. Zarówno $\mathbf{f}^{(n)}$, jak i $\boldsymbol{\mu}^{(n)}$ są funkcjami położenia punktu B na powierzchni dS oraz kierunku o normalnej \mathbf{n} do powierzchni S_0 w tym punkcie.

W większości przypadków granica stosunku $\Delta \mathbf{M}/\Delta S$ jest równa zero, co pozwala całkowicie pominąć istnienie naprężeń momentowych. Wniosek ten wydaje się oczywisty, jeśli uwzględnimy fakt, że wymiary elementu powierzchniowego dS są nieskończenie małe, a zatem ramiona sił wewnętrznego oddziaływania na tym elemencie dążą do zera. Naprężenia momentowe powinny być jednak uwzględnione wtedy, gdy gradienty sił $d\mathbf{F}$ w danym punkcie są bardzo duże. Może się wówczas okazać, że granica stosunku $\Delta \mathbf{M}/\Delta S$ istnieje i jest różna od zera. Podobna sytuacja zachodzi, gdy z wymiarami elementu powierzch-

niowego ΔS nie można zmierzać do zera wobec skończonych wymiarów cząstek lub ziaren ciała rzeczywistego, traktowanego jako ośrodek ciągły. Mamy wtedy do czynienia z ciałami o pewnej mikrostrukturze, w których odrzucenie naprężeń momentowych może prowadzić do istotnych błędów.

Uwzględnienie naprężeń momentowych wymaga uogólnienia klasyfikacji sił działających na ciało oraz wprowadzenia dodatkowych wewnętrznych stopni swobody przy opisie kinematyki ośrodka. Uogólnioną w ten sposób teorię ośrodków ciągłych sformułowali bracia *Cosserat* już w 1909 roku.

W dalszych rozważaniach, stosownie do klasycznej koncepcji ośrodka ciągłego, pominiemy wpływ naprężeń momentowych. Na niektóre konsekwencje przyjęcia modelu ośrodka *Cosseratów* zwrócimy jednak uwagę w następnych rozdziałach.

1.3. STAN NAPRĘŻENIA W PUNKCIE

Przyjmijmy obecnie, że położenie badanego punktu jest ustalone. Jeśli teraz będziemy zmieniać wewnątrz ciała nachylenie elementu powierzchniowego dS przechodzącego przez ten punkt, to okaże się, że zmianie podlegać będą również współrzędne wektora naprężenia. Jeżeli potrafimy określić wektor naprężenia dla dowolnego danego wektora normalnego \mathbf{n} , to mówimy, że **znamy stan naprężenia w punkcie**. Powstaje pytanie, co jest niezbędne do określenia stanu naprężenia. Okazuje się, że stan naprężenia w punkcie jest znany, gdy znane są wektory naprężenia dla **trzech różnych płaszczyzn** przechodzących przez badany punkt. Ze względów rachunkowych wygodnie jest, jeżeli są to trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny układu kartezjańskiego. Osie takiego układu oznaczamy zazwyczaj przez x, y, z (zapis tradycyjny) lub – co bardzo uprości wszystkie wzory – przez x_1, x_2, x_3 (zapis wskaźnikowy), przy czym

$$x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z.$$

W dalszych rozważaniach tej części będziemy stosować będziemy drugi sposób oznaczania, jednakże pewne wyprowadzenia i wzory zapiszemy również sposobem tradycyjnym. Ułatwi to Czytelnikowi z jednej strony zapamiętanie podstawowych formuł, z drugiej zaś pozwoli na konfrontację wyników z podręcznikami, w których stosuje się zapis tradycyjny.

Wszystkie rozważania odnoszą się do prawoskrętnego układu współrzędnych. W **zapisie wskaźnikowym** współrzędne wektorów oznaczamy podobnie jak współrzędne punktów, natomiast wersory, czyli wektory jednostkowe $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ oznaczamy odpowiednio przez $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Dla przykładu zapiszemy wektor \mathbf{A} w sposób tradycyjny i wskaźnikowy:

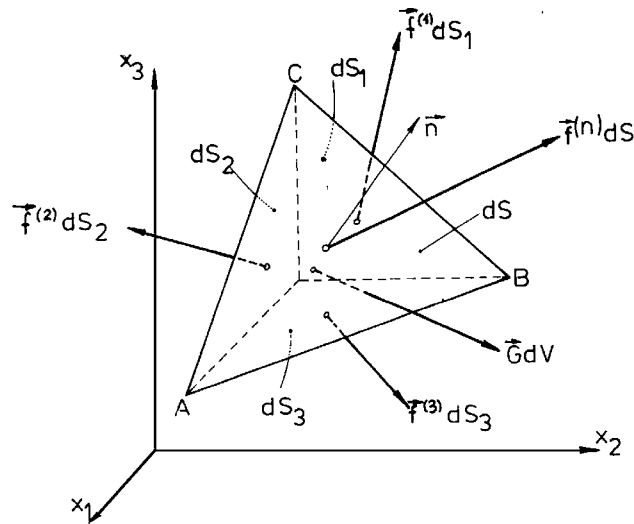
$$\text{– zapis tradycyjny} \quad \mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k},$$

$$\text{– zapis wskaźnikowy} \quad \mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 A_i \mathbf{e}_i.$$

W zapisie wskaźnikowym przyjęto więc, że:

$$A_1 \equiv A_x, \quad A_2 \equiv A_y, \quad A_3 \equiv A_z, \\ \mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{i}, \quad \mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{k}.$$

Przejdziemy obecnie do wyprowadzenia wzorów na obliczenie współrzędnych wektora naprężenia $\mathbf{f}^{(n)}$ przyporządkowanego płaszczyźnie o danym nachyleniu, określonym jednostkowym wektorem normalnym \mathbf{n} .



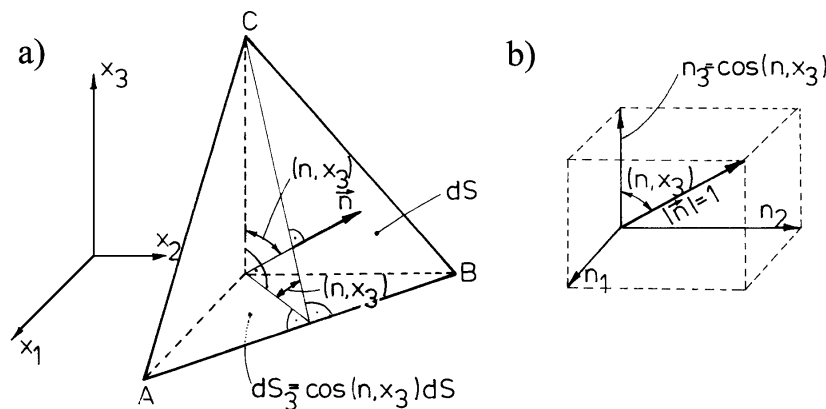
Rys. 1.4

Rozpatrzmy element czworosieczny, przedstawiony na rysunku 1.4 znajdujący się w stanie równowagi po odkształceniu. Element ten jest wycięty w otoczeniu badanego punktu. Ciągłość ośrodka pozwala przyjąć, że elementarny czworosiecznik ma nieskończenie małe wymiary. Interesuje nas wektor $\mathbf{f}^{(n)}$ działający na ścianę ABC o polu dS i nachyleniu określonym wektorem \mathbf{n} :

$$\mathbf{n} = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{j=1}^3 n_j \mathbf{e}_j$$

Z uwagi na to, że wektor \mathbf{n} ma długość równą jedności, między jego współrzędnymi zachodzi związek:

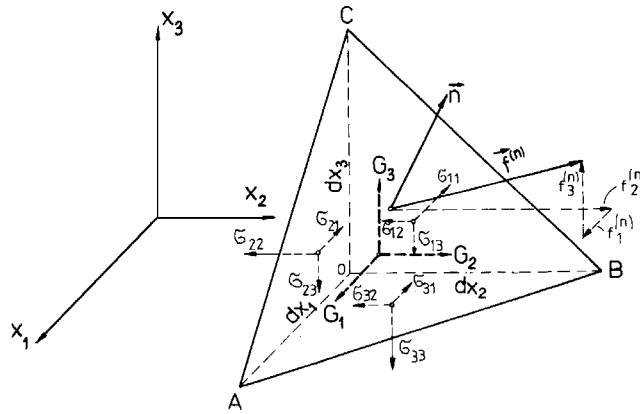
$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1. \quad (1.3)$$



Rys. 1.5

Załóżmy, że w badanym punkcie znamy stan naprężenia, określony przez trzy wektory naprężeń $\mathbf{f}^{(1)}$, $\mathbf{f}^{(2)}$, $\mathbf{f}^{(3)}$ działające odpowiednio na ściany dS_1 , dS_2 , dS_3 , prostopadłe do płaszczyzn układu. Pola dS_j ($j = 1, 2, 3$) obliczamy ze wzorów (por. rys. 1.5a):

$$\left. \begin{aligned} dS_1 &= \cos(n, x_1) dS, \\ dS_2 &= \cos(n, x_2) dS, \\ dS_3 &= \cos(n, x_3) dS. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$



Rys. 1.6

Zwróćmy uwagę na to, że j -ta współrzędna wektora \mathbf{n} równa się kosinusowi kąta zawartego między wektorem \mathbf{n} a osią x_j (por. rys. 1.5b) :

$$n_j = \cos(\mathbf{n}, x_j), \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.5)$$

W związku z tym równania (1.4) można zapisać krócej:

$$dS_j = n_j dS, \quad j = 1, 2, 3.$$

Wektory naprężenia $\mathbf{f}^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3$), działające na ściany dS_j zapiszemy następująco (rys. 1.6):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}^{(1)} &= \sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 \sigma_{1i}\mathbf{e}_i, \\ \mathbf{f}^{(2)} &= \sigma_{21}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{23}\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 \sigma_{2i}\mathbf{e}_i, \\ \mathbf{f}^{(3)} &= \sigma_{31}\mathbf{e}_1 + \sigma_{32}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 \sigma_{3i}\mathbf{e}_i, \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

gdzie σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) oznacza j -tą współrzędną wektora naprężenia $\mathbf{f}^{(i)}$. Umawiamy się zatem, że pierwszy indeks i oznacza płaszczyznę (tzn. indeks normalnej do płaszczyzny), a indeks j – kierunek działania składowej (tzn. numer osi współrzędnych, do której jest równoległa dana składowa). Wynika stąd, że naprężenia normalne są równowskaźnikowe ($\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$), a naprężenia styczne różnowskaźnikowe ($\sigma_{23}, \sigma_{32}, \sigma_{31}, \sigma_{13}, \sigma_{12}, \sigma_{21}$).

Wyjaśnimy jeszcze przyjęte tutaj zasady znakowania naprężeń σ_{ij} . **Dodatnie naprężenia normalne** mają zwroty zgodne ze zwrotem normalnej do płaszczyzny, tzn. **wywołują rozciąganie**. Znakowanie naprężeń normalnych, jak widać, nie zależy od przyjętego układu osi współrzędnych. Nie zachodzi to jednak w przypadku naprężeń stycznych: **na płaszczyznach dodatnich dodatnie naprężenia styczne mają zwrot zgodny** ze zwrotami osi układu współrzędnych, **na płaszczyznach ujemnych dodatnie naprężenia styczne mają zwrot przeciwny** do zwrotu osi układu. Znak płaszczyzny określa zwrot wektora normalnego; jeśli jest on zgodny ze zwrotem odpowiedniej osi układu, to płaszczyzna jest dodatnia, w przeciwnym razie ujemna. Na rysunku 1.4 płaszczyzny 1, 2 i 3 są ujemne, zatem zaznaczone naprężenia styczne są dodatnie, gdyż nie są zgodne ze zwrotami osi układu współrzędnych. Omówione wyżej znakowanie jest znakowaniem matematycznym. Znakowanie inżynierskie, stosowane wyłącznie w zadaniach dwuwymiarowych (płaskich) omówimy w p. 1.8.

Dla obliczenia współrzędnych wektora $\mathbf{f}^{(n)}$ wykorzystamy równania równowagi rzutów sił na osie x_1, x_2 i x_3 . Suma rzutów sił na oś x_1 w rozważanym czworościanie przedstawia się następująco :

$$f_1^{(n)} dS + \frac{1}{3} G_1 dS_1 dx_1 - (\sigma_{11} dS_1 + \sigma_{21} dS_2 + \sigma_{31} dS_3) = 0.$$

Na podstawie zależności (1.4) otrzymujemy

$$f_1^{(n)} dS + \frac{1}{3} G_1 n_1 dS dx_1 - (\sigma_{11} n_1 dS + \sigma_{21} n_2 dS + \sigma_{31} n_3 dS) = 0,$$

skąd

$$f_1^{(n)} = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3 - \frac{1}{3} G_1 n_1 dx_1.$$

Jak widać, składnik zawierający wpływ sił masowych jest małą wielkością wyższego rzędu i może być pominięty. Ostatecznie równanie równowagi rzutów sił na oś x_1 prowadzi do zależności:

$$f_1^{(n)} = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3 = \sum_{j=1}^3 \sigma_{j1} n_j.$$

Analogiczne równania uzyskujemy przy rzutowaniu sił na pozostałe osie x_2 i x_3 . Komplet poszukiwanych równań przedstawia się następująco:

$$\left. \begin{aligned} f_1^{(n)} &= \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3 = \sum_{j=1}^3 \sigma_{j1} n_j, \\ f_2^{(n)} &= \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3 = \sum_{j=1}^3 \sigma_{j2} n_j, \\ f_3^{(n)} &= \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3 = \sum_{j=1}^3 \sigma_{j3} n_j. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Równania (1.7), tzw. warunki we wnętrzu ciała, można zapisać jeszcze krócej:

$$f_i^{(n)} = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} n_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.7a)$$

Zależność (1.7a) wykorzystujemy najczęściej do wyrażenia współrzędnych wektora gęstości sił powierzchniowych \mathbf{p} przez naprężenia σ_{ji} występujące we wnętrzu ciała. Ponieważ na powierzchni ciała $\mathbf{p} = \mathbf{f}^{(n)}$, zatem

$$p_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} n_j. \quad (1.7b)$$

Warunki (1.7b) noszą nazwę **warunków na powierzchni**. W zapisie tradycyjnym współrzędne σ_{ji} oznaczają się następująco :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_x, & \sigma_{12} &= \tau_{xy}, & \sigma_{13} &= \tau_{xz}, \\ \sigma_{21} &= \tau_{yx}, & \sigma_{22} &= \sigma_y, & \sigma_{23} &= \tau_{yz}, \\ \sigma_{31} &= \tau_{zx}, & \sigma_{32} &= \tau_{zy}, & \sigma_{33} &= \sigma_z. \end{aligned}$$

Warunki na powierzchni w tym zapisie przyjmują zatem postać (por. [43, 49]):

$$\left. \begin{aligned} p_x^{(n)} &= \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{yx} \cos(n, y) + \tau_{zx} \cos(n, z), \\ p_y^{(n)} &= \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) + \tau_{zy} \cos(n, z), \\ p_z^{(n)} &= \tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) + \sigma_z \cos(n, z). \end{aligned} \right\} \quad (1.7c)$$

Z równań (1.7) wynika, że stan naprężenia jest określony, gdy znamy 9 współrzędnych σ_{ji} w danym układzie osi x_1, x_2, x_3 . Współrzędne te możemy zapisać w następujący sposób:

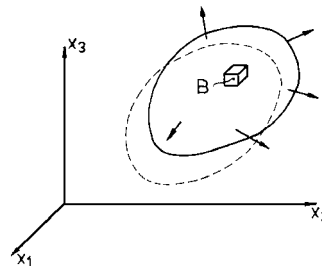
$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{ji}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} - \text{płaszczyzna } \perp \text{ do } x_1, \\ - \text{płaszczyzna } \perp \text{ do } x_2, \\ - \text{płaszczyzna } \perp \text{ do } x_3. \end{array} \quad (1.8)$$

Obiekt opisany zależnością (1.8) ma dziewięć składowych tworzących tzw. **tensor naprężenia** (macierz naprężenia). Wobec tego zależności (1.7) nazywamy niekiedy zależnością wektor-tensor.

Podsumowując powyższe rozważania, możemy stwierdzić, że **stan naprężenia jest jednoznacznie określony przez tensor naprężenia**. Własności i definicję tensora naprężenia omówimy w dalszych punktach tego rozdziału.

1.4. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE RÓWNOWAGI. SYMETRIA TENSORA NAPRĘŻENIA

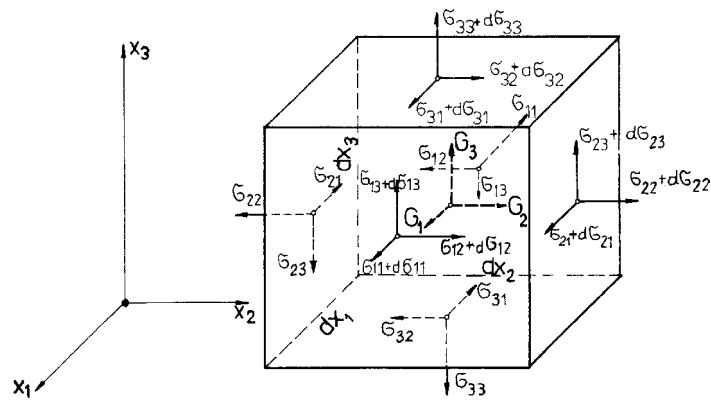
W poprzednim punkcie 1.3 badaliśmy, jak zmienia się wektor naprężenia po zmianie kąta nachylenia płaszczyzny dla ustalonego położenia rozpatrywanego punktu. Obecnie określimy warunki, jakie muszą spełniać składowe stanu naprężenia σ_{ij} po zmianie położenia badanego punktu. W tym celu ponownie wykorzystamy równania równowagi rzutów sił na poszczególne osie zapisane jednak dla innego elementu.



Rys. 1.7

Rozważmy ciało poddane działaniu sił powierzchniowych i masowych będących w równowadze (rys. 1.7). Pod wpływem tych sił wystąpią naprężenia wewnętrzne a ciało się odkształci, czyli z konfiguracji pierwotnej przed obciążeniem (na rys. 1.7 – linia przerywana) przejdzie do konfiguracji aktualnej po obciążeniu (na rys. 1.7 – linia ciągła). W konfiguracji aktualnej w otoczeniu punktu B wycinamy myślowo prostopadłościan o bardzo małych wymiarach dx_1, dx_2, dx_3 . Wydzielenie tak małego elementu całkowicie wypełnionego materiałem jest możliwe wobec założenia ciągłości materiału.

Zbadamy równowagę elementarnego prostopadłościanu, który w powiększeniu przedstawia rys. 1.8. Prostopadłościan jest obciążony siłami objętościowymi $\mathbf{G}dV$, a na wszystkich ścianach siłami wzajemnego oddziaływania między kostką i pozostałą częścią ciała. Na ścianach niewidocznych (płaszczyzny ujemne) występują składowe stanu naprężenia w badanym punkcie σ_{ji} . Na ścianach widocznych (płaszczyzny dodatnie) występują odpowiednie składowe powiększone o przyrosty $d\sigma_{ji}$ wynikające ze zmiany współrzędnych o wartości dx_j . Przyrosty te są równe zero tylko w tym szczególnym przypadku, gdy stan naprężenia jest jednorodny (tzn. taki sam w każdym punkcie badanego ciała).



Rys. 1.8

Ułożymy równanie sumy rzutów sił na jedną z osi, np. na oś x_3 :

$$\begin{aligned} & - \sigma_{23} dx_3 dx_1 + (\sigma_{23} + d\sigma_{23}) dx_3 dx_1 - \sigma_{13} dx_2 dx_3 + (\sigma_{13} + d\sigma_{13}) dx_2 dx_3 - \\ & - \sigma_{33} dx_1 dx_2 + (\sigma_{33} + d\sigma_{33}) dx_1 dx_2 + G_3 dx_1 dx_2 dx_3 = 0, \end{aligned}$$

a po redukcji wyrazów podobnych:

$$d\sigma_{23} dx_1 dx_3 + d\sigma_{13} dx_2 dx_3 + d\sigma_{33} dx_1 dx_2 + G_3 dx_1 dx_2 dx_3 = 0.$$

Obliczymy teraz odpowiednie wyrażenie na przyrosty naprężeń. Zauważmy, że wszystkie współrzędne tensora naprężenia w przypadku ogólnym są funkcjami położenia, tzn. $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$. Wobec tego przyrosty tych funkcji są równe pochodnej cząstkowej względem odpowiedniej współrzędnej x_j razy przyrost tej współrzędnej dx_j . Ponieważ przyrost $d\sigma_{23}$ wynika ze zmiany współrzędnej x_2 , więc

$$d\sigma_{23} = \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} dx_2.$$

W podobny sposób otrzymujemy:

$$d\sigma_{13} = \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} dx_1, \quad d\sigma_{33} = \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} dx_3.$$

Po podstawieniu tych wyrażeń do rozważanego równania równowagi mamy:

$$\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} dV + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} dV + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} dV + G_3 dV = 0,$$

gdzie $dV = dx_1 dx_2 dx_3$.

Ostatecznie po podzieleniu przez dV uzyskujemy równanie różniczkowe cząstkowe:

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + G_3 = 0$$

lub

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{j3}}{\partial x_j} + G_3 = 0.$$

Rezultat ten można łatwo uogólnić na pozostałe równania rzutów przez zmianę odpowiedzialnego wskaźnika. Wystarczy tylko zamiast indeksu 3 napisać indeks danej osi. Tak więc sumowanie rzutów sił na poszczególne osie równoległe do osi układu współrzędnych prowadzi do **równań różniczkowych równowagi** o następującej postaci:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + G_1 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + G_2 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + G_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

lub

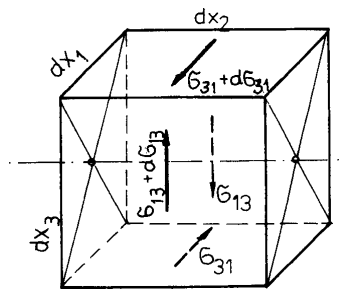
$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + G_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.9a)$$

albo

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ji,j} + G_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.9b)$$

gdzie przecinek na poziomie wskaźnika oznacza pochodną cząstkową zgodnie z następującą umową:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\) \equiv (\)_{,j}$$



Rys. 1.9

Równania (1.9) przedstawiają warunki, jakie muszą spełniać współrzędne tensora naprężenia $\sigma_{ji}(x_1, x_2, x_3)$ po zmianie położenia badanego punktu. Funkcje σ_{ji} – jak widać – nie mogą być dowolne.

Interesujące jest, jakie własności tensora naprężenia wynikają z pozostałych warunków równowagi, a mianowicie z sumy momentów względem trzech osi. Obliczymy przykładowo sumę momentów względem osi równoległej do x_2 i przechodzącej przez środek ciężkości elementarnego prostopadłościanu. Na rysunku 1.9 zaznaczono tę oś oraz te składowe stanu naprężenia, które należy uwzględnić w równaniu momentów. Otrzymujemy równanie:

$$-(\sigma_{13} + d\sigma_{13})dx_2dx_3 \frac{dx_1}{2} - \sigma_{13}dx_2dx_3 \frac{dx_1}{2} + (\sigma_{31} + d\sigma_{31})dx_1dx_2 \frac{dx_3}{2} + \sigma_{31}dx_1dx_2 \frac{dx_3}{2} = 0.$$

Po podzieleniu tego równania przez $dx_1dx_2dx_3$ otrzymujemy:

$$\sigma_{13} + \frac{1}{2}d\sigma_{13} = \sigma_{31} + \frac{1}{2}d\sigma_{31}.$$

Składniki $d\sigma_{13}/2$ i $d\sigma_{31}/2$ są małymi wielkościami wyższego rzędu, które można pominąć. Suma momentów względem osi równoległej do x_2 prowadzi więc do bardzo ważnej zależności:

$$\sigma_{13} = \sigma_{31}.$$

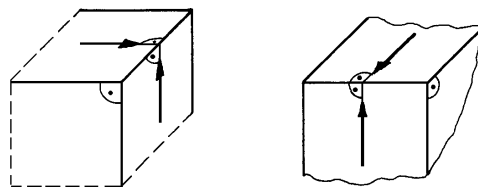
Sumy momentów względem osi równoległych do x_1 i x_3 dają odpowiednio: $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ oraz $\sigma_{12} = \sigma_{21}$. Tę własność tensora naprężenia można zapisać krótko:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

lub w postaci macierzowej:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T. \quad (1.10)$$

Symbol T oznacza tutaj znak transpozycji macierzy. Na podstawie zależności (1.10) mówimy, że **tensor naprężenia jest symetryczny**, tzn. wyrazy macierzy naprężenia są symetryczne względem głównej przekątnej. Z fizycznego punktu widzenia oznacza to, że **naprężenia styczne na płaszczyznach wzajemnie prostopadłych i prostopadłe do krawędzi przecięcia tych płaszczyzn są równe** (por. rys. 1.10).



Rys. 1.10

Widzimy więc, że spośród 9 współrzędnych tensora naprężenia tylko 6 jest niezależnych. W celu zdefiniowania stanu naprężenia wystarczy zatem podać jedynie wyrazy leżące powyżej głównej przekątnej macierzy naprężenia. Z symetrii tensora naprężenia wynika, że macierz naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ jest równa swej transpozycji $\boldsymbol{\sigma}^T$:

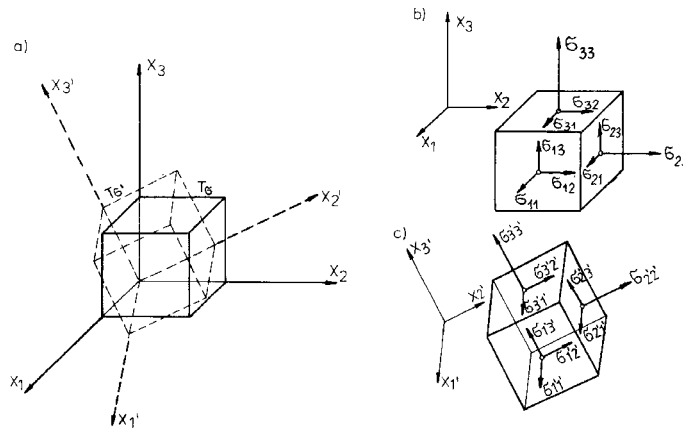
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \equiv \boldsymbol{\sigma}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

Dodać warto, że zależności (1.9) i (1.10) można również wyprowadzić z równań równowagi dowolnego fragmentu ciała albo z zasady zachowania pędu i zasady zachowania momentu pędu.

W podsumowaniu należy stwierdzić, że składowe stanu naprężenia nie mogą być dowolne; muszą spełniać równania różniczkowe równowagi wewnętrznej (1.9) oraz wykazywać symetrię względem głównej przekątnej. Ostatnie stwierdzenie jest słuszne jedynie w przypadku, gdy pominiemy naprężenia momentowe. W ośrodku *Cosseratów* oprócz tensora naprężeń siłowych σ_{ij} występuje również tensor naprężeń momentowych μ_{ij} . Równania równowagi (1.9) zachowują wówczas swą postać, a odpowiednikiem zależności (1.10) są równania, z których wynika, że tensor naprężeń siłowych $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$ nie jest symetryczny.

1.5. TRANSFORMACJA SKŁADOWYCH STANU NAPRĘŻENIA. DEFINICJA TENSORA

Przyjmijmy, że w układzie osi x_1, x_2, x_3 dany jest tensor naprężenia σ o współrzędnych σ_{ij} . Obróćmy teraz układ osi do nowego położenia x_1', x_2', x_3' , przy czym początek obu układów jest wspólny (rys. 1.11). Elementowi prostopadłościennemu wyciętemu myślowo w układzie obróconym będzie odpowiadać tensor naprężenia σ' , o współrzędnych $\sigma_{p'k'}$.



Rys. 1.11

Zadanie, jakie sobie stawiamy, to określenie składowych σ' za pomocą danych składowych σ . Osie układu współrzędnych x_1', x_2', x_3' tworzą z osiami x_1, x_2, x_3 kąty, których kosinusy kierunkowe $a_{p'i} = \cos(x_{p'}, x_i)$ przedstawiono w tabelicy (por. *W.Nowacki* [32]):

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$a_{1'1}$	$a_{1'2}$	$a_{1'3}$
x_2'	$a_{2'1}$	$a_{2'2}$	$a_{2'3}$
x_3'	$a_{3'1}$	$a_{3'2}$	$a_{3'3}$

Ponieważ $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$, więc $a_{p'i} = a_{ip'}$.

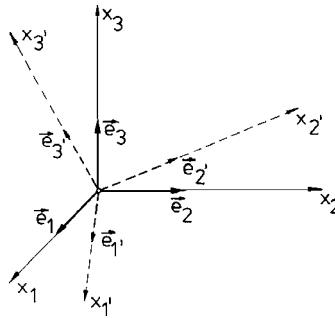
Zwróciliśmy już uwagę na to, że współrzędne wektora o długości jednostkowej są równe kosinusom kątów zawartych między wektorem jednostkowym a osiami układu. Zatem elementy każdej wiersza tabelicy możemy traktować jako współrzędne wektorów jednostkowych leżących kolejno na osiach x_1', x_2', x_3' . Są to po prostu składowe wersory nowego układu współrzędnych $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$ (por. rys. 1.12). Wersory te zapisane za pomocą wersorów układu nie obróconego (pierwotnego) przyjmują postać:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_1' &= a_{1'1}\mathbf{e}_1 + a_{1'2}\mathbf{e}_2 + a_{1'3}\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_{1'i}\mathbf{e}_i, \\
 \mathbf{e}_2' &= a_{2'1}\mathbf{e}_1 + a_{2'2}\mathbf{e}_2 + a_{2'3}\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_{2'i}\mathbf{e}_i, \\
 \mathbf{e}_3' &= a_{3'1}\mathbf{e}_1 + a_{3'2}\mathbf{e}_2 + a_{3'3}\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_{3'i}\mathbf{e}_i,
 \end{aligned}
 \tag{a}$$

lub w postaci macierzowej:

$$(b) \quad \mathbf{e}' = \mathbf{A} \mathbf{e}, \quad \text{gdzie } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1'1} & a_{1'2} & a_{1'3} \\ a_{2'1} & a_{2'2} & a_{2'3} \\ a_{3'1} & a_{3'2} & a_{3'3} \end{bmatrix}.$$

Macierz \mathbf{A} jest macierzą **transformacji współrzędnych**. Dodajmy, że macierz ta nie jest symetryczna, bo $a_{p'i} \neq a_{i'p}$. Oznacza to po prostu, że $\mathbf{A}^T \neq \mathbf{A}$. Uwaga ta jest istotna przy wykonywaniu obliczeń za pomocą kalkulatorów umożliwiających wykonywanie operacji macierzowych.



Rys. 1.12

Ponieważ wersory $\mathbf{e}_{p'}$ są do siebie prostopadłe, ich iloczyn skalarny jest równy zeru:

$$(c) \quad \mathbf{e}_{1'} \cdot \mathbf{e}_{2'} = 0; \quad \mathbf{e}_{2'} \cdot \mathbf{e}_{3'} = 0; \quad \mathbf{e}_{3'} \cdot \mathbf{e}_{1'} = 0.$$

Mnożenie skalarne każdego z wersorów przez siebie daje z kolei kwadrat ich długości, czyli jedynek:

$$(d) \quad \mathbf{e}_{1'} \cdot \mathbf{e}_{1'} = 1; \quad \mathbf{e}_{2'} \cdot \mathbf{e}_{2'} = 1; \quad \mathbf{e}_{3'} \cdot \mathbf{e}_{3'} = 1.$$

Po podstawieniu do równań (c) i (d) wzorów (a) na wersory w układzie obróconym otrzymujemy 6 niezależnych równań wiążących kosinusy kierunkowe $a_{ip'}$ ($i = 1, 2, 3; p' = 1', 2', 3'$):

$$\sum_{i=1}^3 a_{p'i} a_{ik'} = \delta_{p'k'}; \quad p', k' = 1', 2', 3'$$

lub w postaci macierzowej:

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{I},$$

(1.12)

gdzie $\delta_{p'k'}$ jest symbolem *Kroneckera*, zdefiniowanym następująco (por. dodatek):

$$\delta_{p'k'} = \mathbf{e}_{p'} \cdot \mathbf{e}_{k'} = \begin{cases} 1, & p' = k' \\ 0, & p' \neq k' \end{cases} \quad \mathbf{I} = [\delta_{p'k'}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jeśli powyższe postępowanie zastosujemy do wyrażenia wersorów \mathbf{e}_i przez wersory $\mathbf{e}_{p'}$ (odpowiednie współrzędne występują wówczas w kolumnach tablicy), to otrzymamy następujące równoważne zależności:

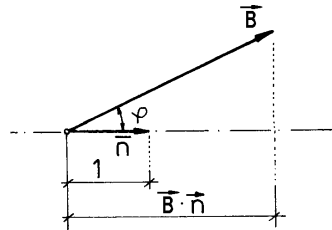
$$\sum_{k'=1'}^3 a_{ik'} a_{k'j} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{lub } \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}. \quad (1.12a)$$

Równań (1.12) jest 9, przy czym różniących się od siebie jest tylko 6. Równania (1.12) nie uwzględniają przemienności względem mnożenia, tzn. przykładowo obok równania $\mathbf{e}_{2'} \cdot \mathbf{e}_{3'} = \delta_{2'3'}$ pojawia się równanie $\mathbf{e}_{3'} \cdot \mathbf{e}_{2'} = \delta_{3'2'} = \delta_{2'3'}$. Są trzy takie dodatkowe równania. Zatem spośród dziewięciu wartości kosinu-

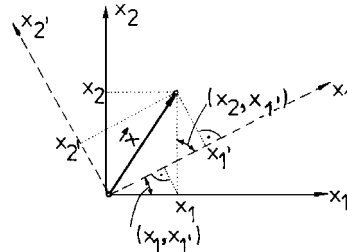
sów tylko 3 są niezależne (9 kosinusów – 6 równań = 3), bo wzajemny obrót układu opisują 3 niezależne wartości kątów.

Przypomnijmy teraz pewną własność wynikającą z definicji iloczynu skalarnego, stosowaną przy rzutowaniu wektora na dany kierunek: **rzut wektora \mathbf{B} na kierunek określony wektorem jednostkowym \mathbf{n} równa się iloczynowi skalarnemu tych wektorów** (rys. 1.13). Rzut wektora \mathbf{B} na kierunek \mathbf{n} wyraża wzór:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{B}| \cdot |\mathbf{n}| = |\mathbf{B}| \cdot 1 \cdot \cos \varphi = \sum_{i=1}^3 B_i n_i.$$



Rys. 1.13



Rys. 1.14

Współrzędne punktów przy przejściu z jednego układu do drugiego transformują się tak samo jak współrzędne wektorów. Dla przykładu wzory transformacyjne dla płaskich układów współrzędnych, przedstawionych na rys. 1.14, mają postać:

$$x_{1'} = x_1 \cos(x_1, x_{1'}) + x_2 \cos(x_2, x_{1'}) = x_1 a_{1'1} + x_2 a_{2'1},$$

$$x_{2'} = x_1 \cos(x_1, x_{2'}) + x_2 \cos(x_2, x_{2'}) = x_1 a_{1'2} + x_2 a_{2'2}.$$

Wzory te można uzyskać natychmiast, jeśli np. współrzędną $x_{1'}$ potraktujemy jako rzut wektora $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$ na kierunek $x_{1'}$, opisany wektorem jednostkowym o współrzędnych równych $a_{1'1}$ i $a_{2'1}$.

Analogiczne wzory transformacyjne możemy napisać dla przypadku przestrzennego (trójwymiarowego):

$$\left. \begin{aligned} x_{1'} &= a_{1'1}x_1 + a_{1'2}x_2 + a_{1'3}x_3 = \sum_{i=1}^3 a_{1'i} x_i, \\ x_{2'} &= a_{2'1}x_1 + a_{2'2}x_2 + a_{2'3}x_3 = \sum_{i=1}^3 a_{2'i} x_i, \\ x_{3'} &= a_{3'1}x_1 + a_{3'2}x_2 + a_{3'3}x_3 = \sum_{i=1}^3 a_{3'i} x_i \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

lub w bardziej zwięzłym zapisie:

$$x_{k'} = \sum_{i=1}^3 a_{k'i} x_i, \quad (k' = 1', 2', 3'),$$

a w zapisie macierzowym:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x}.$$

(1.13a)

W tym miejscu warto wprowadzić jeszcze dalsze uproszczenie zapisu. Wielokrotnie już do tej pory używaliśmy **znaku sumy trzech składników**. Zwróćmy uwagę, że sumy te dotyczyły tych wskaźników, które **powtarzały się dwukrotnie**. W takich przypadkach dla skrócenia zapisu będziemy pomijać znak sumy*). Jest to tzw. **konwencja sumacyjna** wprowadzona przez *Einsteina*. Wzory transformacyjne (1.13) zapiszemy więc następująco:

*) Jeżeli jednak nie chcemy sumować, to wskaźniki powtarzające się dwukrotnie ujmujemy w nawiasach. Na przykład wyrażenie: $P_{(k)} u_{(k)}$ oznacza tylko iloczyn dwóch liczb P_k i u_k (por. np. p. 5.1).

$$\begin{aligned} x_{p'} &= a_{p'i} x_i, \quad p' = 1', 2', 3'; i = 1, 2, 3, \\ x_{p'} &= a_{p'r} x_r, \quad p' = 1', 2', 3'; r = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1.13b)$$

Widzimy, że wskaźnik, względem którego sumujemy, może być oznaczony dowolną małą literą alfabetu łacińskiego. Jest to tzw. **wskaźnik niemy**. Pozostałe to **wskaźniki żywe**.

Identyczne wzory stosujemy przy transformacji współrzędnych wektorów. Na przykład wektor **B** o współrzędnych B_1, B_2, B_3 ma w układzie obróconym współrzędne $B_{1'}, B_{2'}, B_{3'}$, które obliczamy na podstawie wzorów:

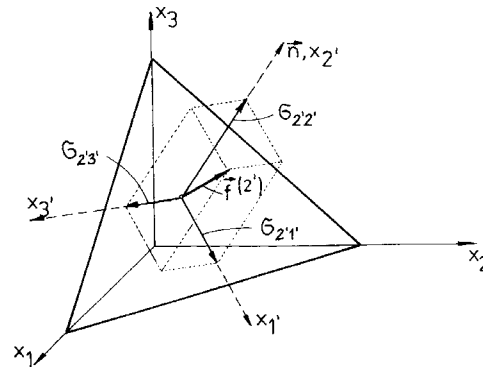
$$B_{s'} = a_{s't} B_t; \quad s' = 1', 2', 3'; t = 1, 2, 3 \quad \text{lub} \quad \mathbf{B}' = \mathbf{A} \mathbf{B}. \quad (1.14)$$

Podobna zależność obowiązuje przy wyrażeniu współrzędnych w układzie pierwotnym przez współrzędne w układzie obróconym:

$$B_i = a_{i r'} B_{r'}; \quad i = 1, 2, 3; r' = 1', 2', 3' \quad \text{lub} \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{B}'. \quad (1.14a)$$

Powróćmy do problemu transformacji współrzędnych tensora naprężenia. Przyjmijmy, że jedna z osi układu obróconego – np. oś $x_{2'}$ (por. rys. 1.15) – pokrywa się z wektorem normalnym **n**. Oznacza to, że $n_i = a_{i2'}$. Wówczas zgodnie z równaniami (1.7a) wyrażającymi zależność wektor-tensor otrzymujemy:

$$f_i^{(2')} = \sigma_{ji} n_j = \sigma_{ji} a_{j2'} = \sigma_{1i} a_{12'} + \sigma_{2i} a_{22'} + \sigma_{3i} a_{32'}.$$



Rys. 1.15

W celu obliczenia współrzędnych wektora naprężenia na ścianie 2' (tzn. $\sigma_{2'1'}, \sigma_{2'2'}$ i $\sigma_{2'3'}$) trzeba kolejno rzutować wektor $\mathbf{f}^{(2')}$ o współrzędnych $f_i^{(2')}$ na kierunki osi $x_{1'}, x_{2'}$ i $x_{3'}$:

$$\begin{aligned} - \text{rzut wektora } \mathbf{f}^{(2')} \text{ na oś } x_{1'}: \quad \sigma_{2'1'} &= \sum_{i=1}^3 f_i^{(2')} a_{i1'} = f_i^{(2')} a_{i1'}, \\ - \text{rzut wektora } \mathbf{f}^{(2')} \text{ na oś } x_{2'}: \quad \sigma_{2'2'} &= \sum_{i=1}^3 f_i^{(2')} a_{i2'} = f_i^{(2')} a_{i2'}, \\ - \text{rzut wektora } \mathbf{f}^{(2')} \text{ na oś } x_{3'}: \quad \sigma_{2'3'} &= \sum_{i=1}^3 f_i^{(2')} a_{i3'} = f_i^{(2')} a_{i3'}. \end{aligned}$$

Pamiętamy tu, że wektory jednostkowe odpowiadające tym osiom mają współrzędne $a_{i1'}, a_{i2'}, a_{i3'}$. Po przyjęciu w tych wzorach, że $f_i^{(2')} = \sigma_{ji} a_{j2'}$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\sigma_{2'1'} &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \sigma_{ji} a_{j2'} a_{i1'} = \sigma_{ji} a_{j2'} a_{i1'}, \\ \sigma_{2'2'} &= \sigma_{ji} a_{j2'} a_{i2'}, \\ \sigma_{2'3'} &= \sigma_{ji} a_{j2'} a_{i3'}\end{aligned}$$

lub $\sigma_{2'p'} = \sigma_{ji} a_{j2'} a_{ip'}$, gdzie $j, i = 1, 2, 3$ oraz $p' = 1', 2', 3'$

Uzyskany wynik łatwo można uogólnić na pozostałe płaszczyzny prostopadłe do osi $x_{1'}$ oraz $x_{3'}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{1'p'} &= \sigma_{ji} a_{j1'} a_{ip'}, \\ \sigma_{3'p'} &= \sigma_{ji} a_{j3'} a_{ip'}.\end{aligned}$$

Otrzymane wyżej równania można przedstawić jednym wzorem:

$$\sigma_{k'p'} = \sigma_{ji} a_{jk'} a_{ip'}, \quad j, i = 1, 2, 3; \quad k', p' = 1', 2', 3'. \quad (1.15)$$

Jeśli zamienimy wskaźniki nieme i oraz j , to

$$\sigma_{k'p'} = \sigma_{ij} a_{ik'} a_{jp'} = a_{k'i} \sigma_{ij} a_{jp'}, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad k', p' = 1', 2', 3'. \quad (1.15a)$$

Wzory (1.15a) są poszukiwanymi **wzorami transformacyjnymi składowych tensora naprężenia przy obrocie układu współrzędnych**.

Wzory (1.15) można również wykorzystać do transformacji z układu obróconego do pierwotnego:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{k'p'} a_{k'i} a_{p'j} = a_{ik'} \sigma_{k'p'} a_{p'j}. \quad (1.15b)$$

Do transformacji składowych tensora naprężenia wygodnie jest używać operacji macierzowych. W tym przypadku wykorzystamy drugie postacie prawych stron wzorów (1.15a) i (1.15b), przygotowane do zapisu macierzowego. Wynika z nich, że:

$$\sigma' = \mathbf{A} \sigma \mathbf{A}^T \quad \text{oraz} \quad \sigma = \mathbf{A}^T \sigma' \mathbf{A}. \quad (1.15c)$$

W celu lepszej ilustracji wzoru (1.15a) obliczymy „ręcznie” współrzędną $\sigma_{2'3'}$, pamiętając o konwencji sumacyjnej:

$$\begin{aligned}\sigma_{2'3'} &= \sigma_{ij} a_{i2'} a_{j3'} = (\text{sumujemy względem wskaźnika } i) \\ &= \sigma_{1j} a_{12'} a_{j3'} + \sigma_{2j} a_{22'} a_{j3'} + \sigma_{3j} a_{32'} a_{j3'} = \\ &= (\text{sumujemy kolejno każdy składnik sumy względem wskaźnika } j) = \\ &= \sigma_{11} a_{12'} a_{13'} + \sigma_{12} a_{12'} a_{23'} + \sigma_{13} a_{12'} a_{33'} + \\ &+ \sigma_{21} a_{22'} a_{13'} + \sigma_{22} a_{22'} a_{23'} + \sigma_{23} a_{22'} a_{33'} + \\ &+ \sigma_{31} a_{32'} a_{13'} + \sigma_{32} a_{32'} a_{23'} + \sigma_{33} a_{32'} a_{33'}.\end{aligned}$$

Przejdziemy obecnie do definicji tensora. Zestawmy prawa transformacji wektora i tensora naprężenia przy obrocie układu współrzędnych:

$$\begin{aligned}- \text{prawo transformacji składowych wektora} & \quad B_{r'} = B_i a_{ir'}, \\ - \text{prawo transformacji składowych tensora} & \quad \sigma_{k'p'} = \sigma_{ij} a_{ik'} a_{jp'}.\end{aligned}$$

W budowie obu wzorów widzimy duże podobieństwo: po prawej stronie występują iloczyny współrzędnych pierwotnych i kosinusów kierunkowych osi obróconych. Różnice są tylko ilościowe (inna liczba wskaźników i mnożników kosinusowych). Można sobie wyobrazić wielkości o trzech, czterech i więcej wskaźnikach, transformujących się według podobnego prawa:

$$C_{p'r's',\dots,t'} = C_{ijk,\dots,t} a_{ip'} a_{jr'} a_{ks'}, \dots, a_{lt'}. \quad (1.16)$$

Wszystkie **wielkości wielowskaźnikowe, których składowe przy obrocie osi układu transformują się zgodnie ze wzorem (1.16), nazywa się tensorami**.

Mamy więc tensory pierwszego rzędu (wektory), tensory drugiego rzędu (np. tensor naprężenia) itd. Rząd tensora określa liczba wskaźników. Z kolei liczba współrzędnych takiego uogólnionego tensora wynosi m^n , gdzie m jest wymiarem przestrzeni (u nas $m = 3$), a n jest rzędem tensora (np. wektor ma $3^1 = 3$

współrzędne, tensor naprężenia $3^2 = 9$ współrzędnych). Weźmy pod uwagę jakąś wielkość skalarną Φ (np. gęstość, temperaturę). Przy obrocie układu osi w danym punkcie skalar nie zmienia swej wartości, czyli prawo transformacji skalara ma postać: $\Phi' = \Phi$. Skalar można więc traktować jako tensor rzędu zero; liczba współrzędnych określających skalar $3^0 = 1$. Pojęcie tensora stanowi więc uogólnienie wielkości fizycznych. Należą do nich m.in. tensor odkształcenia i tensor stałych sprężystości. Momenty bezwładności figur płaskich i brył są również tensorami.

Na przykładzie tensora naprężenia omówimy specyficzne własności tensorów symetrycznych drugiego rzędu. Odwołamy się do nich przy omawianiu dalszych zagadnień.

Na zakończenie tego punktu podamy kilka uwag na temat używanych opisów matematycznych. Porównując zapis wskaźnikowy oraz zapis macierzowy, można dojść do wniosku, że macierzowe ujęcie jest bardziej przejrzyste, pokazuje ogólną strukturę wzorów i jest łatwiejsze do zapamiętania. Okazuje się jednak, że zapis wskaźnikowy jest bardziej uniwersalny, pozwala bowiem w prosty sposób operować obiektami wielowskaźnikowymi oraz zawiera informacje szczegółowe o wewnętrznej strukturze analizowanego wzoru, niedostępne w zapisie macierzowym. Przejście z zapisu wskaźnikowego do macierzowego, jeśli jest ono wykonalne, nie nastęrcza kłopotów, natomiast odwrotna droga jest czasami dosyć ciemna.

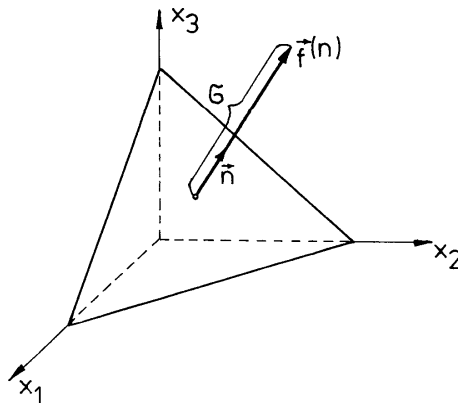
1.6. NAPRĘŻENIA GŁÓWNE

Skoro na podstawie wzorów transformacyjnych (1.15a) możemy w danym punkcie obliczyć współrzędne tensora dla dowolnego układu osi prostokątnych, to zachodzi pytanie, czy można dobrać takie kierunki osi układu, by naprężenia styczne na ściankach elementarnego prostopadłościanu były równe zero. W takim przypadku wektor naprężenia $\mathbf{f}^{(n)}$ pokrywa się z kierunkiem normalnej do płaszczyzny (por. rys. 1.16), czyli

$$f_i^{(n)} = \sigma n_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

gdzie $\sigma = |\mathbf{f}^{(n)}|$ oznacza długość wektora naprężenia. Z drugiej strony z zależności wektor-tensor (1.7) wiemy, że

$$f_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j, \quad i = 1, 2, 3.$$



Rys. 1.16

Porównując prawe strony obu wzorów otrzymujemy poszukiwany warunek znikania naprężeń stycznych:

$$\sigma n_i = \sigma_{ji} n_j$$

lub

$$\sigma_{ji} n_j - \sigma n_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rozpiszemy powyższe równania dla kolejnych wartości wskaźnika i wykonując sumowanie względem wskaźnika j :

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{11} - \sigma)n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 &= 0, \\ \sigma_{12}n_1 + (\sigma_{22} - \sigma)n_2 + \sigma_{32}n_3 &= 0, \\ \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + (\sigma_{33} - \sigma)n_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

przy czym współrzędne wektora normalnego \mathbf{n} , jak wiemy, spełniają równanie:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = n_i n_i = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1. \quad (1.18)$$

Równania (1.17) i (1.18) tworzą układ czterech równań o czterech niewiadomych n_1, n_2, n_3 oraz σ .

Grupa równań (1.17) stanowi układ jednorodnych równań liniowych ze względu na współrzędne n_1, n_2 i n_3 . Układ taki ma rozwiązanie niezerowe tylko wówczas, gdy wyznacznik utworzony ze współczynników układu jest równy zero. Otrzymujemy wówczas tzw. problem wartości głównych tensora naprężenia:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Po rozwinięciu wyznacznika uzyskujemy algebraiczne równanie III stopnia ze względu na σ , **zwane równaniem charakterystycznym** lub wiekowym (sekularnym):

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0, \quad (1.19)$$

gdzie współczynniki I_1, I_2, I_3 określamy ze wzorów:

$$\begin{aligned} I_1(\boldsymbol{\sigma}) &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{rr}, \\ I_2(\boldsymbol{\sigma}) &= \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} = \frac{\partial |\sigma_{ij}|}{\partial \sigma_{pp}} = \frac{1}{2} (\sigma_{kk}\sigma_{rr} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}), \\ I_3(\boldsymbol{\sigma}) &= \det[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Równanie (1.19) ma **3 pierwiastki** $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Można wykazać (por. dodatek), że **przybierają one zawsze wartości rzeczywiste, jeśli macierz naprężenia jest symetryczna**. Pierwiastki te, rzecz jasna, nie mogą być zależne od przyjętego układu osi współrzędnych. Oznacza to, że proporcje poszczególnych współczynników równania III stopnia muszą pozostawać takie same. Ponieważ współczynnik przy najwyższej potęgę powinien być równy jedności, to pozostałe współczynniki równania (1.19), czyli $I_1(\boldsymbol{\sigma}), I_2(\boldsymbol{\sigma}), I_3(\boldsymbol{\sigma})$, dla każdego dowolnie przyjętego układu osi muszą przyjmować takie same wartości. Dlatego współczynniki $I_1(\boldsymbol{\sigma}), I_2(\boldsymbol{\sigma}), I_3(\boldsymbol{\sigma})$ nazywamy **niezmiennikami głównymi tensora naprężenia**. (Wektor, jako tensor pierwszego rzędu, ma tylko jeden niezmiennik; jest nim długość wektora). Pierwiastki równania wiekowego (1.19) $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ nazywamy **wartościami głównymi tensora naprężenia lub naprężeniami głównymi**. Często wartości główne porządkujemy w ten sposób, że $\sigma_I = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, a $\sigma_{III} = \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$; naprężenie σ_{II} przyjmuje wartość pośrednią. Naprężenia $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ nazywamy **uporządkowanymi naprężeniami głównymi**.

Pozostaje jeszcze wyznaczenie kierunków osi odpowiadających poszczególnym naprężeniom głównym. Kierunki te, tzw. kierunki główne tensora naprężenia lub osie naprężeń głównych, określone są przez 3 wektory jednostkowe $\mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}, \mathbf{n}^{(3)}$. Każdy z tych wektorów odpowiada innej wartości głównej. Chcąc obliczyć np. współrzędne wektora $\mathbf{n}^{(2)}$, podstawiamy σ_2 do dowolnych dwóch równań układu (1.17) oraz dołączamy do nich równanie (1.18). Otrzymujemy 3 równania o 3 niewiadomych $n_1^{(2)}, n_2^{(2)}, n_3^{(2)}$:

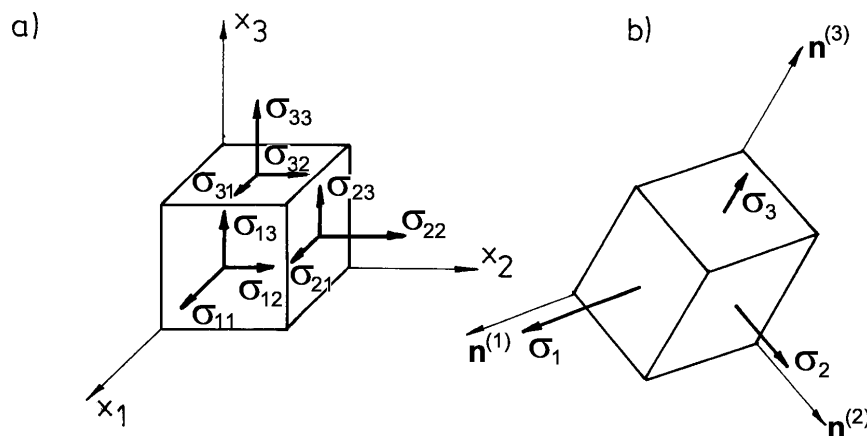
$$\begin{aligned}(\sigma_{11} - \sigma_2)n_1^{(2)} + \sigma_{21}n_2^{(2)} + \sigma_{31}n_3^{(2)} &= 0, \\ \sigma_{13}n_1^{(2)} + \sigma_{23}n_2^{(2)} + (\sigma_{33} - \sigma_2)n_3^{(2)} &= 0, \\ [n_1^{(2)}]^2 + [n_2^{(2)}]^2 + [n_3^{(2)}]^2 &= 1.\end{aligned}$$

Z tego układu obliczamy współrzędne normalnego wektora jednostkowego określającego płaszczyznę, na którą działa naprężenie σ_2 . Analogicznie wyznacza się pozostałe wektory $\mathbf{n}^{(1)}$ i $\mathbf{n}^{(3)}$. Można wykazać, że **osie główne** opisane wektorami $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$, $\mathbf{n}^{(3)}$ **są do siebie prostopadłe**. Osie główne w badanym punkcie można więc utożsamiać z pewnym prostokątnym układem osi współrzędnych. Pozwala to na duże uproszczenie rozważań i rachunków. Zwróćmy uwagę na to, że współrzędne $n_i^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3$) muszą zatem spełniać warunki ortogonalności, analogiczne do równań (1.12), tzn.:

$$\mathbf{n}^{(k)} \cdot \mathbf{n}^{(l)} = n_i^{(k)} n_i^{(l)} = \delta_{kl}, \quad i, k, l = 1, 2, 3.$$

Odpowiadając na pytanie postawione na początku tego punktu stwierdzamy, że przez dobranie odpowiedniego układu osi dowolny stan naprężenia można zawsze sprowadzić do stanu odpowiadającego działaniu trzech naprężeń normalnych $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ na trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny (rys. 1.17). Macierz naprężenia określają wówczas tylko 3 współrzędne:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$



Rys. 1.17

Liczba informacji potrzebnych do określenia stanu naprężenia wynosi w dalszym ciągu 6, ponieważ oprócz trzech wartości $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ trzeba znać położenie głównych osi naprężeń, określone przez 3 kąty.

Niezmienniki tensora naprężenia muszą być takie same dla każdego układu współrzędnych, również dla osi głównych. Zgodnie ze wzorami (1.20)

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_{rr} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{const}, \\ I_2 &= \frac{\partial |\sigma_{ij}|}{\partial \sigma_{pp}} = \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_2 = \text{const}, \\ I_3 &= |\sigma_{ij}| = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Załóżmy teraz, że układ osi współrzędnych x_1, x_2, x_3 pokrywa się z osiami naprężeń głównych. Obliczmy naprężenia normalne $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}$ i styczne $\boldsymbol{\tau}^{(n)}$, działające na dowolną płaszczyznę o normalnej \mathbf{n} . Stan naprężenia w układzie osi głównych opisują wzory:

$$\sigma_{11} = \sigma_1, \quad \sigma_{22} = \sigma_2, \quad \sigma_{33} = \sigma_3; \quad \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = 0.$$

Z warunków (1.7) obliczymy współrzędne wektora $\mathbf{f}^{(n)}$:

$$f_i^{(n)} = \sigma_{ij}n_j,$$

$$f_1^{(n)} = \sigma_1n_1, \quad f_2^{(n)} = \sigma_2n_2, \quad f_3^{(n)} = \sigma_3n_3.$$

Naprężenia normalne σ otrzymujemy, rzutując wektor $\mathbf{f}^{(n)}$ na kierunek \mathbf{n} :

$$\sigma^{(n)} = f_i^{(n)}n_i = f_1^{(n)}n_1 + f_2^{(n)}n_2 + f_3^{(n)}n_3 = \sigma_1n_1^2 + \sigma_2n_2^2 + \sigma_3n_3^2.$$

Naprężenia styczne obliczymy ze wzoru Pitagorasa :

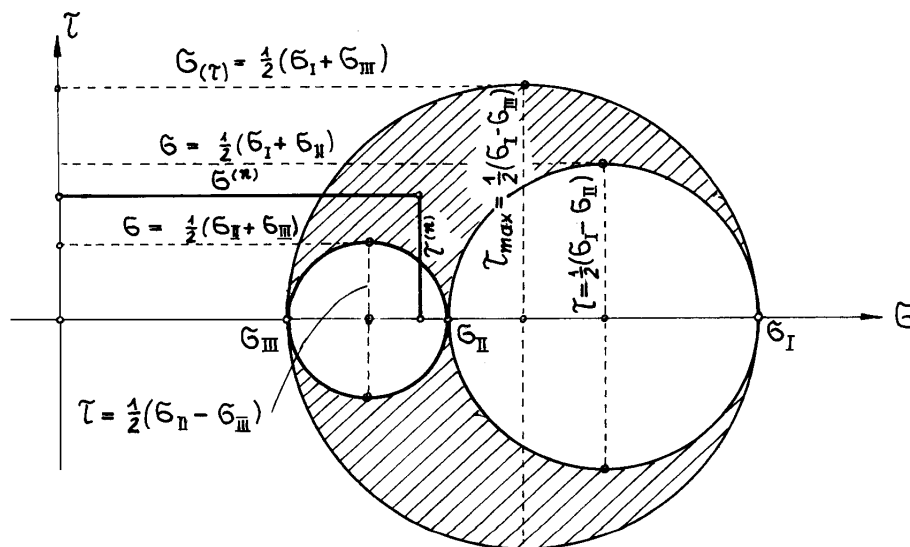
$$\tau^{(n)} = \sqrt{|\mathbf{f}^{(n)}|^2 - (\sigma^{(n)})^2},$$

gdzie

$$|\mathbf{f}^{(n)}|^2 = |f_1^{(n)}|^2 + |f_2^{(n)}|^2 + |f_3^{(n)}|^2 = \sigma_1^2n_1^2 + \sigma_2^2n_2^2 + \sigma_3^2n_3^2.$$

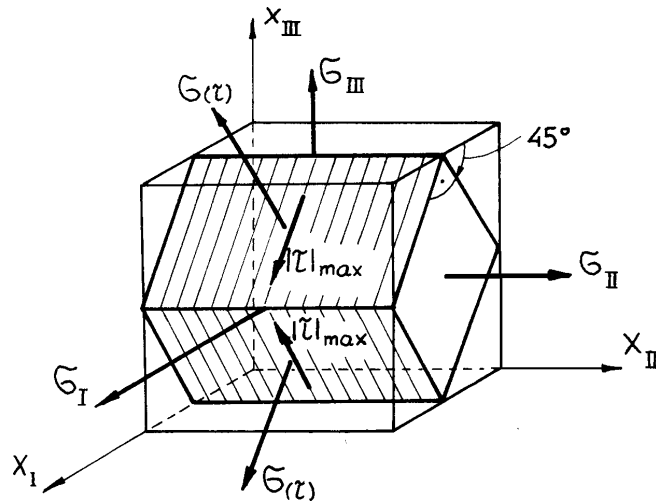
Bardzo sugestywną interpretację wzorów transformacyjnych (1.15a) oraz wartości głównych stanowią tzw. **koła Mohra**. W celu wykreślenia tych kół wybieramy prostokątny układ współrzędnych σ, τ . Na osi σ odkładamy wartości uporządkowanych naprężeń głównych $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ i zakreślamy koła o promieniach:

$$\frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III}), \quad \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II}), \quad \frac{1}{2}(\sigma_{II} - \sigma_{III}).$$



Rys. 1.18

W rezultacie otrzymamy trzy wzajemnie stykające się koła (rys. 1.18). Wykazuje się, że współrzędne punktów obszaru zakreślowanego na rys. 1.18 odpowiadają wszystkim możliwym kombinacjom naprężeń normalnych i stycznych dla wszystkich płaszczyzn przechodzących przez badany punkt. Dowód poprawności konstrukcji kół Mohra oraz inne szczegóły można znaleźć w wielu podręcznikach (np. Stanisławskiego [43], Jakubowicza, Orłosia [20], Krzysia, Życzkowskiego [26]). Konstrukcję koła Mohra dla płaskiego stanu naprężenia omówimy szczegółowo w p. 1.8.



Rys. 1.19

Z konstrukcji kół naprężeń dla przypadku przestrzennego wynikają dalsze własności tensora naprężenia, które podamy bez dowodu:

- σ_I jest największym, a σ_{III} najmniejszym ze *wszystkich możliwych* naprężeń normalnych występujących w danym punkcie,
- ekstremalne naprężenia styczne występują na płaszczyznach nachylonych pod kątem 45° w stosunku do płaszczyzn głównych. Wartości tych naprężeń równają się promieniowi największego koła Mohra (rys. 1.18 i rys. 1.19):

$$|\tau|_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}, \quad (1.22)$$

a naprężenia normalne na tych płaszczyznach:

$$\sigma_{(\tau)} = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2}. \quad (1.23)$$

1.7. ROZKŁAD TENSORA NAPRĘŻENIA NA AKSJATOR I DEWIATOR

Każdy symetryczny tensor drugiego rzędu można rozłożyć na dwie części (por. także rys. 1.20):

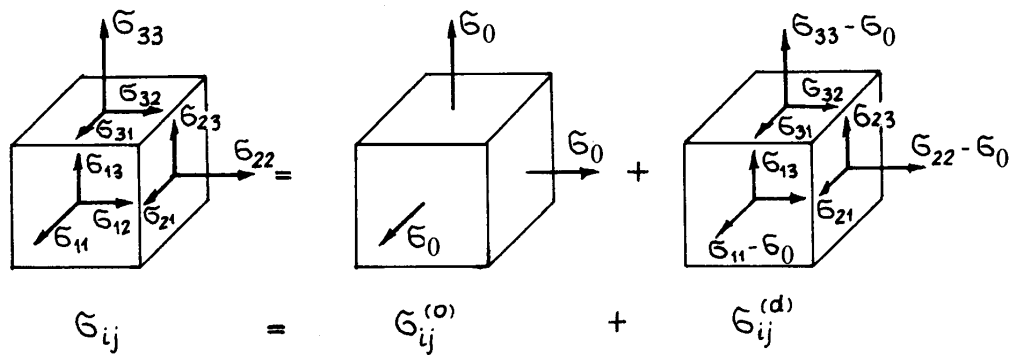
$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(o)} + \sigma_{ij}^{(d)}, \quad (1.24)$$

gdzie

$$\sigma_{ij}^{(o)} = \sigma_0 \delta_{ij}; \quad \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}I_1.$$

W wyrażeniu tym $\sigma_{ij}^{(d)}$ jest *dewiatorem*, a $\sigma_{ij}^{(o)}$ *aksjatozem*. Składowe tych wielkości przedstawiają macierze:

$$\left[\sigma_{ij}^{(o)} \right] = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}, \quad \left[\sigma_{ij}^{(d)} \right] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_0 \end{bmatrix}.$$



Rys.1.20

Aksjator, zwany również tensorem kulistym, odpowiada wszechstronnemu rozciąganiu (ściskaniu) *średnim naprężeniem normalnym* σ_0 . Aksjator jest więc określony tylko przez jedną wartość σ_0 . Cechą charakterystyczną dewiatora jest natomiast zerowanie się pierwszego niezmiennika:

$$\begin{aligned} I_1^{(d)} &= \sigma_{11}^{(d)} + \sigma_{22}^{(d)} + \sigma_{33}^{(d)} = \\ &= \sigma_{11} - \sigma_0 + \sigma_{22} - \sigma_0 + \sigma_{33} - \sigma_0 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} - 3\sigma_0 = 0. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Dewiator ma wobec tego 5 niezależnych współrzędnych, bowiem 6 liczb $\sigma_{ij}^{(d)}$ musi spełniać dodatkowo warunek $I_1^{(d)} = 0$.

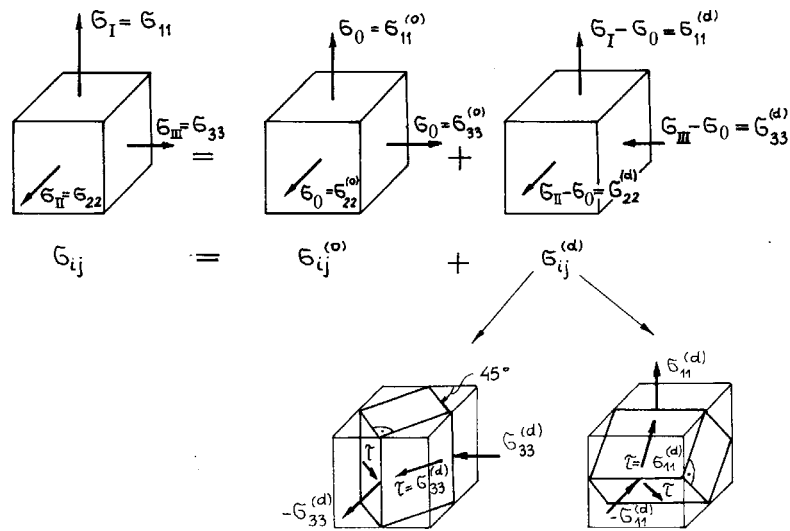
Rozłożmy jeszcze tensor naprężenia zapisany w osiach głównych (por. [32]):

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(d)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22}^{(d)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}^{(d)} \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $I_1^{(d)} = 0$, więc $\sigma_{22}^{(d)} = -\sigma_{11}^{(d)} - \sigma_{33}^{(d)}$. Wobec tego:

$$[\sigma_{ij}^{(d)}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(d)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22}^{(d)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}^{(d)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(d)} & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_{11}^{(d)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_{33}^{(d)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}^{(d)} \end{bmatrix}$$

Widzimy stąd, że dewiator naprężenia można rozłożyć na dwa szczególne przypadki płaskiego stanu naprężenia; są to przypadki *czystego ścinania*. Omówimy je bliżej w p. 1.8.



Rys. 1.21

W posumowaniu stwierdzamy, że każdy stan naprężenia można rozłożyć na aksjator, czyli **wszystostronne równomierne rozciąganie (ściskanie)**, oraz na **dwa czyste ścinania**, których suma daje dewiator (por. rys. 1.21). Trzeba dodać, że rozkład dewiatora na dwa czyste ścinania nie jest jednoznaczny, gdyż można go dokonać kilkoma sposobami.

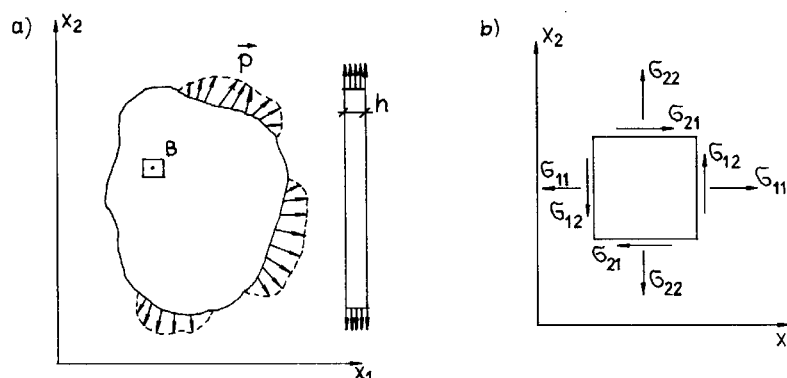
1.8. PŁASKI STAN NAPRĘŻENIA

Płaski stan naprężenia zachodzi wówczas, gdy w każdym punkcie ośrodka na wszystkich płaszczyznach o tym samym wektorze normalnym składowe wektora naprężenia są równe zero. Jeśli przyjmiemy, że płaszczyzny te są prostopadłe do osi x_3 , to $\sigma_{3i} = 0$, a pozostałe składowe tensora naprężenia nie zależą od x_3 . Przykładem takiego stanu jest stan naprężenia w cienkiej tarczy obciążonej siłami leżącymi

w płaszczyźnie tarczy (x_1, x_2) i równomiernie rozłożonymi na jej grubości (rys. 1.22). W takim szczególnym przypadku naprężenia σ_{31} , σ_{32} i σ_{33} są w przybliżeniu równe zero na całej grubości tarczy. Tensor naprężenia ma wówczas postać:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.26)$$

a wszystkie składowe σ_{ij} są tylko funkcjami x_1, x_2 .



Rys. 1.22

W płaskim stanie naprężenia wzory na niezmienniki są następujące:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22}, \\ I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2, \\ I_3 &\equiv 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

Wobec tego równanie charakterystyczne, służące do obliczenia wartości głównych (1.19), upraszcza się do postaci:

$$\sigma^3 - (\sigma_{11} + \sigma_{22})\sigma^2 + (\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2)\sigma = 0.$$

Pierwiastki tego równania – jak łatwo stwierdzić – wynoszą :

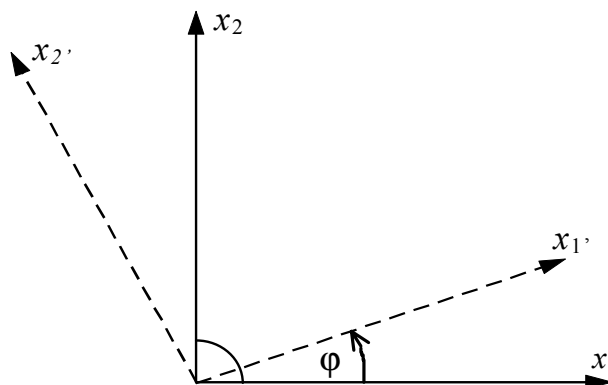
$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{aligned} \right\} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}, \quad \sigma_3 = 0. \quad (1.28)$$

Równania transformacyjne $\sigma_{k'p'} = \sigma_{ij}a_{ik'}a_{jp'}$ warto zapisać nieco inaczej. Po uwzględnieniu na podstawie rys. 1.23, że

$$\begin{aligned} a_{11'} &= \cos \varphi, & a_{12'} &= -\sin \varphi, \\ a_{21'} &= \sin \varphi, & a_{22'} &= \cos \varphi, \end{aligned}$$

mamy:

$$\begin{aligned} \sigma_{1'1'} &= \sigma_{ij}a_{i1'}a_{j1'} = \sigma_{1j}a_{11'}a_{j1'} + \sigma_{2j}a_{21'}a_{j1'} = \sigma_{11}a_{11'}a_{11'} + \sigma_{12}a_{11'}a_{21'} + \\ &+ \sigma_{21}a_{21'}a_{11'} + \sigma_{22}a_{21'}a_{21'} = \sigma_{11} \cos^2 \varphi + 2\sigma_{12} \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_{22} \sin^2 \varphi, \\ \sigma_{2'2'} &= \sigma_{ij}a_{i2'}a_{j2'} = \sigma_{1j}a_{12'}a_{j2'} + \sigma_{2j}a_{22'}a_{j2'} = \sigma_{11}a_{12'}a_{12'} + \sigma_{12}a_{12'}a_{22'} + \\ &+ \sigma_{21}a_{22'}a_{12'} + \sigma_{22}a_{22'}a_{22'} = \sigma_{11} \sin^2 \varphi - 2\sigma_{12} \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_{22} \cos^2 \varphi, \\ \sigma_{1'2'} &= \sigma_{ij}a_{i1'}a_{j2'} = \sigma_{1j}a_{11'}a_{j2'} + \sigma_{2j}a_{21'}a_{j2'} = \sigma_{11}a_{11'}a_{12'} + \sigma_{12}a_{11'}a_{22'} + \\ &+ \sigma_{21}a_{21'}a_{12'} + \sigma_{22}a_{21'}a_{22'} = -\sigma_{11} \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_{12}(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \\ &+ \sigma_{22} \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned}$$



Rys.1.23

Wprowadzenie funkcji kąta podwójnego:

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}, \quad \cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}, \quad 2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi$$

prowadzi do wyniku:

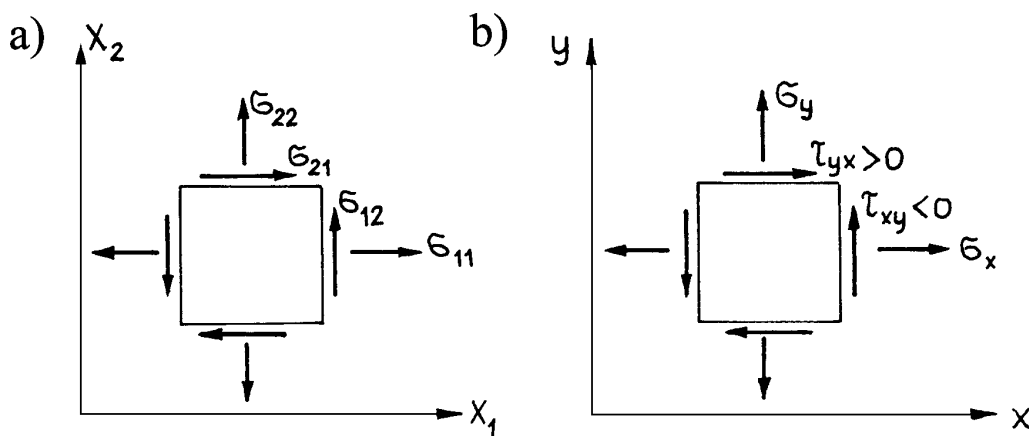
$$\begin{aligned} \sigma_{1'1'} &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\varphi + \sigma_{12} \sin 2\varphi, \\ \sigma_{2'2'} &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\varphi - \sigma_{12} \sin 2\varphi, \\ \sigma_{1'2'} &= -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\varphi + \sigma_{12} \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Z trzeciego równania (1.29) widzimy, że $\sigma_{1'2'} = 0$, gdy $\varphi = \varphi_0$:

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}. \quad (1.30)$$

Kąt φ_0 określa położenie głównych osi naprężeń.

W praktyce inżynierskiej bardzo użyteczne jest stosowanie wspomnianej już wcześniej konstrukcji koła Mohra (1887 rok). Pełna przydatność tej konstrukcji wymaga jednak wprowadzenia **inżynierskiego znakowania naprężeń stycznych**. Notację inżynierską opracowano z myślą, by zasada znakowania – podobnie jak dla naprężeń normalnych – była niezależna od przyjętego układu współrzędnych. Według tej zasady dodatnie naprężenie styczne działa na wycięty element konstrukcji zgodnie z ruchem wskazówek zegara (rys. 1.24b). Znakowanie naprężeń normalnych pozostaje bez zmian („+” rozciąganie, „-” ściskanie). Dodać trzeba, że znakowanie inżynierskie ma sens *tylko* w płaskim stanie naprężenia.



Rys. 1.24

W celu odróżnienia obu zapisów w notacji inżynierskiej wprowadzamy układ osi x, y , a naprężenia – zgodnie z rys. 1.24 – oznaczamy następująco:

$$\sigma_x = \sigma_{11}, \quad \sigma_y = \sigma_{22}, \quad \tau_{xy} = -\sigma_{12}, \quad \tau_{yx} = +\sigma_{21}. \quad (1.31)$$

Stosownie do tych oznaczeń równania (1.28), (1.29) i (1.30) przyjmują postać:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad \sigma_3 = 0, \quad (1.32)$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \tau_{x'y'} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi, \end{array} \right\} \quad (1.33)$$

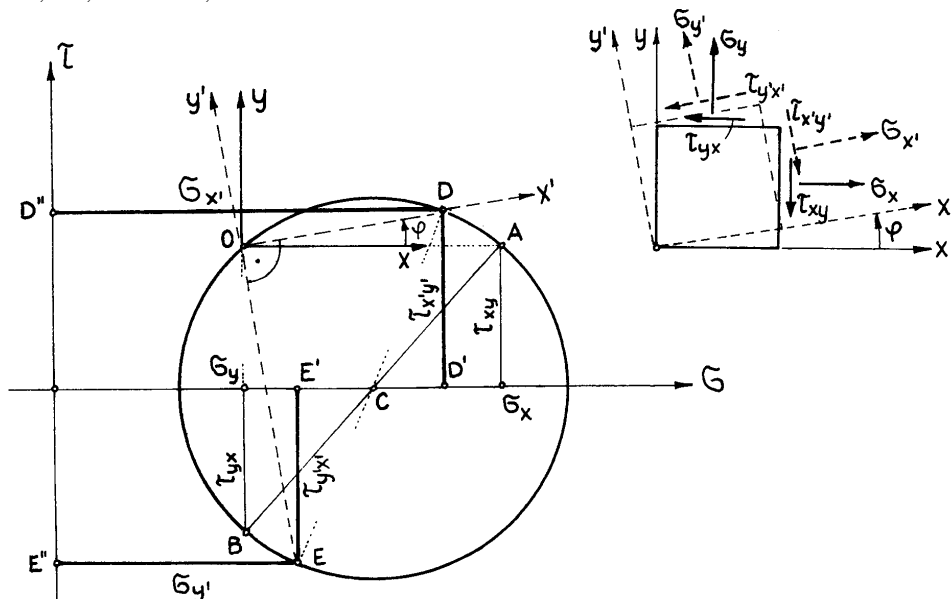
$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (1.34)$$

Koło Mohra wykorzystuje się na ogół do rozwiązania następującego zadania:

W przyjętym układzie osi x, y dane są naprężenia σ_x, σ_y i σ_{xy} . Wyznaczyć naprężenia $\sigma_{x'}$ i $\tau_{x'y'}$ działające na płaszczyznę o normalnej pokrywającej się z osią x' , nachyloną pod kątem φ w stosunku do osi x . Rozwiązanie tego zadania za pomocą koła Mohra (rys. 1.25) przebiega, jak następuje:

- 1) przyjmujemy prostokątny układ osi σ, τ ,
- 2) zaznaczamy punkt A o współrzędnych σ_x, τ_{xy} ,
- 3) zaznaczymy punkt B o współrzędnych $\sigma_x, \tau_{yx} = -\tau_{xy}$,
- 4) znajdujemy środek koła Mohra (punkt C) jako punkt przecięcia odcinka AB z osią σ ,
- 5) zakreślamy okrąg o promieniu $AC = CB$,
- 6) punkt A rzutujemy poziomo (tj. równoległe do osi σ) na przeciwną stronę koła i otrzymujemy punkt O , będący początkiem układu osi x, y (oś x równoległa do osi σ , oś y równoległa do osi τ),
- 7) z początku układu xy wyprowadzamy oś x' nachyloną pod kątem φ ; punkt przecięcia prostej x' z kołem (punkt D) ma poszukiwane współrzędne $\sigma_{x'}, \tau_{x'y'}$.

Naprężenia na płaszczyźnie prostopadłej do drugiej osi układu y' są wyznaczone przez współrzędne punktu E : $\sigma_{y'}, \tau_{y'x'} = -\tau_{x'y'}$.

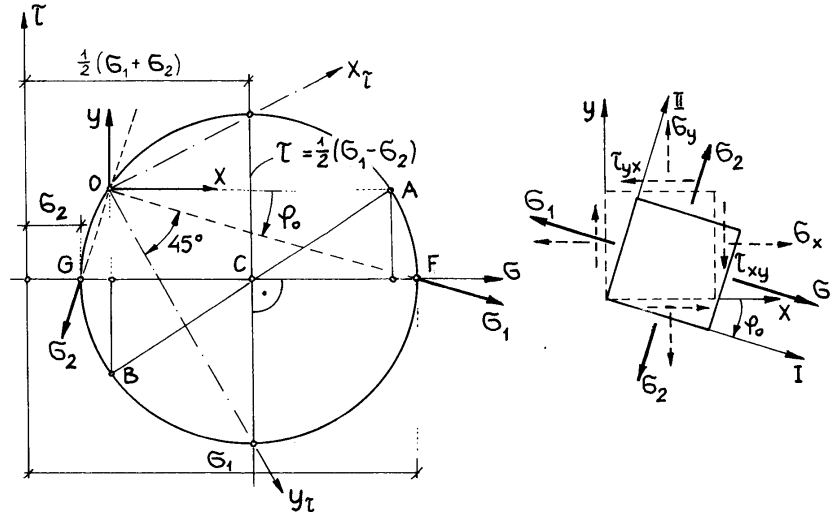


Rys. 1.25

Wyznaczanie naprężeń i kierunków głównych za pomocą koła Mohra (rys. 1.26):

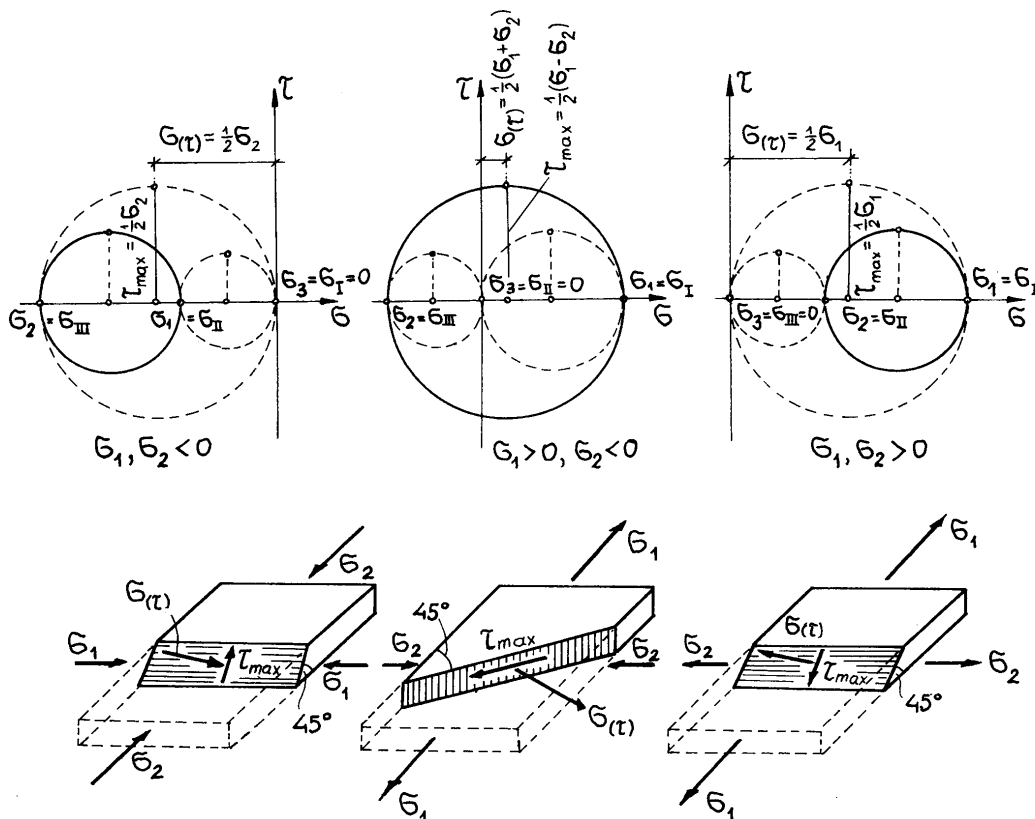
- 1) wykonujemy czynności z poprzedniego zadania (p. 1 ÷ 6),

2) kierunki główne 1 i 2 odpowiadają punktom, w których $\tau = 0$; są to punkty $F(\sigma_1, 0)$ i $G(\sigma_2, 0)$.



Rys. 1.26

Z rysunku 1.26 na podstawie znanego twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym stwierdzamy, że płaszczyzny największych naprężeń stycznych są nachylone pod kątem 45° w stosunku do osi naprężeń głównych. Z łatwością odczytujemy też inne własności tensora naprężenia, przytoczone wcześniej przy omawianiu ogólnego, trójosiowego stanu naprężenia.



Rys. 1.27

Podczas wyznaczania ekstremalnych naprężeń stycznych w płaskim stanie naprężenia trzeba pamiętać o tym, że naprężenia główne muszą być uporządkowane.

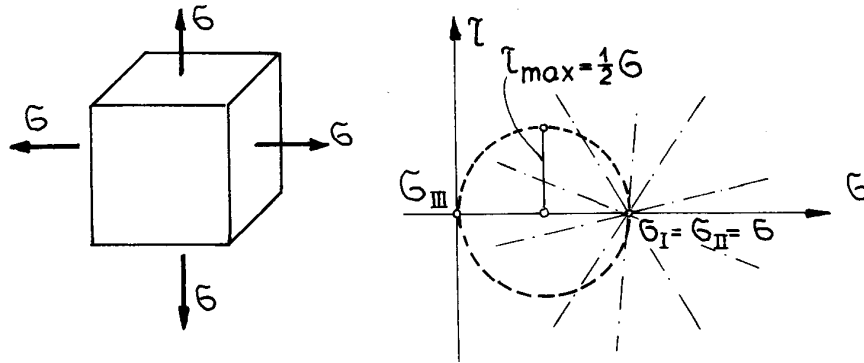
W ogólności mogą wystąpić 3 przypadki przedstawione na rys. 1.27.

Rozważmy obecnie kilka szczególnych przypadków stanu naprężenia.

Dwukierunkowe równomierne rozciąganie (rys. 1.28)

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma, \sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0.$$

W tym przypadku tym na płaszczyźnie x_1, x_2 kierunków głównych jest nieskończenie wiele, a $\tau_{\max} = \sigma/2$.

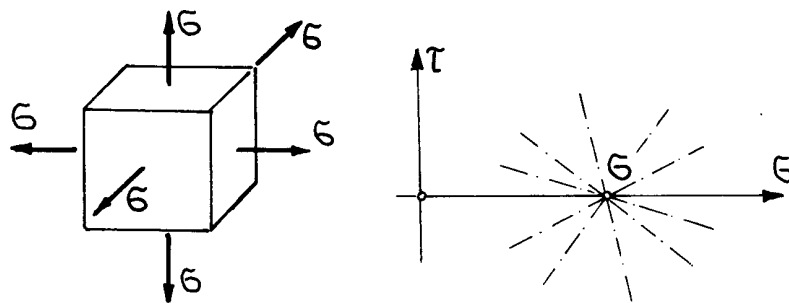


Rys. 1.28

Wszechstronne równomierne rozciąganie (działanie aksjatora)

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma, \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0.$$

Aksjator naprężenia nie wyróżnia żadnego kierunku. Dla każdego układu osi współrzędna aksjatora jest taka sama, a $\tau_{\text{ekstr}} = 0$ (rys. 1.29). Stąd wniosek, że o kierunkach głównych tensora decyduje tylko dewiator.



Rys. 1.29

Czyste ścinanie

$$\sigma_{11} = \sigma_I = \sigma, \quad \sigma_{22} = \sigma_{III} = -\sigma, \quad \sigma_{33} = \sigma_{II} = 0, \quad \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0.$$

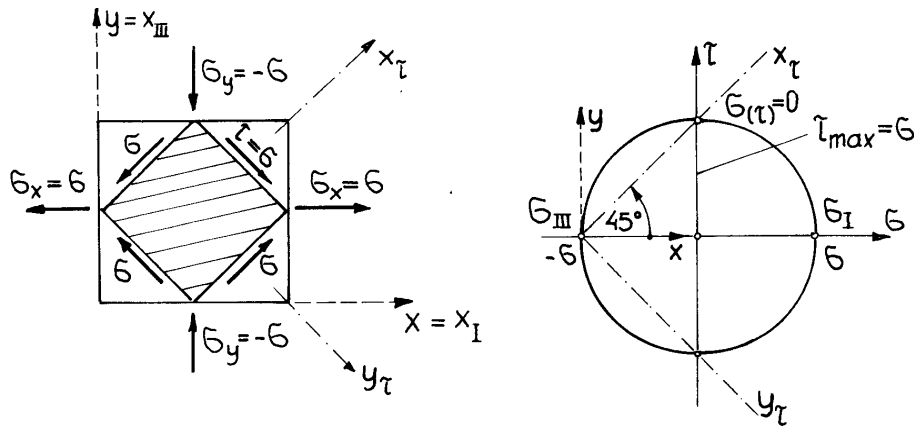
Z koła Mohra (rys. 1.30) wynika, że na płaszczyznach nachylonych pod kątem 45° w stosunku do płaszczyzn naprężeń głównych naprężenia styczne wynoszą:

$$\tau = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{2\sigma}{2} = \sigma,$$

natomiast naprężenia normalne na tych płaszczyznach określa wzór:

$$\sigma_{(\tau)} = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} = 0.$$

Na zakreskowany kwadracik działają więc **tylko** naprężenia styczne. Mówimy wówczas, że występuje w nim **czyste ścinanie**. Łatwo zauważyć, że $I_1 = \sigma_{kk} = 0$. Wnioskujemy stąd, że **czyste ścinanie ma własność dewiatora**.



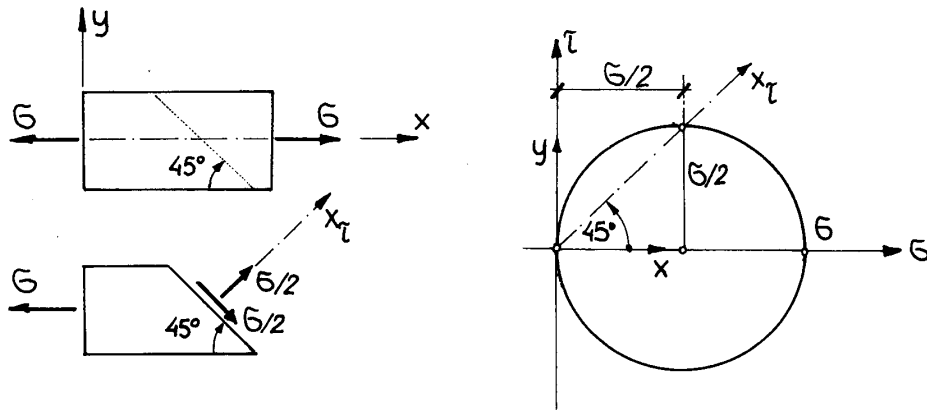
Rys. 1.30

Jednoosiowe rozciąganie

$$\sigma_{11} = \sigma_1 = \sigma, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{II} = \sigma_{III} = 0, \quad \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$$

Przypadek ten ilustruje rysunek 1.31.

Zapamiętajmy, że największe naprężenie styczne przy osiowym rozciąganiu wynosi $\sigma/2$.



Rys. 1.31

1.9 PRZYKŁADY^{*)}**Przykład 1**

W danym punkcie stan naprężenia jest określony przez tensor o współrzędnych:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 1000 \text{ MN/m}^2, & \sigma_{12} &= 300 \text{ MN/m}^2, & \sigma_{13} &= -600 \text{ MN/m}^2, \\ \sigma_{22} &= 500 \text{ MN/m}^2, & \sigma_{23} &= 100 \text{ MN/m}^2, & \sigma_{33} &= -300 \text{ MN/m}^2. \end{aligned}$$

Wyznaczyć wektor naprężenia $\mathbf{f}^{(n)}$ na płaszczyźnie określonej normalną $\mathbf{n} = \frac{2}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{e}_3$.

Rozwiązanie

Tensor naprężenia jest zobrazowany macierzą $[\sigma_{ij}]$ i rys. 1.32.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 1000 & 300 & -600 \\ 300 & 500 & 100 \\ -600 & 100 & -300 \end{bmatrix} \text{ [MN/m}^2\text{]}.$$

Współrzędne wektora $\mathbf{f}^{(n)}$ określimy bezpośrednio z warunków (1.7b):

^{*)} Dużo przykładów zawiera podręcznik [28].

$$f_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j, \quad (i = 1, 2, 3).$$

W naszym zadaniu:

$$n_1 = \frac{2}{3}, \quad n_2 = \frac{2}{3}, \quad n_3 = \frac{1}{3}.$$

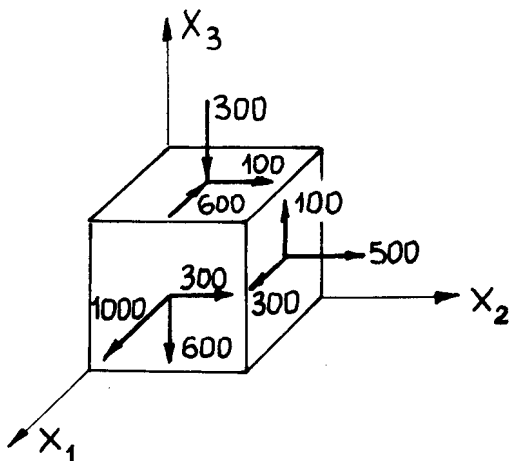
Współrzędne jednostkowego wektora normalnego spełniają zależność (1.3):

$$n_i \cdot n_i = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1.$$

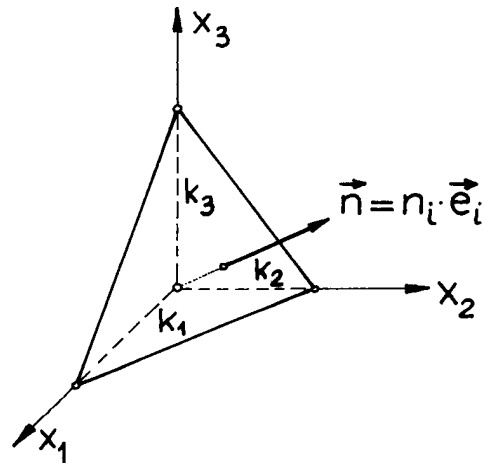
$$\begin{aligned} i=1: f_1^{(n)} &= \sigma_{j1} n_j = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3 = \\ &= 1000 \cdot \frac{2}{3} + 300 \cdot \frac{2}{3} - 600 \cdot \frac{1}{3} = 667 \text{ MN/m}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i=2: f_2^{(n)} &= \sigma_{j2} n_j = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3 = \\ &= 300 \cdot \frac{2}{3} + 500 \cdot \frac{2}{3} + 100 \cdot \frac{1}{3} = 567 \text{ MN/m}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i=3: f_3^{(n)} &= \sigma_{j3} n_j = \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3 = \\ &= -600 \cdot \frac{2}{3} + 100 \cdot \frac{2}{3} - 300 \cdot \frac{1}{3} = -433 \text{ MN/m}^2. \end{aligned}$$



Rys. 1.32



Rys. 1.33

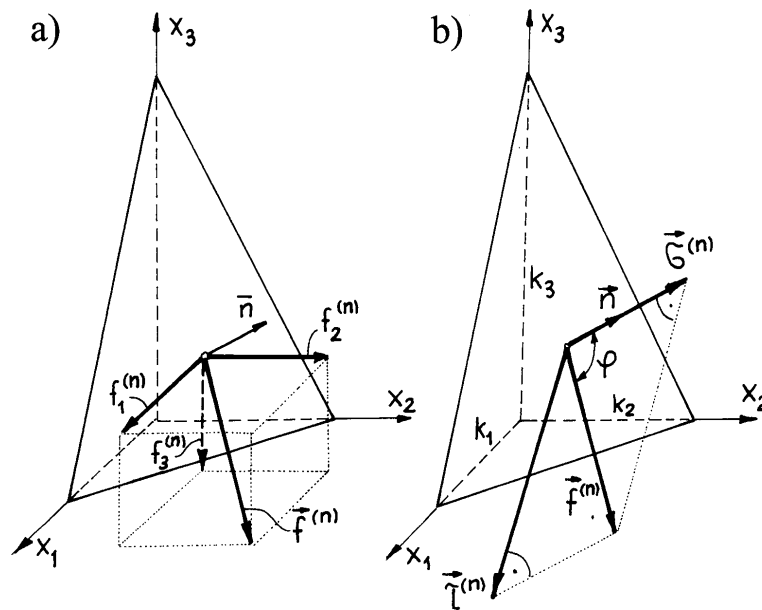
Zaznaczmy jeszcze ślady płaszczyzny i obliczone współrzędne wektora naprężenia. Jeśli dana płaszczyzna odcina na osiach układu krawędzie o długościach k_1 , k_2 , k_3 , to między tymi wartościami a współrzędnymi n_1 , n_2 , n_3 zachodzi zależność (rys. 1.33):

$$n_1 k_1 = n_2 k_2 = n_3 k_3.$$

W naszym zadaniu mamy

$$(2/3)k_1 = (2/3)k_2, \quad (2/3)k_2 = (1/3)k_3, \quad \text{stąd } k_1 = k_2 = k, \quad k_3 = 2k.$$

Rezultaty obliczeń ilustruje rys. 1.34.



Rys. 1.34

Na zakończenie przykładu obliczymy składowe normalną σ i styczną τ . Współrzędną σ jest rzutem wektora $\mathbf{f}^{(n)}$ na kierunek \mathbf{n} , czyli iloczynem skalarnym tych wektorów:

$$\sigma = \mathbf{f}^{(n)} \cdot \mathbf{n} = f_1^{(n)}n_1 + f_2^{(n)}n_2 + f_3^{(n)}n_3 = 667 \cdot \frac{2}{3} + 567 \cdot \frac{2}{3} - 433 \cdot \frac{1}{3} = 678 \text{ MN/m}^2.$$

Współrzędną τ obliczymy ze wzoru Pitagorasa:

$$\tau = \sqrt{|\mathbf{f}^{(n)}|^2 - \sigma^2},$$

przy czym $|\mathbf{f}^{(n)}| = \sqrt{f_j^{(n)}f_j^{(n)}} = \sqrt{667^2 + 567^2 + (-433)^2} = 977 \text{ MN/m}^2$.

Zatem $\tau = \sqrt{977^2 - 678^2} = 703 \text{ MN/m}^2$.

Kąt między kierunkiem $\mathbf{f}^{(n)}$ a wektorem normalnym \mathbf{n} określa zależność:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}^{(n)} = |\mathbf{f}^{(n)}| \cos \varphi = \sigma, \quad \text{stad } \varphi = \arccos(678/977) = 46,04^\circ.$$

Wielkości σ , τ , φ ilustruje rys. 1.34b.

Przykład 2

Dany jest stan naprężenia $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 3x_1x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ 5x_2^2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzić, czy w każdym punkcie są spełnione równania różniczkowe równowagi, jeżeli współrzędne sił masowych określają funkcje :

$$G_1 = -13x_2, \quad G_2 = -2, \quad G_3 = 0.$$

Rozwiązanie

Równanie różniczkowe równowagi określa wzór (1.9b):

$$\sigma_{ji,j} + G_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Po rozpisaniu tego wzoru mamy 3 równania:

$$i = 1: \sigma_{11,1} + \sigma_{21,2} + \sigma_{31,3} + G_1 = 0,$$

$$i = 2: \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{32,3} + G_2 = 0,$$

$$i = 3: \sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} + \sigma_{33,3} + G_3 = 0.$$

Na podstawie macierzy naprężenia σ_{ji} odczytujemy:

$$\sigma_{11} = 3x_1x_2, \quad \sigma_{22} = 0,$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 5x_2^2, \quad \sigma_{32} = \sigma_{23} = 2x_3,$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = 0, \quad \sigma_{33} = 0.$$

Obliczymy pochodne cząstkowe występujące w równaniach równowagi:

$$\sigma_{11,1} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = 3x_2, \quad \sigma_{21,2} = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} = 10x_2, \quad \sigma_{31,3} = 0,$$

$$\sigma_{12,1} = 0, \quad \sigma_{22,2} = 0, \quad \sigma_{32,3} = \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} = 2,$$

$$\sigma_{13,1} = 0, \quad \sigma_{23,2} = 0, \quad \sigma_{33,3} = 0.$$

Po podstawieniu powyższych rezultatów oraz funkcji G_i do równań równowagi otrzymujemy:

$$i = 1: 3x_2 + 10x_2 + 0 - 13x_2 = 0,$$

$$i = 2: 0 + 0 + 2 - 2 = 0,$$

$$i = 3: 0 + 0 + 0 + 0 = 0.$$

Stwierdzamy więc, że funkcje $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ oraz gęstość sił masowych $G_i(x_1, x_2, x_3)$ spełniają w każdym punkcie warunki równowagi.

Przykład 3

Stan naprężenia w danym punkcie jest opisany macierzą σ odniesioną do układu osi prostokątnych x_1, x_2, x_3 :

$$\sigma = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć współrzędne macierzy σ' , związanej z układem osi obróconych x_1', x_2', x_3' , opisanych macierzą transformacji $[a_{k'i}]$:

$$[a_{k'i}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie

Sprawdzimy najpierw, czy wersory w układzie osi obróconych spełniają warunki ortogonalności (1.12):

$$a_{ik'} \cdot a_{ip'} = \delta_{k'p'}.$$

W tym celu trzeba wymnożyć przez siebie i zsumować odpowiednie wiersze macierzy $[a_{k'i}]$:

$k' = p' = 1'$ (mnożymy pierwszą kolumnę przez siebie):

$$\delta_{1'1} = a_{1'1}a_{1'1} + a_{2'1}a_{2'1} + a_{3'1}a_{3'1} = 0 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1,$$

$k' = 1', p' = 2'$ (kolumna 1' \times kolumna 2'):

$$\delta_{1'2'} = \delta_{2'1'} = a_{1'1}a_{1'2'} + a_{2'1}a_{2'2'} + a_{3'1}a_{3'2'} = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0,$$

$k' = 1', p' = 3'$ (kolumna 1' \times kolumna 3'):

$$\delta_{1'3'} = \delta_{3'1'} = 0 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0,$$

$k' = 2', p' = 2'$ (kolumna 2' \times kolumna 2'):

$$\delta_{2'2'} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1,$$

$k' = 2', p' = 3'$ (kolumna 2' \times kolumna 3'):

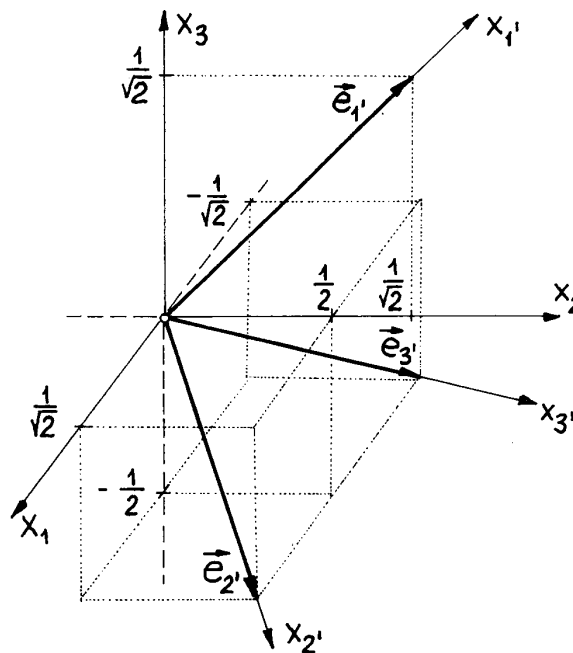
$$\delta_{2'3'} = \delta_{3'2'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0,$$

$k' = p' = 3'$ (kolumna 3' \times kolumna 3'):

$$\delta_{3'3'} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1.$$

Warunki ortogonalności są zatem spełnione. Spełnione muszą być również warunki ortogonalności wierszów w układzie nie obróconym. Sprawdzenie polega tutaj

na wymnożeniu kolumn macierzy $[a_{ki}]$: $a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}$. Wzajemne położenie obu układów współrzędnych ilustruje rysunek 1.35.



Rys. 1.35

Do wyznaczenia macierzy σ' o współrzędnych $\sigma_{k'p'}$ wykorzystujemy wzory transformacyjne (1.15a).

$$\begin{aligned}\sigma_{k'p'} &= \sigma_{ij} a_{ik'} a_{jp'} = \\ &= \sigma_{1j} a_{1k'} a_{jp'} + \sigma_{2j} a_{2k'} a_{jp'} + \sigma_{3j} a_{3k'} a_{jp'} = \\ &= \sigma_{11} a_{1k'} a_{1p'} + \sigma_{12} a_{1k'} a_{2p'} + \sigma_{13} a_{1k'} a_{3p'} + \\ &+ \sigma_{21} a_{2k'} a_{1p'} + \sigma_{22} a_{2k'} a_{2p'} + \sigma_{23} a_{2k'} a_{3p'} + \\ &+ \sigma_{31} a_{3k'} a_{1p'} + \sigma_{32} a_{3k'} a_{2p'} + \sigma_{33} a_{3k'} a_{3p'}.\end{aligned}$$

Ponieważ $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$, zaś $\sigma_{11} = 2, \sigma_{12} = -2, \sigma_{22} = 3, \sigma_{33} = -3$, więc

$$\sigma_{k'p'} = 2a_{1k'} a_{1p'} - 2a_{1k'} a_{2p'} - 2a_{2k'} a_{1p'} + 3a_{2k'} a_{2p'} - 3a_{3k'} a_{3p'}. \text{ Wobec tego:}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{1'1'} &= 2(a_{11'})^2 - 2a_{11'} a_{21'} - 2a_{21'} a_{11'} + 3(a_{21'})^2 - 3(a_{31'})^2 = \\ &= 2 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + 3 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - 3 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{1'2'} &= 2a_{11'} a_{12'} - 2a_{11'} a_{22'} - 2a_{21'} a_{12'} + 3a_{21'} a_{12'} - 3a_{31'} a_{32'} = \\ &= 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = 1,1213,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{1'3'} &= 2a_{11'} a_{13'} - 2a_{11'} a_{23'} - 2a_{21'} a_{13'} + 3a_{21'} a_{13'} - 3a_{31'} a_{33'} = \\ &= 2 \cdot 0 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = 3,1213,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{2'2'} &= 2(a_{12'})^2 - 2a_{12'} a_{22'} - 2a_{22'} a_{12'} + 3(a_{22'})^2 - 3(a_{32'})^2 = \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 3 \left(\frac{1}{2} \right)^2 - 3 \left(-\frac{1}{2} \right)^2 = -0,4142,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{2'3'} &= 2a_{12'} a_{13'} - 2a_{12'} a_{23'} - 2a_{22'} a_{13'} + 3a_{22'} a_{13'} - 3a_{32'} a_{33'} = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{2} \right) - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \\ &- 3 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = -1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{3'3'} &= 2(a_{13'})^2 - 2a_{13'} a_{23'} - 2a_{23'} a_{13'} + 3(a_{23'})^2 - 3(a_{33'})^2 = \\ &= 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 3 \left(\frac{1}{2} \right)^2 - 3 \left(-\frac{1}{2} \right)^2 = 2,4142.\end{aligned}$$

Ponieważ $\sigma_{k'p'} = \sigma_{p'k'}$, więc macierz σ' przyjmuje postać:

$$[\sigma_{k'p'}] = \sigma' = \begin{bmatrix} 0 & 1,1213 & 3,1213 \\ 1,1213 & -0,4142 & -1 \\ 3,1213 & -1 & 2,4142 \end{bmatrix}.$$

Potwierdzeniem poprawności otrzymanego rezultatu będą identyczne wartości niezmienników stanu naprężenia. Dla macierzy σ mamy:

$$I_1 = 2 + 3 - 3 = 2,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 6 + 6 - (-2) \cdot (-2) = -13,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot (-3) + (-2) \cdot 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 3 \cdot 0 - (-3) \cdot (-2) \cdot (-2) - 2 \cdot 0 \cdot 0 = -6.$$

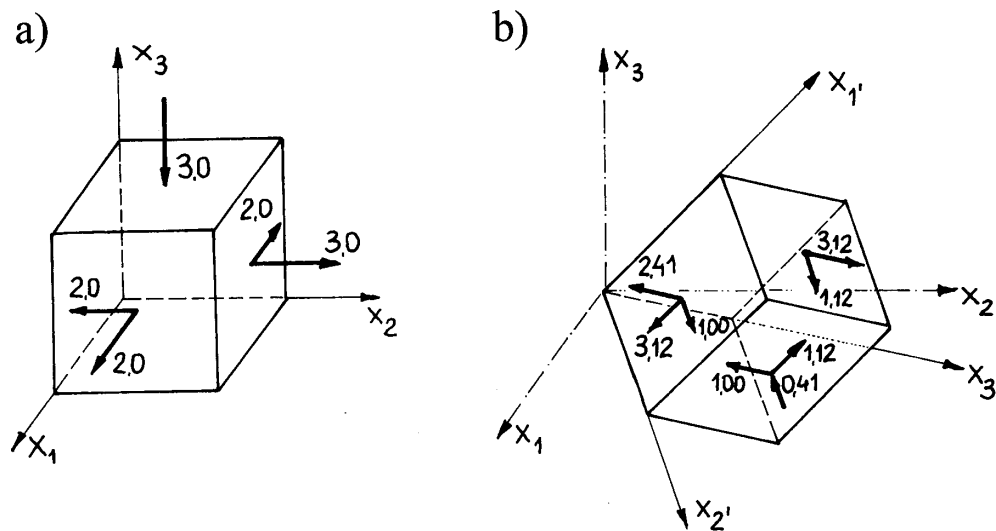
Dla macierzy σ' otrzymujemy:

$$I_1 = 0 - 0,4142 + 2,4142 = 2,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} -0,4142 & -1 \\ -1 & 2,4142 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3,1213 \\ 3,1213 & 2,4142 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1,1213 \\ 1,1213 & -0,4142 \end{vmatrix} = -2 - 3,1213^2 - 1,1213^2 \approx -13,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1,1213 & 3,1213 \\ 1,1213 & -0,4142 & -1 \\ 3,1213 & -1 & 2,4142 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-0,4142) \cdot 2,4142 + (-1) \cdot 1,1213 \cdot 3,1213 \cdot 2 - (-0,4142) \cdot 2 - (-0,4142) \cdot 3,1213^2 - (-1) \cdot (-1) \cdot 0 - 2,4142 \cdot 1,1213^2 \approx -6.$$

Rezultaty obliczeń ilustruje rys. 1.36, na którym uwidoczniło kostki naprężeń w obu układach.



Rys. 1.36

Przykład 4

Dany jest tensor naprężenia o współrzędnych:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 100 \text{ MN/m}^2, & \sigma_{12} &= 30 \text{ MN/m}^2, & \sigma_{13} &= -60 \text{ MN/m}^2, \\ \sigma_{22} &= 50 \text{ MN/m}^2, & \sigma_{23} &= 10 \text{ MN/m}^2, & \sigma_{33} &= -30 \text{ MN/m}^2, \\ & & & & & (1 \text{ MN/m}^2 = 10 \text{ kG/cm}^2). \end{aligned}$$

Wyznaczyć wartości i kierunki główne tensora.

Rozwiązanie

Tensor naprężenia zapiszemy w postaci macierzy:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{vmatrix} 100 & 30 & -60 \\ 30 & 50 & 10 \\ -60 & 10 & -30 \end{vmatrix} \text{ [MN/m}^2\text{]}.$$

Obliczamy niezmienniki (wzory 1.20):

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 120 \text{ MN/m}^2,$$

$$I_2 = \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2 + \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{13}^2 + \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = -4100(\text{MN/m}^2)^2,$$

$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 = -349000(\text{MN/m}^2)^3.$$

Równanie charakterystyczne (1.19):

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0.$$

Poszukujemy pierwiastków równania III stopnia. Równanie o postaci (por. Bronsztejn, Siemiendiajew [6]):

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

ma 3 rozwiązania:

$$x_i = y_i - \frac{b}{3a} \quad (i = 1, 2, 3),$$

przy czym charakter rozwiązania zależy od wartości wyróżnika D :

$$D = q^2 + p^3, \quad \text{gdzie } q = \left(\frac{b}{3a}\right)^3 - \frac{bc}{6a^2} + \frac{d}{2a}, \quad p = \frac{3ac - b^2}{9a^2}.$$

Jeśli:

$D < 0$, to równanie ma 3 pierwiastki rzeczywiste,

$D > 0$, to równanie ma 1 pierwiastek rzeczywisty i 2 zespolone,

$D = 0$, to równanie ma 2 pierwiastki rzeczywiste w tym jeden dwukrotny.

Przy wyznaczaniu wartości głównych tenora naprężenia wyróżnik D jest zawsze mniejszy od zera. Wówczas dalsze obliczenia przebiegają według następujących wzorów :

$$r = \text{sgn}(q)\sqrt{|p|}, \quad \cos(3\omega) = \frac{q}{r^3},$$

$$y_1 = -2r \cos \omega, \quad y_2 = 2r \cos(60^\circ - \omega), \quad y_3 = 2r \cos(60^\circ + \omega).$$

W naszym zadaniu mamy:

$$p = \frac{3I_2 - I_1^2}{9} = -2967 (\text{MN/m}^2)^2,$$

$$q = \left(\frac{-I_1}{3}\right)^3 + \frac{I_1 I_2}{6} - \frac{I_3}{2} = 28500 (\text{MN/m}^2)^3; \quad D = q^2 + p^3 = -2,53 \cdot 10^{10} (\text{MN/m}^2)^6;$$

$$\frac{b}{3a} = -\frac{I_1}{3} = -\sigma_0 = -40 \text{ MN/m}^2, \quad \text{sgn}(q) = +1,$$

$$r = +1 \cdot \sqrt{|-2967|} = 54,47 \text{ MN/m}^2, \quad \cos(3\omega) = \frac{q}{r^3} = 0,176347 \rightarrow \omega = 26,614^\circ,$$

$$y_1 = -2 \cdot 54,47 \cdot \cos(26,614^\circ) = -97,4 \text{ MN/m}^2,$$

$$y_2 = 2 \cdot 54,47 \cdot \cos(60^\circ - 26,614^\circ) = 91,0 \text{ MN/m}^2,$$

$$y_3 = 2 \cdot 54,47 \cdot \cos(60^\circ + 26,614^\circ) = 6,4 \text{ MN/m}^2.$$

Nieuporządkowane naprężenia główne wynoszą:

$$\sigma_1 = y_1 + \sigma_0 = -97,4 + 40 = -57,4 \text{ MN / m}^2;$$

$$\sigma_2 = y_2 + \sigma_0 = 91,0 + 40 = 131,0 \text{ MN / m}^2;$$

$$\sigma_3 = y_3 + \sigma_0 = 6,4 + 40 = 46,4 \text{ MN / m}^2.$$

Po uporządkowaniu ($\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$) otrzymujemy poszukiwane wartości główne:

$$\sigma_I = \sigma_2 = 131,0 \text{ MN / m}^2, \quad \sigma_{II} = \sigma_3 = 46,4 \text{ MN / m}^2, \quad \sigma_{III} = \sigma_1 = -57,4 \text{ MN / m}^2.$$

kierunki główne możemy wyznaczyć z równań (1.17) i (1.18):

$$(\sigma_{11} - \sigma)n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 = 0,$$

$$\sigma_{12}n_1 + (\sigma_{22} - \sigma)n_2 + \sigma_{32}n_3 = 0,$$

$$\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + (\sigma_{33} - \sigma)n_3 = 0,$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.$$

Do wyznaczenia któregośkolwiek kierunku głównego wykorzystamy pierwsze dwa równania oraz równanie czwarte. Wprowadzimy pomocnicze niewiadome λ_2 i λ_3 :

$$\lambda_2 = \frac{n_2}{n_1}, \quad \lambda_3 = \frac{n_3}{n_1}.$$

Po podzieleniu pierwszych dwóch równań przez n_1 otrzymujemy układ dwóch równań o dwóch niewiadomych λ_2 i λ_3 :

$$(a) \quad \begin{cases} \sigma_{21}\lambda_2 + \sigma_{31}\lambda_3 = \sigma - \sigma_{11} \\ (\sigma_{22} - \sigma)\lambda_2 + \sigma_{32}\lambda_3 = -\sigma_{12}, \end{cases}$$

$$(b) \quad \text{skąd} \quad \begin{cases} \lambda_2 = [(\sigma - \sigma_{11})\sigma_{32} + \sigma_{12} \cdot \sigma_{13}] / W \\ \lambda_3 = [-\sigma_{12}^2 + (\sigma - \sigma_{11})(\sigma - \sigma_{22})] / W \end{cases}$$

gdzie $W = \sigma_{21}\sigma_{32} + \sigma_{31}(\sigma - \sigma_{22})$.

Z czwartego równania obliczymy n_1 :

$$(c) \quad n_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}},$$

co pozwala wyznaczyć pozostałe współrzędne n_2 i n_3 :

$$(d) \quad n_2 = \lambda_2 n_1, \quad n_3 = \lambda_3 n_1.$$

Podstawiając we wzorach (b) kolejno $\sigma = \sigma_I$, $\sigma = \sigma_{II}$ oraz $\sigma = \sigma_{III}$ otrzymamy współrzędne $n_1^{(I)}, n_2^{(I)}, n_3^{(I)}$; $n_1^{(II)}, n_2^{(II)}, n_3^{(II)}$ oraz $n_1^{(III)}, n_2^{(III)}, n_3^{(III)}$. Wyniki obliczeń zestawiono w tablicy:

	σ [MN/m ²]	λ_2	λ_3	n_1	n_2	n_3
I	131,0	0,3270	-0,3524	-0,9012	-0,2947	0,3176
II	46,4	-4,5446	-1,3796	0,2060	-0,9364	-0,2842
III	-57,4	-0,5003	2,3730	0,3812	-0,1907	0,9046

Sprawdzamy ortogonalność:

$$\delta_{I,II} = n_i^{(I)} \cdot n_i^{(II)} = n_1^{(I)} \cdot n_1^{(II)} + n_2^{(I)} \cdot n_2^{(II)} + n_3^{(I)} \cdot n_3^{(II)} = -0,00005 \approx 0,$$

$$\delta_{I,III} = n_i^{(I)} \cdot n_i^{(III)} = n_1^{(I)} \cdot n_1^{(III)} + n_2^{(I)} \cdot n_2^{(III)} + n_3^{(I)} \cdot n_3^{(III)} = 0,00004 \approx 0,$$

$$\delta_{II,III} = n_i^{(II)} \cdot n_i^{(III)} = n_1^{(II)} \cdot n_1^{(III)} + n_2^{(II)} \cdot n_2^{(III)} + n_3^{(II)} \cdot n_3^{(III)} = 0,00001 \approx 0,$$

$$\delta_{I,I} = n_i^{(I)} \cdot n_i^{(I)} = n_1^{(I)^2} + n_2^{(I)^2} + n_3^{(I)^2} = 0,99998 \approx 1,$$

$$\delta_{II,II} = n_i^{(II)} \cdot n_i^{(II)} = n_1^{(II)^2} + n_2^{(II)^2} + n_3^{(II)^2} = 1,0000506 \approx 1,$$

$$\delta_{III,III} = n_i^{(III)} \cdot n_i^{(III)} = n_1^{(III)^2} + n_2^{(III)^2} + n_3^{(III)^2} = 0,99998 \approx 1.$$

Napężenia główne ilustruje macierz napężenia:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 131,0 & 0 & 0 \\ 0 & 46,4 & 0 \\ 0 & 0 & -57,4 \end{bmatrix}.$$

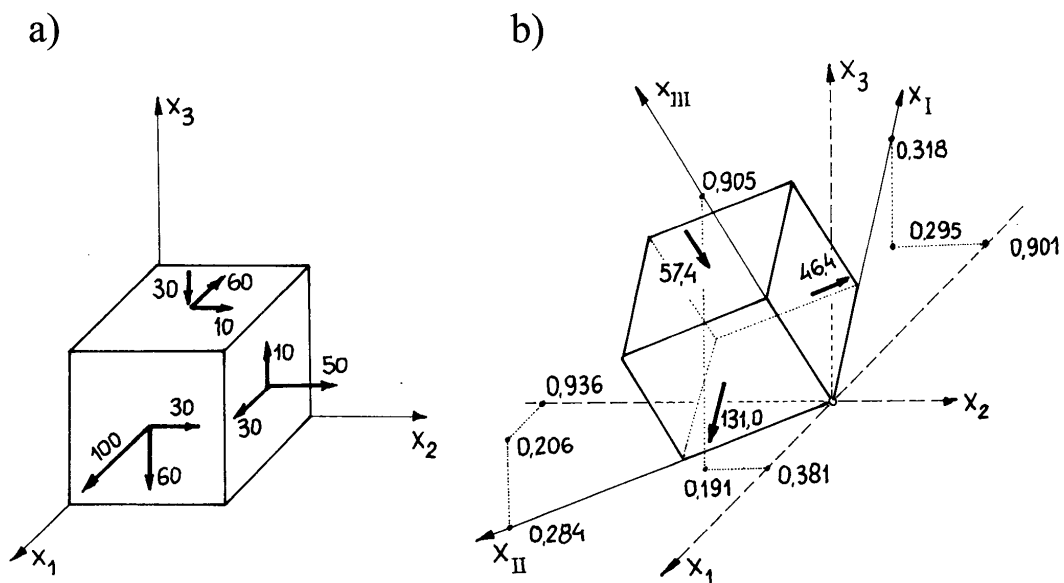
Dla kompletu sprawdzimy jeszcze wartości niezmienników. Obliczymy je obecnie w układzie osi głównych:

$$I_1 = 131,0 + 46,4 - 57,4 = 120 \text{ MN/m}^2.$$

$$I_2 = 46,4 \cdot (-57,4) + 131,0 \cdot (-57,4) + 131,0 \cdot 46,4 = -4104 \approx -4100 \text{ (MN/m}^2)^2,$$

$$I_3 = 131,0 \cdot 46,4 \cdot (-57,4) = -348900 \approx -349000 \text{ (MN/m}^2)^3.$$

Graficzną ilustrację tensora wyjściowego oraz usytuowanie kierunków głównych i kostkę naprężeń głównych przedstawia rys. 1.37.



Rys. 1.37

Przykład 5

Rozłożyć tensor naprężenia z przykładu 4. na aksjator i dewiator. Obliczyć wartości główne dewiatora. Określić ekstremalne naprężenia styczne.

Rozwiązanie

Rozkładu na aksjator i dewiator dokonujemy w następujący sposób:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 100 & 30 & -60 \\ 30 & 50 & 10 \\ -60 & 10 & -30 \end{bmatrix}, \quad \sigma_0 = \frac{I_1}{3} = \frac{120}{3} = 40 \text{ MN/m}^2,$$

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 60 & 30 & -60 \\ 30 & 10 & 10 \\ -60 & 10 & -70 \end{bmatrix},$$

$$[\sigma_{ij}] = [\sigma_{ij}^{(o)}] + [\sigma_{ij}^{(d)}].$$

Obliczamy niezmienniki dewiatora:

$$I_1^{(d)} = 60 + 10 - 70 = 0,$$

$$I_2^{(d)} = 10 \cdot (-70) - 102 + 60 \cdot (-70) - (-60)^2 + 60 \cdot 10 - 30^2 = -8900 \text{ (MN/m}^2)^2,$$

$$I_3^{(d)} = 60 \cdot 10 \cdot (-70) + 30 \cdot 10 \cdot (-60) \cdot 2 - (-60)^2 \cdot 10 - 30^2 \cdot (-70) - 10^2 \cdot 60 = -57000 \text{ (MN/m}^2)^3.$$

Wartości główne dewiatora wyznaczamy z zależności:

$$p = \frac{I_2^{(d)}}{3} = -\frac{8900}{3} = -2967 \text{ (MN/m}^2)^2, \quad q = -\frac{I_3^{(d)}}{2} = 28500 \text{ (MN/m}^2)^3.$$

Zwróćmy uwagę na to, że obliczone wyżej wartości są identyczne z wartościami obliczonymi dla tensora wyjściowego (por. przykład 4).

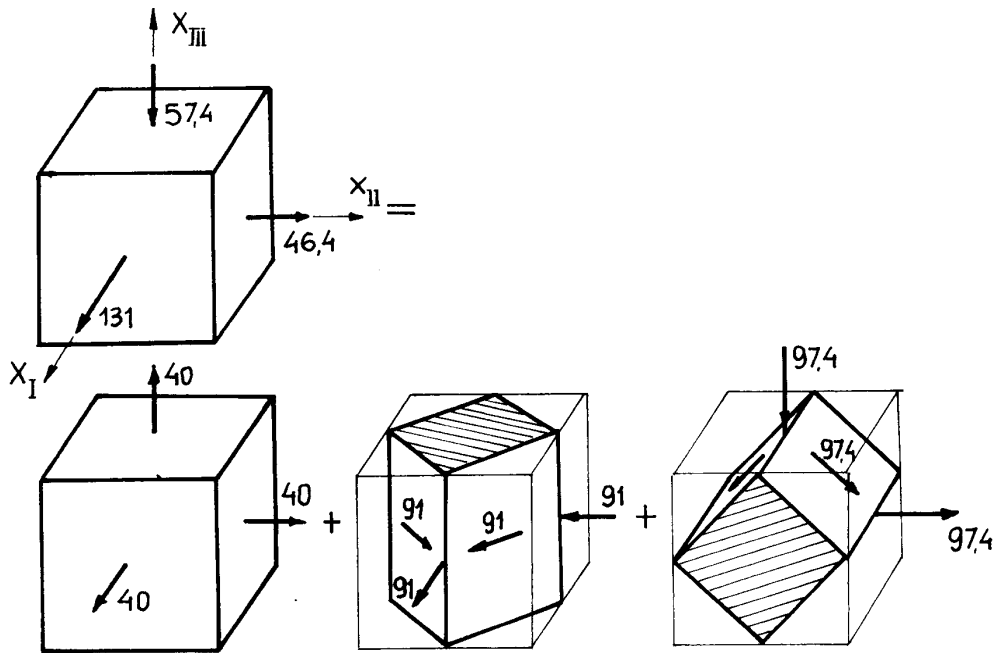
Ponieważ
$$\frac{I_1^{(d)}}{3} = \sigma_0^{(d)} = 0,$$

więc

$$\sigma_1^{(d)} = y_1 = -97,4 \text{ MN/m}^2 = \sigma_{\text{III}}^{(d)} = \sigma_{\text{III}} - \sigma_0,$$

$$\sigma_2^{(d)} = y_2 = 91,0 \text{ MN/m}^2 = \sigma_{\text{I}}^{(d)} = \sigma_{\text{I}} - \sigma_0,$$

$$\sigma_3^{(d)} = y_3 = 6,4 \text{ MN/m}^2 = \sigma_{\text{II}}^{(d)} = \sigma_{\text{II}} - \sigma_0.$$



Rys.1.38

Ponieważ wszystkie współczynniki w układzie czterech równań, z którego wyznacza się kierunki główne, są takie same jak w tensorze pełnym, więc i **kierunki główne dewiatora są identyczne z kierunkami głównymi tensora pełnego** (por. przykład 4). Równość współczynników wynika z definicji dewiatora:

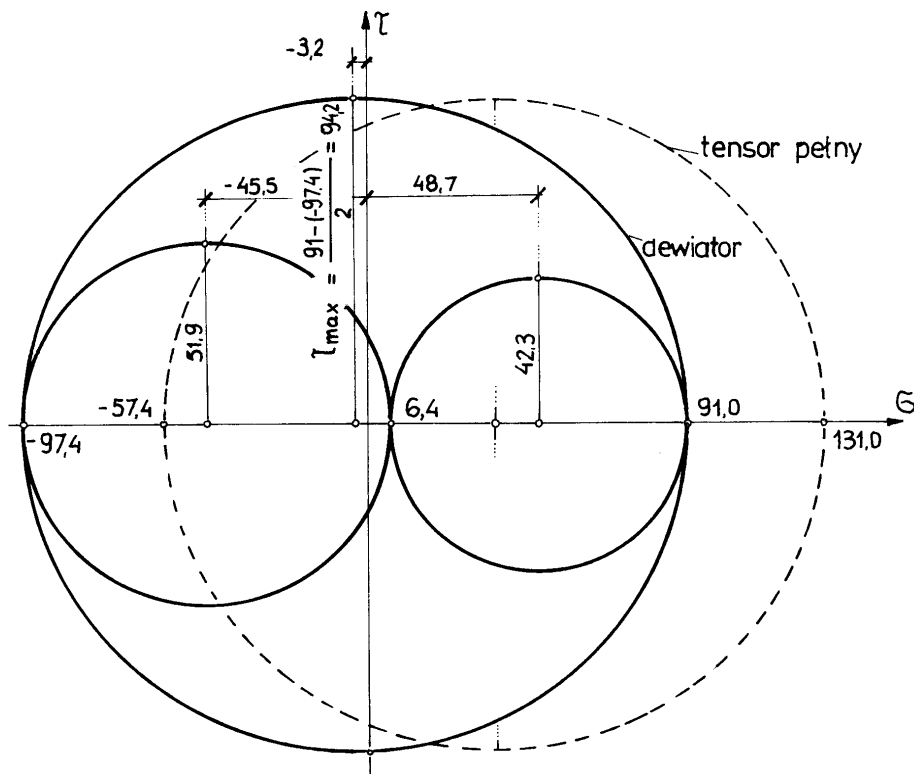
$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(d)} - \sigma^{(d)} &= \sigma_{11} - \sigma_0 - (\sigma - \sigma_0) = \sigma_{11} - \sigma, \\ \sigma_{22}^{(d)} - \sigma^{(d)} &= \sigma_{22} - \sigma, \\ \sigma_{33}^{(d)} - \sigma^{(d)} &= \sigma_{33} - \sigma.\end{aligned}$$

Podziału dewiatora na dwa czyste ścinania dokonamy w głównych osiach naprężenia:

$$\begin{aligned}\left[\sigma_{ij}^{(d)}\right] &= \begin{bmatrix} 91,0 & 0 & 0 \\ 0 & 6,4 & 0 \\ 0 & 0 & -97,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 91,0 & 0 & 0 \\ 0 & -91,0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 97,4 & 0 \\ 0 & 0 & -97,4 \end{bmatrix}, \\ \left[\sigma_{ij}^{(d)}\right] &= \left[\sigma_{ij}'^{(d)}\right] + \left[\sigma_{ij}''^{(d)}\right].\end{aligned}$$

Tensorzy składowe $\sigma_{ij}'^{(d)}$ i $\sigma_{ij}''^{(d)}$ przedstawiają dwa czyste ścinania.

Tak więc pełny tensor z przykładu 4. można w osiach głównych naprężeń przedstawić jako sumę ak-sjatora (wszechstronnego rozciągania) oraz dwóch czystych ścinań. Ilustracją tego stwierdzenia jest rys. 1.38.



Rys. 1.39

Rysunek 1.39 przedstawia koła naprężeń dla dewiatora (linie ciągłe). Linia przerywaną zaznaczono położenie największego koła Mohra odpowiadającego tensorowi pełnemu z przykładu 4. Analizując wyniki przykładów 4. i 5. widzimy, że najistotniejsze cechy stanu naprężenia opisuje dewiator. Decyduje on o kierunkach głównych i wartościach maksymalnych naprężeń stycznych. Należy zwrócić uwagę, że z fizycznego punktu widzenia poza naprężeniami głównymi istotne są maksymalne naprężenia styczne. Wartości naprężeń stycznych występujące przy rozkładzie dewiatora na dwa czyste ścinania przytacza się jedynie ze względów pojęciowych; wartości te nie mają żadnego sensu fizycznego.

Przykład 6

Dany jest płaski stan naprężenia określony w układzie osi x_1, x_2 następującymi składowymi: $\sigma_{11} = -200 \text{ MN/m}^2$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = -100 \text{ MN/m}^2$, $\sigma_{22} = 300 \text{ MN/m}^2$. Wyznaczyć naprężenia główne, maksymalne naprężenia styczne i położenie osi naprężeń głównych za pomocą metod analitycznej i wykresnej (koło Mohra).

Rozwiązanie

W metodzie analitycznej naprężenia główne obliczamy ze wzoru (1.28):

$$\sigma_{1,2} = \frac{-200 + 300}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-200 - 300}{2}\right)^2 + (-100)^2} = 50 \pm 269,2,$$

$$\sigma_1 = 50 + 269,2 = 319,2 \text{ MN/m}^2, \quad \sigma_2 = 50 - 269,2 = -219,2 \text{ MN/m}^2, \quad \sigma_3 = 0.$$

Sprawdzamy wartości niezmienników:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} = -200 + 300 = \sigma_1 + \sigma_2 = 319,2 - 219,2 = 100,0 \text{ MN/m}^2,$$

$$I_2 = \sigma_{11} \cdot \sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = (-200) \cdot 300 - (-100)^2 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 = 319,2 \cdot (-219,2) = -70000 \text{ (MN/m}^2)^2.$$

Uporządkowane naprężenia główne wynoszą:

$$\sigma_I = \sigma_1 = 319,2 \text{ MN/m}^2, \quad \sigma_{II} = \sigma_3 = 0, \quad \sigma_{III} = \sigma_2 = -219,2 \text{ MN/m}^2.$$

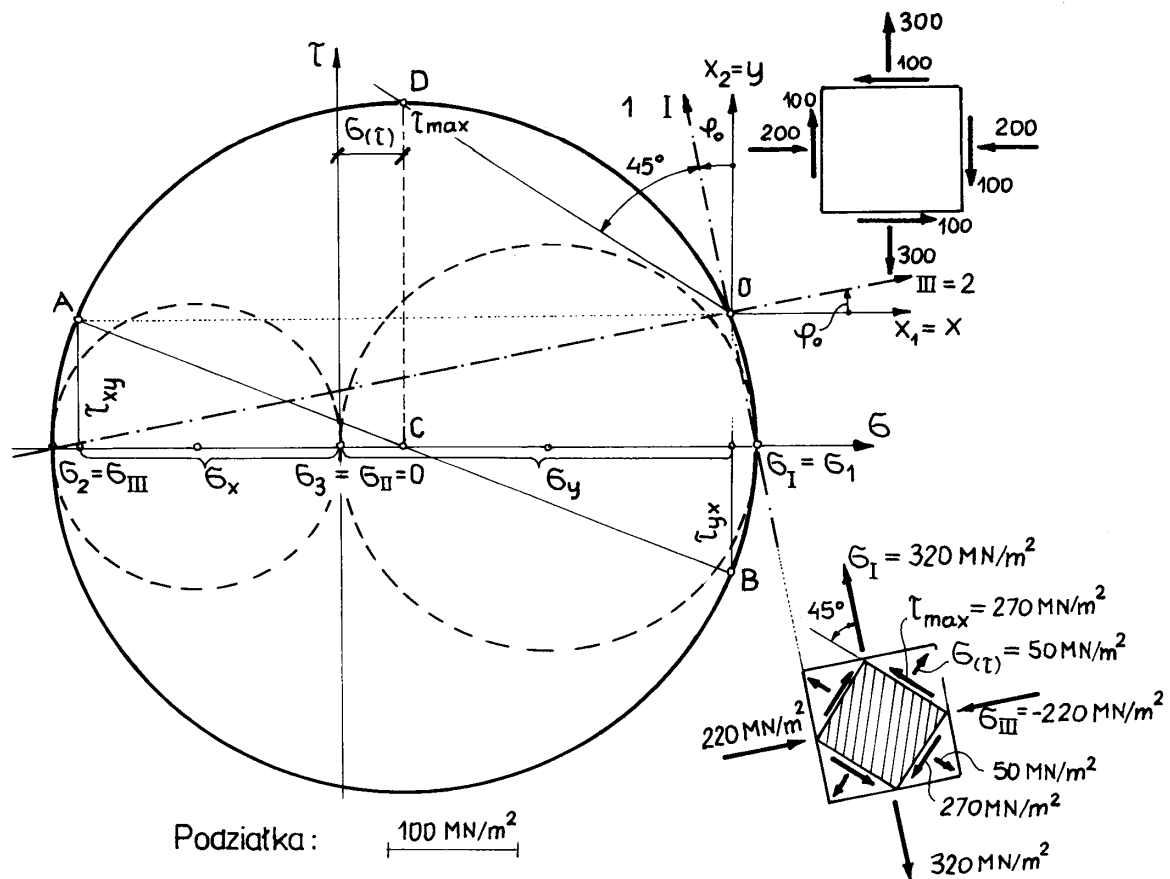
Na podstawie wzoru (1.22) obliczamy τ_{\max} :

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{319,2 - (-219,2)}{2} = 269,2 \text{ MN/m}^2,$$

oraz
$$\sigma_{(\tau)} = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} = \frac{319,2 - 219,2}{2} = 50,0 \text{ MN/m}^2.$$

Położenie osi głównych określa kąt φ_0 (wzór 1.30):

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} = \frac{2(-100)}{-200 - 300} = 0,4, \quad \varphi_0 = \frac{21,8}{2} = 10,9^\circ.$$



Rys. 1.40

W metodzie wykreślnej posłużymy się kołem Mohra przedstawionym na rys. 1.40 (opis konstrukcji tego koła znajduje się w p. 1.8).

Zgodnie z inżynierską zasadą znakowania naprężeń mamy:

$$\sigma_x = \sigma_{11} = -200 \text{ MN/m}^2, \quad \sigma_y = \sigma_{22} = 300 \text{ MN/m}^2,$$

$$\tau_{xy} = -\sigma_{12} = 100 \text{ MN/m}^2, \quad \tau_{yx} = \sigma_{21} = -100 \text{ MN/m}^2.$$

Z rysunku odczytujemy:

$$\sigma_1 = 320 \text{ MN / m}^2, \sigma_2 = -200 \text{ MN / m}^2, \varphi_0 = 11^\circ,$$

$$\tau_{\max} = 270 \text{ MN / m}^2, \sigma_{(\tau)} = 50 \text{ MN / m}^2.$$

Na podstawie koła *Mohra* stwierdzamy, że kąt φ_0 jest zawarty między osią x i osią 2 (tzn. kierunkiem naprężenia σ_2) lub osią y a osią 1 (kierunkiem naprężenia σ_1). Obowiązuje tu następująca zasada:

- gdy $\sigma_{11} > \sigma_{22}$, to φ_0 jest kątem pomiędzy osiami $(x, 1)$ lub $(y, 2)$,
- gdy $\sigma_{11} < \sigma_{22}$, to φ_0 jest kątem pomiędzy osiami $(x, 2)$ lub $(y, 1)$.

Przykład 7

Dany jest płaski stan naprężenia określony w układzie osi x_1, x_2 następującymi składowymi:

$$\sigma_{11} = -200 \text{ MN / m}^2, \sigma_{22} = -400 \text{ MN / m}^2, \sigma_{12} = \sigma_{21} = 150 \text{ MN / m}^2.$$

Wyznaczyć:

- naprężenia główne, maksymalne naprężenia styczne i położenie głównych osi naprężeń,
- tensor naprężenia w układzie osi obróconych o kąt $\varphi = \angle(x_1, x_1') = 40^\circ$.

Rozwiązanie

W układzie osi x_1, x_2 stan naprężenia przedstawia macierz σ :

$$\sigma = \begin{bmatrix} -200 & 150 & 0 \\ 150 & -400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\text{MN / m}^2].$$

$$I_1 = -200 - 400 = -600 \text{ MN / m}^2,$$

$$I_2 = (-200) \cdot (-400) = 150^2 = 57500 (\text{MN / m}^2)^2,$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{-200 - 400}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-200 + 400}{2}\right)^2 + 150^2} = -300 \pm 180,3,$$

$$\sigma_1 = -300 + 180,3 = -119,7 \text{ MN / m}^2 = \sigma_{II},$$

$$\sigma_2 = -300 - 180,3 = -480,3 \text{ MN / m}^2 = \sigma_{III}, \quad \sigma_3 = \sigma_I = 0.$$

Macierz naprężeń w uporządkowanych osiach głównych ma postać:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -119,7 & 0 \\ 0 & 0 & -480,3 \end{bmatrix} [\text{MN/m}^2].$$

Sprawdzamy niezmienniki:

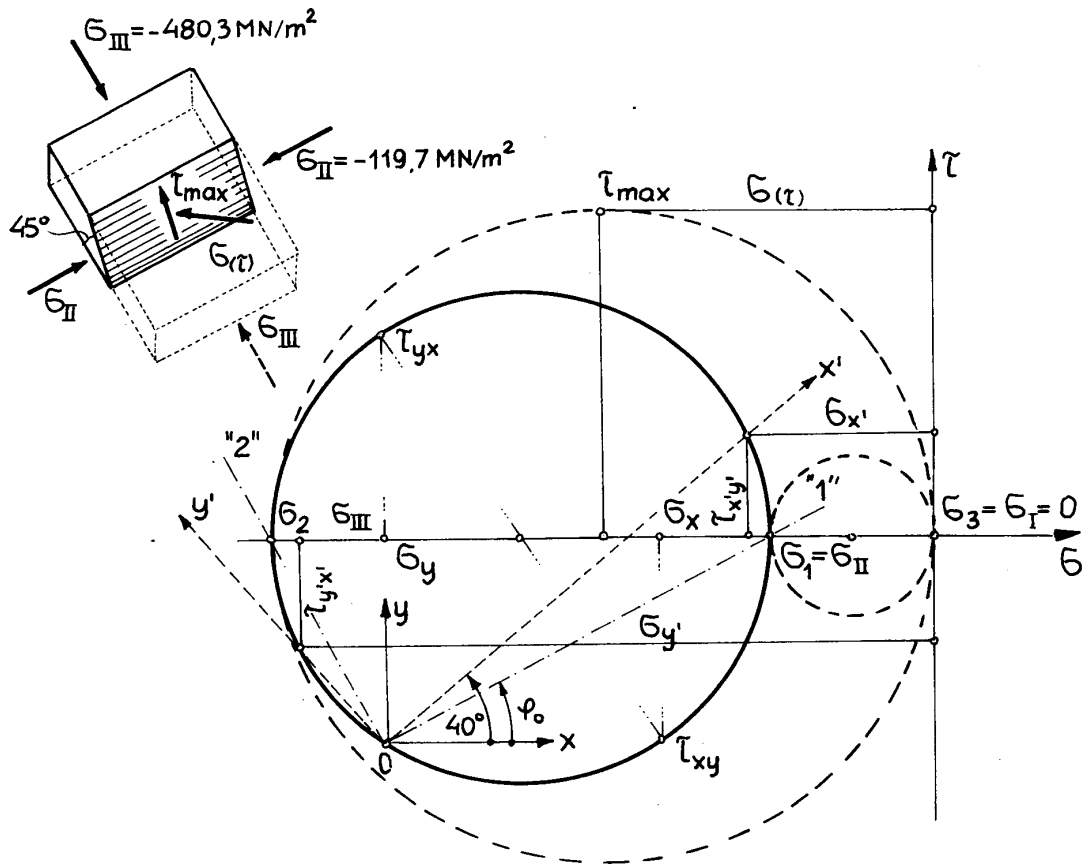
$$I_1 = 0 - 119,7 = 480,3 = -600 \text{ MN/m}^2,$$

$$I_2 = (-119,7) \cdot (-480,3) = 57\,491 \text{ (MN/m}^2\text{)}^2 \approx 57\,500 \text{ (MN/m}^2\text{)}^2.$$

Maksymalne naprężenie styczne:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{0 - (-480,3)}{2} = 240,2 \text{ MN/m}^2,$$

$$\sigma_{(\tau)} = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} = \frac{0 - 480,3}{2} = -240,2 \text{ MN/m}^2.$$



Rys. 1.41

Położenie osi głównych:

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2 \cdot 150}{-200 - (-400)} = 1,5; \quad \varphi_0 = \frac{56,3}{2} = 28,15^\circ.$$

Ponieważ $\sigma_{11} > \sigma_{22}$, więc φ_0 jest kątem pomiędzy osią x a osią 1.

Przejdziemy do wyznaczenia tensora naprężenia w układzie osi obróconych o kąt $\varphi = 40^\circ$. Wykorzystamy tu wzory transformacyjne w postaci (1.29):

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} = \sigma_{1'1'} &= \frac{-200 - 400}{2} + \frac{-200 - (-400)}{2} \cdot \cos(2 \cdot 40^\circ) + 150 \cdot \sin(2 \cdot 40^\circ) = \\ &= -300 + 17,4 + 147,7 = -134,9 \text{ MN/m}^2, \end{aligned}$$

$$\sigma_{y'} = \sigma_{2'2'} = -300 - 17,4 - 147,7 = -465,1 \text{ MN/m}^2,$$

$$-\tau_{x'y'} = \sigma_{1'2'} = \frac{200 - (-400)}{2} \cdot \sin 80^\circ + 150 \cdot \cos 80^\circ = -98,5 + 26 = -72,5 \text{ MN/m}^2.$$

Niezerowniki są następujące:

$$I_1 = -134,9 - 465,1 = -600 \text{ MN / m}^2,$$

$$I_2 = (-134,9) \cdot (-465,1) - (-72,5)^2 = 57\,486 \text{ (MN / m}^2)^2 \approx 57\,500 \text{ (MN / m}^2)^2.$$

Macierz naprężenia w układzie osi obróconych przybiera postać:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{bmatrix} -134,9 & -72,5 & 0 \\ -72,5 & -465,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\text{MN/m}^2].$$

Ilustracją obliczeń zawartych w tym przykładzie jest rysunek 1.41.