

## 10. DZIAŁANIE MOMENTU ZGINAJĄCEGO



### 10.1. ZALEŻNOŚCI PODSTAWOWE

#### 10.1.1. Kinematyka. Hipoteza płaskich przekrojów

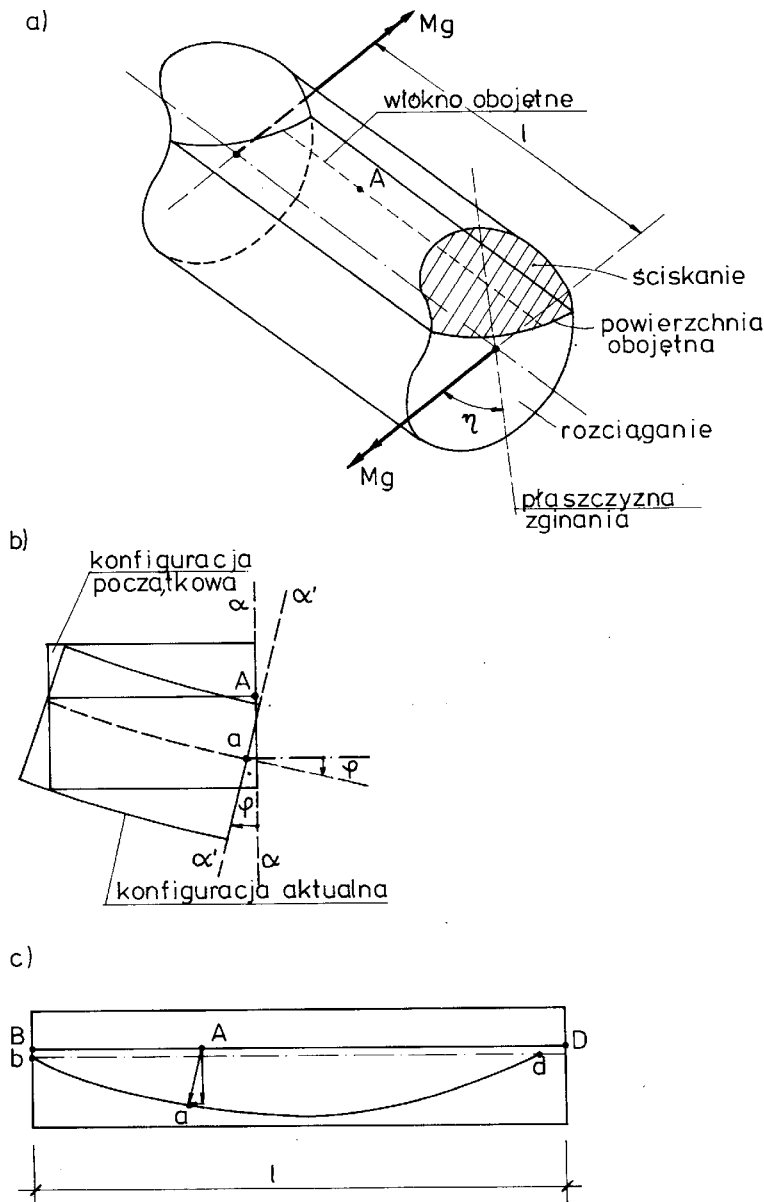
Rozważmy czyste zginanie jednorodnego pręta pryzmatycznego wywołane przez moment zginający  $\mathbf{M}_g$  (por. rys. 10.1a). Mając na uwadze zasadę *de Saint-Venanta*, rozważania ograniczymy do przekrojów dostatecznie oddalonych od końców pręta i pominiemy ewentualne zaburzenia wynikające ze sposobu realizacji obciążeń. Pod wpływem momentu zginającego (wektor  $\mathbf{M}_g$  leży w płaszczyźnie przekroju) część włókien pręta jest ściskana, a pozostała część rozciągana. Włókna ściskane ulegają skróceniu, a rozciągane wydłużeniu. Granicę obu części pręta stanowi pewna powierzchnia utworzona z tzw. włókien obojętnych, których odkształcenia liniowe (wydłużenia lub skrócenia względne) są równe zeru. Na rys. 10.1a przedstawiono rozważany pręt w konfiguracji początkowej.

Efektom kinematycznym działania momentu  $\mathbf{M}_g$  jest wygięcie pręta. Wyniki eksperymentów pozwalają stwierdzić, że przekrój płaski i prostopadły do włókien pręta w konfiguracji pierwotnej (przed odkształceniem) pozostaje nadal płaski i prostopadły do wygiętych włókien pręta w konfiguracji aktualnej (po odkształceniu). Stwierdzenie to jest treścią tzw. hipotezy płaskich przekrojów. Hipotezę tę, mającą podstawowe znaczenie w teorii zginania prętów, po raz pierwszy postawił *Bernoulli* w 1694 roku. Liczne badania doświadczalne elementów zginanych potwierdziły jej słuszność w całym obszarze odkształceń, zarówno sprężystym jak i niesprężystym, aż do zniszczenia pręta.

Bliższe obserwacje wykazują, że przekrój  $\alpha-\alpha$  w procesie deformacji zmienia swój kształt, ulega przemieszczeniu, obraca się o kąt  $\varphi$  i przyjmuje po odkształceniu położenie  $\alpha'-\alpha'$  (rys. 10.1b). Ponieważ rozważany pręt jest jednorodny i pryzmatyczny, więc osie obrotu każdego dowolnie obranego przekroju są do siebie równoległe. Tak więc w konfiguracji aktualnej każde włókno przekroju jest płaską krzywą równoległą do tzw. płaszczyzny zginania. Płaszczyzna ta tworzy z wektorem momentu pewien kąt  $\eta$  (rys. 10.1a).

Wyberzemy w konfiguracji początkowej dowolny punkt materialny  $A$ , należący do włókna obojętnego (rys. 10.1a). W konfiguracji aktualnej rozważane włókno jest wygięte i punkt  $A$  zajmuje położenie  $a$ . Rysunek 10.1c ilustruje wygięcie tego włókna w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny zginania oraz oba położenia wybranego punktu materialnego. Ponieważ długość włókna obojętnego nie zmienia się, więc po odkształceniu cięciwa  $bd$  jest krótsza od odcinka  $BD = l$ .

Wytnijmy myślowo element belki o pierwotnej długości  $dX$ , ograniczony dwoma płaskimi przekrojami (rys. 10.2a). Po odkształceniu przekroje te wyznaczają w płaszczyźnie zginania środek krzywizny pręta, przy czym odcinek włókna obojętnego nie zmienia swej długości ( $ds = dx$ ). Wynika stąd, że powierzchnia obojętna w konfiguracji aktualnej jest powierzchnią walcową i przecina się z płaszczyzną przekroju pręta wzdłuż pewnej prostej, zwanej osią obojętną.



Rys. 10.1

Oś obojętne jest zawsze prostopadła do płaszczyzny zginania. Ilustracją konfiguracji aktualnej jest rys. 10.2b. Z rysunku tego wnioskujemy, że podczas czystego zginania wygięte włókna pręta tworzą łuki kołowe, których wspólny środek leży w punkcie C. Rozważmy odkształcenie pewnego włókna przechodzącego przez punkt G przekroju pręta. W konfiguracji aktualnej włókno to zajmuje położenie g (por. rys. 10.2a, b), a jego długość wynosi  $ds + \Delta ds$ . Z podobieństwa wycinków koła wynika, że

$$(a) \quad \frac{ds + \Delta ds}{ds} = \frac{r + e'}{r},$$

skąd

$$(b) \quad \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{e'}{r}.$$

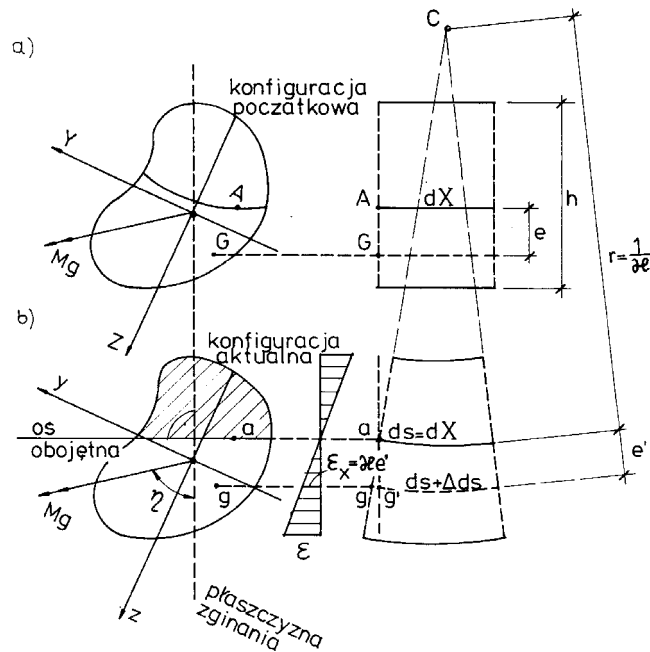
Lewa strona równania (b) przedstawia odkształcenie liniowe  $\epsilon_x$ , a  $e'$  – odległość badanego włókna od osi obojętnej. Po uwzględnieniu, że krzywizna powierzchni obojętnej  $\kappa = 1/r$ , otrzymujemy podstawowy związek kinematyczny teorii zginania, obowiązujący w konfiguracji aktualnej:

$$\varepsilon_x = \kappa \cdot e' \quad (10.1)$$

Odształcenia  $\varepsilon_x$  rosną więc proporcjonalnie do odległości od osi obojętnej. Funkcja (10.1) w obszarze przekroju pręta przedstawia pewną płaszczyznę (tzw. płaszczyznę odkształceń). Ogólne równanie tej płaszczyzny w dowolnym lokalnym układzie osi środkowych ( $y, z$ ), związanym z konfiguracją aktualną, można zapisać następująco (por. rys. 10.2b):

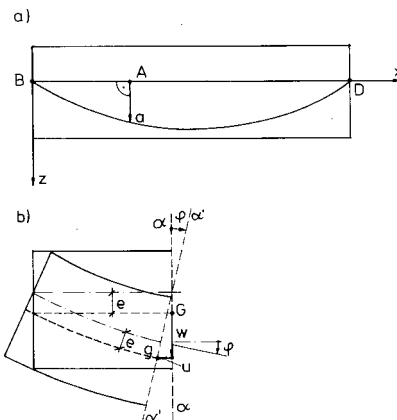
$$\varepsilon_x(y, z) = a_0 + a_1 y + a_2 z, \quad (10.1a)$$

gdzie  $a_0, a_1, a_2$  oznaczają pewne stałe.



Rys. 10.2

Hipoteza płaskich przekrojów zapisana w postaci (10.1a) służy do wyznaczania naprężeń normalnych w ogólnym przypadku zginania prętów sprężystych i niesprężystych. Wzór (10.1a) jest słuszny również dla dużych przemieszczeń i dużych odkształceń; obowiązuje np. dla materiałów gumopodobnych. Trzeba jednak pamiętać, że położenie osi obojętnej, określone równaniem  $\varepsilon_x(y, z) = 0$ , zależy w istotny sposób od przyjętego prawa fizycznego.



Rys. 10.3

Najczęściej przyjmujemy, że przemieszczenia i odkształcenia są bardzo małe. Wówczas rozróżnianie konfiguracji początkowej i aktualnej nie jest konieczne, a dalsze istotne konsekwencje takiego założenia są następujące:

- zmiany kształtu i wymiarów przekroju w procesie odkształcenia są pomijalnie małe,
- osie obojętne w obu konfiguracjach są liniami prostymi i pokrywają się,
- odległość  $e' = e$ ,
- długość cięciwy odkształconej linii obojętnej  $bd$  według rys. 10.1c jest w przybliżeniu równa długości pręta  $BD$ , a wektor przemieszczenia punktu  $A$  jest prostopadły do nieodkształconych włókien pręta (rys. 10.3a),
- kąty obrotu przekrojów są bardzo małe ( $\sin\varphi \approx \tan\varphi \approx \varphi$ ), a składowa przemieszczenia punktu  $G$  równoległa do osi pręta wynosi (rys. 10.3b):

$$u = -e \cdot \varphi. \quad (10.2)$$

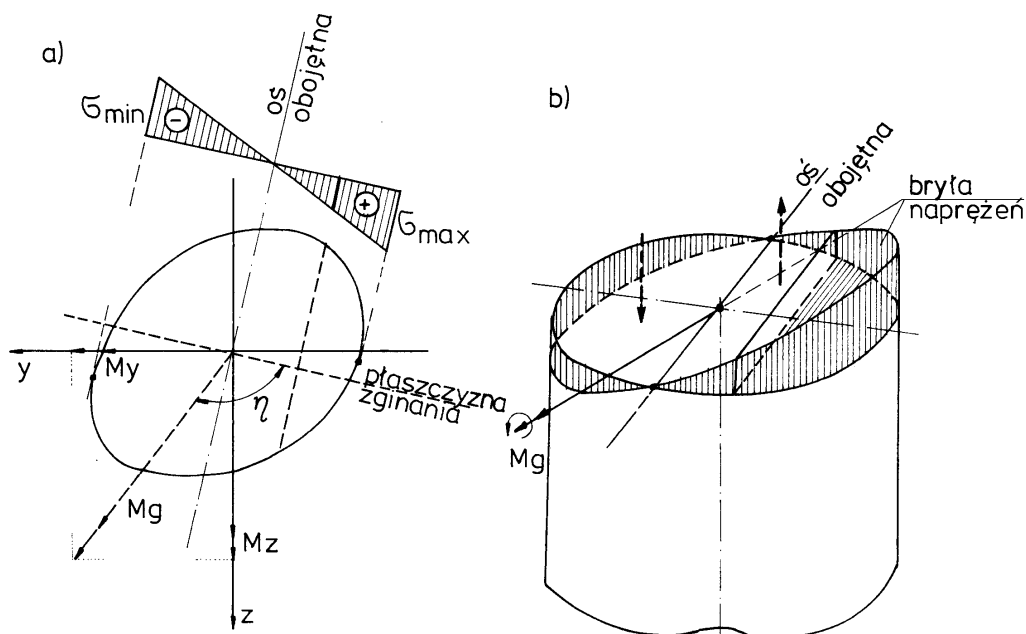
Wyznaczenie przemieszczeń pręta zginanego omówimy w p. 10.1.4.

### 10.1.2. Obliczanie naprężeń w prętach liniowo-sprężystych

Przyjmijmy, że liniowo-sprężysty pręt pryzmatyczny o dowolnym przekroju jest poddany czystemu zginaniu momentem  $\mathbf{M}_g$  o składowych  $M_y$  i  $M_z$ , przy czym osie  $y$  i  $z$  są dowolnymi osiami środkowymi (por. rys. 10.4). Zgodnie ze wzorami (8.1) składowe  $M_y$  i  $M_z$  definiuje się następująco:

$$M_y \stackrel{def}{=} \int_A \sigma_x(y, z) \cdot z \, dA, \quad (10.3)$$

$$M_z \stackrel{def}{=} - \int_A \sigma_x(y, z) \cdot y \, dA. \quad (10.4)$$



Rys. 10.4

Ze wzorów (10.3) i (10.4) nie wynika prawo rozkładu naprężeń normalnych w obrębie przekroju pręta. Możemy jedynie wykorzystać fakt, że siła normalna  $N$ , która również zależy od naprężeń, jest równa zero:

$$N = \int_A \sigma_x(y, z) \cdot dA = 0. \quad (10.5)$$

Wzory (10.3) ÷ (10.5) obowiązują w konfiguracji aktualnej, a całkowanie należy prowadzić w obszarze  $A$ , oznaczającym zdeformowany przekrój pręta. W dalszym ciągu założymy, że odkształcenia i przemieszczenia są bardzo małe, co pozwala przyjąć, że obszar  $A$  odpowiada pierwotnemu przekrojowi pręta (przed odkształceniem).

Do określenia funkcji  $\sigma_x(y, z)$  wykorzystamy hipotezę *Bernoulliego*. Jeżeli stan naprężenia podczas zginania opisuje macierz  $\sigma$ :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (10.6)$$

to ze związków fizycznych dla ciała liniowo-sprężystego otrzymujemy, że  $\sigma_x = E \epsilon_x = E \epsilon_x$ . Z budowy wzoru (10.1a), zawierającego matematyczną treść hipotezy płaskich przekrojów, wynika więc następująca postać funkcji  $\sigma_x(y, z)$ :

$$(c) \quad \sigma_x(y, z) = b_0 + b_1 \cdot y + b_2 \cdot z,$$

gdzie  $b_0, b_1, b_2$  oznaczają pewne stałe. Po podstawieniu zależności (c) do wzorów (10.3) – (10.5) otrzymujemy liniowy układ równań na obliczenie stałych  $b_0, b_1, b_2$ :

$$(d) \quad \begin{aligned} b_0 \int_A z dA + b_1 \int_A yz dA + b_2 \int_A z^2 dA &= M_y, \\ -b_0 \int_A y dA - b_1 \int_A y^2 dA - b_2 \int_A zy dA &= M_z, \\ b_0 \int_A dA + b_1 \int_A y dA + b_2 \int_A z dA &= 0. \end{aligned}$$

Ponieważ osie  $y, z$  są osiami środkowymi, więc momenty statyczne<sup>\*)</sup>

$$S_z = \int_A y dA = S_y = \int_A z dA = 0.$$

Pozostałe całki oznaczają momenty bezwładności przekroju i pole przekroju  $A$ . Z równania (d)<sub>3</sub> wynika zatem, że  $b_0 = 0$ . Z kolei stałe  $b_1$  i  $b_2$  można określić z pozostałych dwóch równań układu (d):

$$(e) \quad \begin{aligned} b_1 J_{yz} + b_2 J_y &= M_y, \\ b_1 (-J_z) + b_2 (-J_{yz}) &= M_z, \end{aligned}$$

skąd

$$(f) \quad \begin{aligned} b_1 &= -\frac{M_y J_{yz} + M_z J_y}{J_y J_z - J_{yz}^2}, \\ b_2 &= \frac{M_y J_z + M_z J_{yz}}{J_y J_z - J_{yz}^2}. \end{aligned}$$

Po podstawieniu wartości stałych  $b_1$  i  $b_2$  do równania (c) otrzymujemy poszukiwane wyrażenie na  $\sigma_x(y, z)$ :

<sup>\*)</sup> Momenty statyczne i momenty bezwładności zdefiniowano w dodatku.

$$\sigma_x(y, z) = -\frac{M_y J_{yz} + M_z J_y}{J_y J_z - J_{yz}^2} \cdot y + \frac{M_y J_z + M_z J_y}{J_y J_z - J_{yz}^2} \cdot z. \quad (10.7)$$

Jest to ogólny wzór na naprężenie normalne wywołane momentem zginającym o składowych  $M_y$  i  $M_z$  w układzie dowolnych osi środkowych.

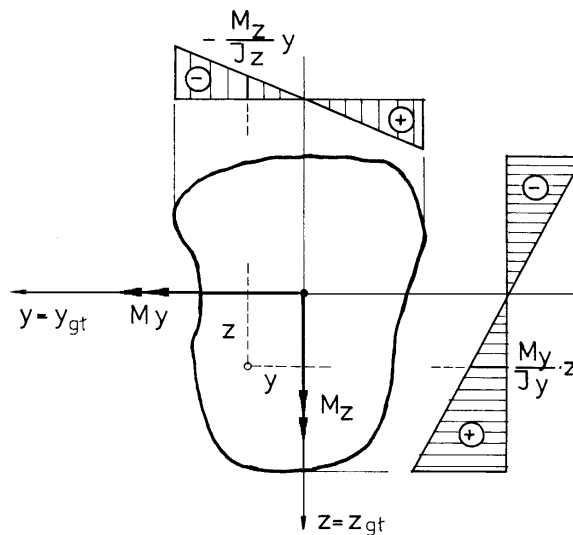
Zależność (10.7) uprości się znacznie, jeżeli osie  $y$  i  $z$  będą głównymi osiami bezwładności. Wówczas moment dewiacyjny  $J_{yz} = 0$ , a naprężenia  $\sigma_x(y, z)$  określamy ze wzoru:

$$\sigma_x(y, z) = -\frac{M_z}{J_z} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot z. \quad (10.7a)$$

Jeśli przyjmiemy, że  $\sigma_x(y, z) = 0$ , to otrzymamy równanie prostej. Wzdłuż tej linii naprężenia i odkształcenia są równe zero. Równanie:  $\sigma_x(y, z) = 0$  jest więc równaniem osi obojętnej, dzielącej przekrój na część ścisną i rozciąganą. Dla dowolnego układu osi  $y, z$  na podstawie wzoru (10.7) otrzymujemy:

$$z = \frac{M_y J_{yz} + M_z J_y}{M_y J_z + M_z J_{yz}} \cdot y. \quad (10.8)$$

Równania (10.7) i (10.8) ilustruje rys. 10.4. Na rysunku 10.5 pokazano, że naprężenie obliczone według wzoru (10.7a), zgodnie z zasadą superpozycji, jest sumą efektów działania momentów  $M_y$  i  $M_z$ .



Rys. 10.5

Jeżeli osie  $y, z$  są głównymi osiami bezwładności ( $J_{yz} = 0$ ), to równanie osi obojętnej upraszcza się do postaci:

$$z = \frac{M_z J_y}{M_y J_z} \cdot y. \quad (10.8a)$$

Z równań (10.8) wynika, że podczas zginania prętów sprężystych oś obojętna przechodzi zawsze przez środek ciężkości przekroju. Trzeba podkreślić, że oś obojętna w ogólności nie pokrywa się z kierunkiem wypadkowego momentu zginającego  $\mathbf{M}_g$  (rys.10.4). Linie te pokrywają się tylko w tych przekrojach, w których oba główne momenty bezwładności są takie same (np. przekrój kołowy, kwadratowy). Ten ważny wniosek wynika bezpośrednio ze wzoru (10.8a).

Na rysunku 10.4 widzimy, że jednakowe naprężenia normalne występują w punktach leżących na liniach równoległych do osi obojętnej, a ekstremalne naprężenia normalne występują we włóknach najbardziej oddalonych od osi obojętnej.

Najczęściej mamy do czynienia z przypadkami, w których występuje tylko jedna współrzędna momentu zginającego. Przyjmijmy więc, że  $|\mathbf{M}_g| = M_y \neq 0$ , a  $M_z = 0$ . Wówczas naprężenia  $\sigma_x(y, z)$  w układzie osi głównych wyraża wzór:

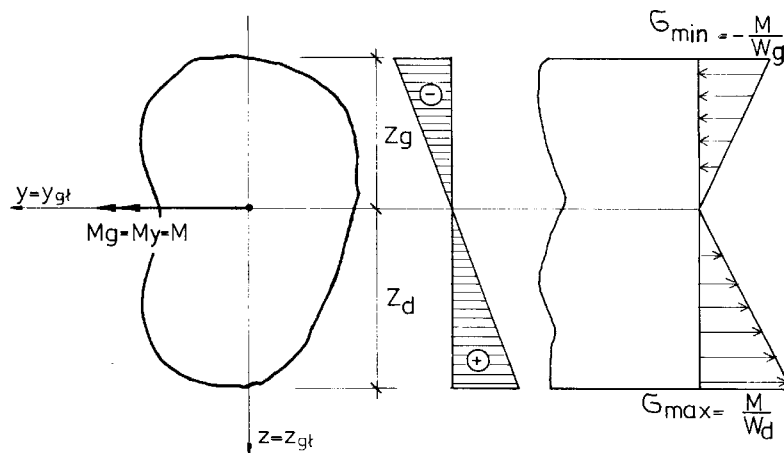
$$\sigma_x(y, z) = \sigma_x(z) = \frac{M_y}{J_y} \cdot z, \quad (10.9)$$

a oś obojętna pokrywa się z kierunkiem wektora  $\mathbf{M}_g$  (por. rys. 10.4).

Ekstremalne naprężenia normalne obliczamy z zależności:

$$\sigma_x = \frac{M}{W_d} \quad \text{lub} \quad \sigma_x = -\frac{M}{W_g}, \quad (10.9a)$$

gdzie  $M = M_y$ , a  $W_d = J_y/z_d$  i jest tzw. wskaźnikiem wytrzymałości włókien dolnych, zaś  $W_g = J_y/z_g$  i jest wskaźnikiem wytrzymałości włókien górnych. Przez  $z_d$  i  $z_g$  oznaczono odpowiednio odległości dolnych i górnych włókien od osi obojętnej (por. rys. 10.6). We wzorach (10.9) zwrot wektora momentu zginającego  $M = M_y$  pokrywa się ze znakiem osi  $y$ .



Rys. 10.6

Wymiarowanie na podstawie warunku wytrzymałościowego polega na przyjęciu takiego przekroju pręta, by była spełniona nierówność:

$$\sigma_{\text{red}} = |\sigma_x| \leq \sigma_{\text{dop}}.$$

Jeżeli przyjmiemy, że wartość  $\sigma_{\text{dop}}$  nie zależy od znaku naprężenia  $\sigma_x$  (jest tak na przykład w konstrukcjach stalowych), a wskaźnik wytrzymałości oznaczymy przez  $W = \min(W_d, W_g)$ , to warunek wytrzymałościowy przy uwzględnieniu zależności (10.9) ma postać:

$$\sigma_x = \frac{|M|}{W} \leq \sigma_{\text{dop}}, \quad (10.10)$$

skąd wskaźnik wytrzymałości przekroju

$$W \geq W_{\text{min}} = \frac{|M|}{\sigma_{\text{dop}}}. \quad (10.11)$$

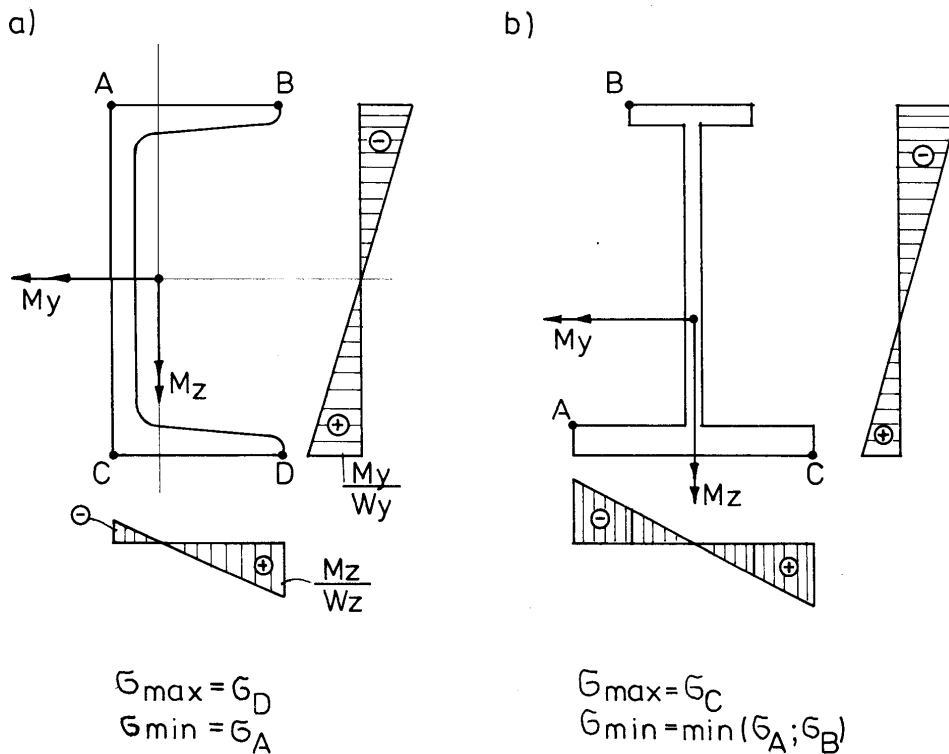
Na podstawie tej zależności można obrać przekrój pręta o odpowiednio dużym wskaźniku wytrzymałości. Bardzo przydatne są tutaj tablice do projektowania konstrukcji (np. *Boguckiego* i *Żybertowicza* [5]), zawierające wartości wskaźników wytrzymałości dla najczęściej stosowanych przekrojów.

Jeśli występują obie składowe momentu zginającego w układzie głównych osi bezwładności  $y, z$ , to warunek projektowania jest bardziej złożony. Najczęstsze są przekroje, w których warunek wytrzymałościowy upraszcza się do postaci (rys. 10.7a):

$$\sigma_x = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \leq \sigma_{\text{dop}}, \quad (10.12)$$

i przyjęcie odpowiedniego przekroju przebiega zazwyczaj w kilku próbach.

W innych przypadkach (np. rys. 10.7b) obliczanie wartości naprężeń ekstremalnych nie jest szablonowe i wymaga dodatkowej analizy.



Rys. 10.7

### 10.1.3. Obliczanie odkształceń w prętach liniowo-sprężystych

Wyznaczenie stanu odkształcenia dla znanego już stanu naprężenia nie nastęrcza żadnych trudności. Ze związków fizycznych dla materiału liniowo-sprężystego otrzymujemy

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{1}{E} \left( \frac{M_y J_{yz} + M_z J_y}{J_y J_z - J_{yz}^2} \cdot y + \frac{M_y J_z + M_z J_{yz}}{J_y J_z - J_{yz}^2} \cdot z \right), \\ \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x. \end{aligned} \right\} \quad (10.13)$$

Wobec założenia płaskich przekrojów odkształcenia kątowe znikają a tensor odkształcenia obrazuje macierz  $\boldsymbol{\varepsilon}$ :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \varepsilon_x & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \varepsilon_x \end{bmatrix}. \quad (10.14)$$



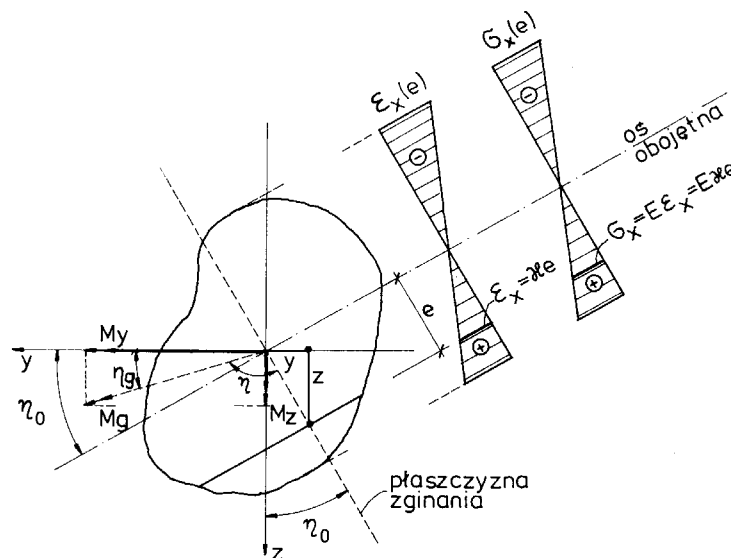
### 10.1.4. Wyznaczanie przemieszczeń pręta liniowo-sprężystego. Równanie różniczkowe linii ugięcia

Rozważymy szczegółowo zagadnienie liniowe, w którym można stosować zasadę superpozycji. Zagadnienie to występuje wówczas, gdy poza hipotezą płaskich przekrojów przyjmuje się dodatkowo, że materiał pręta jest liniowo-sprężysty, a przemieszczenia i odkształcenia są bardzo małe.

W wyznaczaniu przemieszczeń sprawą najważniejszą jest określenie składowej prostopadłej do osi pręta, czyli tzw. ugięcie osi ciężkości belki. Z punktu 10.1.2 wiemy, że oś obojętna przechodzi zawsze przez środek ciężkości przekroju, a z punktu 10.1.1 wynika, że krzywiznę powierzchni obojętnej mierzoną w płaszczyźnie zginania wyraża się następująco (por. wzór (10.1)):

$$\kappa = \frac{\varepsilon_x}{e}, \quad (10.15)$$

gdzie  $e$  jest odległością włókien pręta od osi obojętnej (por. rys. 10.8).



Rys. 10.8

Wykorzystując fakt, że  $\varepsilon_x = \sigma_x/E$ , otrzymujemy:

$$\kappa = \frac{\sigma_x}{Ee}. \quad (10.15a)$$

Dla dowolnych osi środkowych  $y, z$  naprężenia  $\sigma_x$  określa wzór (10.7). Z rysunku 10.8 wynika, że:

$$(g) \quad \begin{cases} M_y = M_g \cos \eta_g, \\ M_z = M_g \sin \eta_g, \\ y = -e \sin \eta_0, \\ z = e \cos \eta_0. \end{cases}$$

gdzie  $\eta_g$  jest kątem zawartym między wektorem  $M_g$  i osią  $y$ , a  $\eta_0$  oznacza kąt między osią obojętną i osią  $y$ , przy czym stosownie do wzoru (10.8)

$$(h) \quad \operatorname{tg} \eta_0 = \frac{z}{y} = \frac{M_y J_{yz} + M_z J_y}{M_y J_z + M_z J_{yz}} = \frac{J_{yz} \cos \eta_g + J_y \sin \eta_g}{J_z \cos \eta_g + J_{yz} \sin \eta_g}.$$

Po uwzględnieniu wzorów (g) we wzorze (10.7) i podstawieniu otrzymanego rezultatu do zależności (10.15a) otrzymujemy następujący podstawowy związek między krzywizną  $k$  i momentem zginającym  $M_g$ :

$$\kappa = \frac{M_g}{E(J_z J_y - J_{zy}^2)} \left[ \sin \eta_0 (J_{yz} \cos \eta_g + J_y \sin \eta_g) + \cos \eta_0 (J_z \cos \eta_g + J_{yz} \sin \eta_g) \right] \quad (10.16)$$

Jeżeli osie  $y$  i  $z$  są głównymi środkowymi osiami bezwładności ( $J_{yz} = 0$ ), to zależność (10.16) upraszcza się do postaci:

$$\kappa = \frac{M_g}{E J_y J_z} (J_y \sin \eta_0 \sin \eta_g + J_z \cos \eta_0 \cos \eta_g). \quad (10.16a)$$

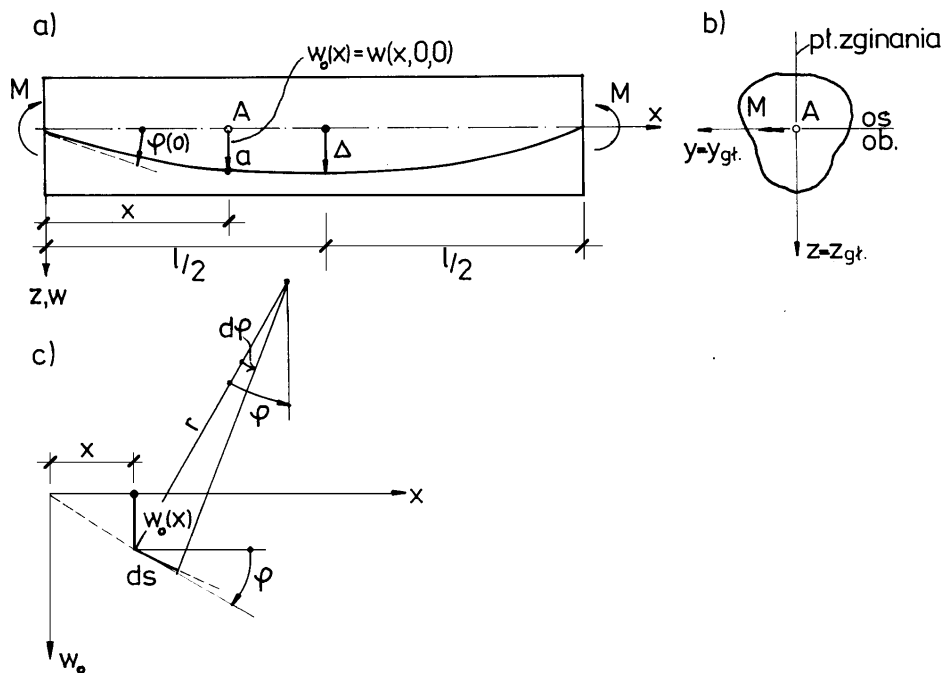
Wzór (10.16a) uprości się znacznie, gdy wektor momentu  $\mathbf{M}_g$  pokrywa się z jedną z głównych osi bezwładności. Jeżeli na przykład  $\mathbf{M}_g = \mathbf{M}_y$  ( $M_z = 0$ ), to  $\eta_g = 0$ , stąd na podstawie wzoru (h)  $\eta_0 = 0$ . Oznacza to, że oś obojętna jest współliniowa z kierunkiem wektora momentu, a płaszczyzna zginania jest prostopadła do tego wektora. Wówczas zależność (10.16a) przyjmuje postać:

$$\kappa = \kappa_y = \frac{M_y}{E J_y}. \quad (10.17)$$

Zależności (10.16) i (10.16a) nie znajdują na ogół zastosowania praktycznego z uwagi na dość złożoną postać i brak prostej interpretacji fizycznej. Wad tych nie wykazuje wzór (10.17), mający podstawowe znaczenie w teorii zginania. Wynika z niego, że krzywizna jest wprost proporcjonalna do momentu zginającego, a odwrotnie proporcjonalna do iloczynu  $E J_y$ , zwanego *szywnością zginania przekroju*. W przypadku tzw. dwukierunkowego (ukośnego) zginania, gdy występują obie składowe momentu zginającego  $M_y$  i  $M_z$ , zamiast korzystać ze wzoru (10.16a) stosuje się zasadę superpozycji. Krzywiznę  $k_y$  wyznacza się ze wzoru (10.17), a krzywiznę  $k_z$  ze wzoru (10.17a)'

$$\kappa_z = \frac{M_z}{E J_z}. \quad (10.17a)'$$

Wypadkowa krzywizna  $k$  jest sumą wektorową krzywizn  $\kappa_y$  i  $\kappa_z$ .



Rys. 10.9

Przejdziemy obecnie do szczegółowej analizy wzoru (10.17), służącego do wyznaczenia tzw. linii ugięcia, czyli przemieszczeń punktów osi ciężkości pręta w płaszczyźnie zginania. Rozważymy przypadek przedstawiony na rys. 10.9, przy czym dla uproszczenia zapisu przyjmijmy, że  $M_g = M_y = M$ , a  $J_y = J$ . Płaszczyzna zginania pokrywa się z płaszczyzną  $xz$ , a linię ugięcia opisuje funkcja:

$w_0(x) = w(x,0,0)$ . Na podstawie rys. 10.9c możemy napisać:

$$(i) \quad \kappa_y = \kappa = \frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{ds},$$

przy czym

$$(j) \quad ds = \sqrt{1 + w_0'^2} \cdot dx.$$

Ponieważ

$$w_0' = \frac{dw_0}{dx} = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{lub} \quad \varphi = \operatorname{arctg} w_0',$$

więc

$$(k) \quad d\varphi = d(\operatorname{arctg} w_0') = \frac{w_0''}{1 + w_0'^2} \cdot dx, \quad \text{gdzie} \quad w_0'' = \frac{d^2 w_0}{dx^2}.$$

Po podstawieniu zależności (j) i (k) do wzoru (i) otrzymujemy:

$$\kappa = \frac{w_0''}{(1 + w_0'^2)^{3/2}}. \quad (10.18)$$

Jest to dokładny wzór na dowolnie dużą krzywiznę krzywej  $w_0(x)$ . Podstawienie wzoru (10.18) do zależności (10.17) daje następujące nieliniowe równanie różniczkowe linii ugięcia:

$$\left| \frac{w_0''}{(1 + w_0'^2)^{3/2}} \right| = \frac{|M|}{EJ}. \quad (10.19)$$

Moduły we wzorze (10.19) są konieczne, dopóki nie ustalimy zgodności znaków lewej i prawej strony. Równanie (10.19) jest słuszne dla małych odkształceń (zmiany wymiarów przekroju są pomijalnie małe), ale dowolnie dużych przemieszczeń. Jeżeli przyjmijmy, że kąty obrotu są bardzo małe, to

$$\varphi = \operatorname{arctg} w_0' \approx w_0' \quad \text{oraz} \quad \sqrt{1 + w_0'^2} \approx 1.$$

Wówczas linię ugięcia określamy z liniowego równania różniczkowego:

$$|w_0''| = \frac{|M|}{EJ}. \quad (10.19a)$$

Zanalizujemy jeszcze znaki wielkości  $w_0''$  i  $M$ . Zazwyczaj przyjmuje się, że dodatni moment rozciąga dolne włókna pręta; zwrot momentu  $M = M_y$  jest więc dodatni i prawa strona równania (10.19a) jest większa od zera, bo  $EJ > 0$ . Znak lewej strony ustalimy według rys. 10.10. Na rysunku 10.10a oś  $w_0$  jest skierowana w dół i dodatniemu momentowi odpowiada ujemna wartość drugiej pochodnej  $w_0''$ . Przeciwny znak otrzymujemy, gdy oś  $w_0$  jest skierowana w górę. Wobec tego równanie różniczkowe linii ugięcia ma postać:

– dla osi  $w_0$  skierowanej w dół (rys. 10.10a)

$$EJ w_0'' = -M, \quad (10.20)$$

przy czym

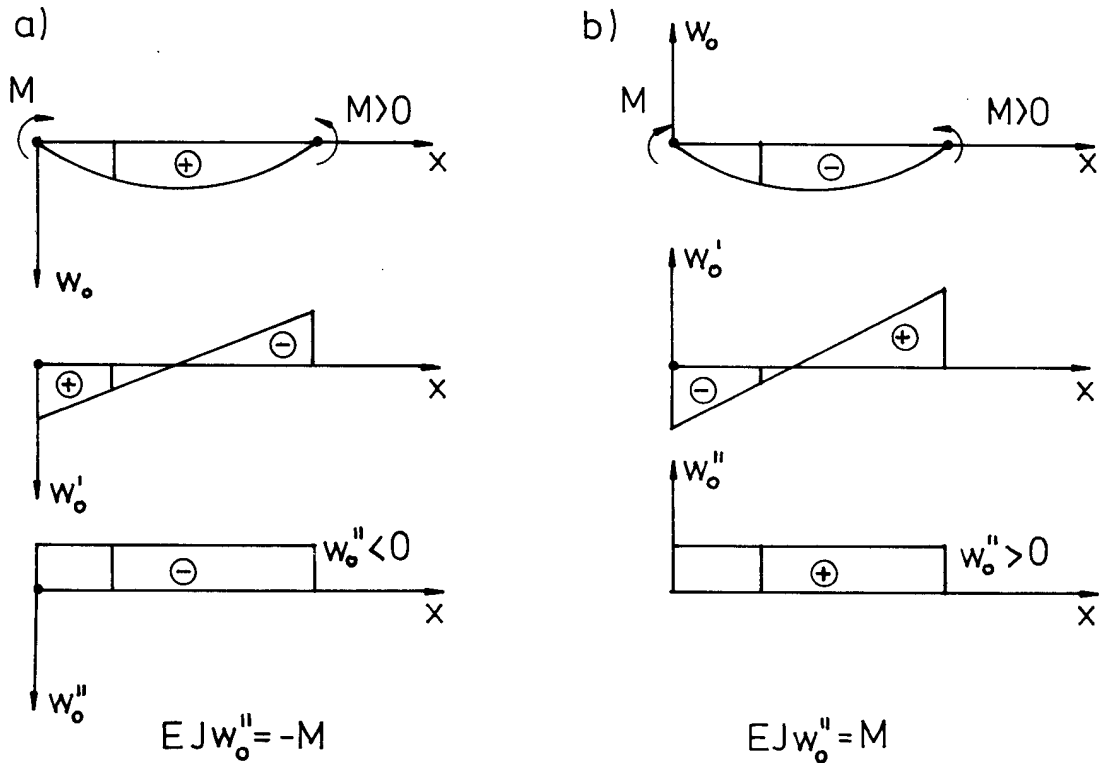
$$k = -w_0'',$$

– dla osi  $w_0$  skierowanej w górę (rys. 10.10b).

$$EJ w_0'' = M, \quad (10.20a)$$

przy czym

$$\kappa = w_0''.$$



Rys. 10.10

Zastosujemy obecnie równanie (10.20) do obliczenia linii ugięcia pręta poddanego czystemu zginaniu (rys. 10.9). Ponieważ  $EJ = \text{const}$  i  $M = \text{const}$ , więc

$$EJ w_0' = -Mx + C_1$$

oraz

$$EJ w_0 = -M \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Stałe  $C_1$  i  $C_2$  wyznaczymy z następujących warunków brzegowych:

$$\begin{aligned} w_0(0) = 0, & \quad \text{stąd} \quad C_2 = 0, \\ w_0(l) = 0, & \quad \text{stąd} \quad C_1 = \frac{Ml}{2}. \end{aligned}$$

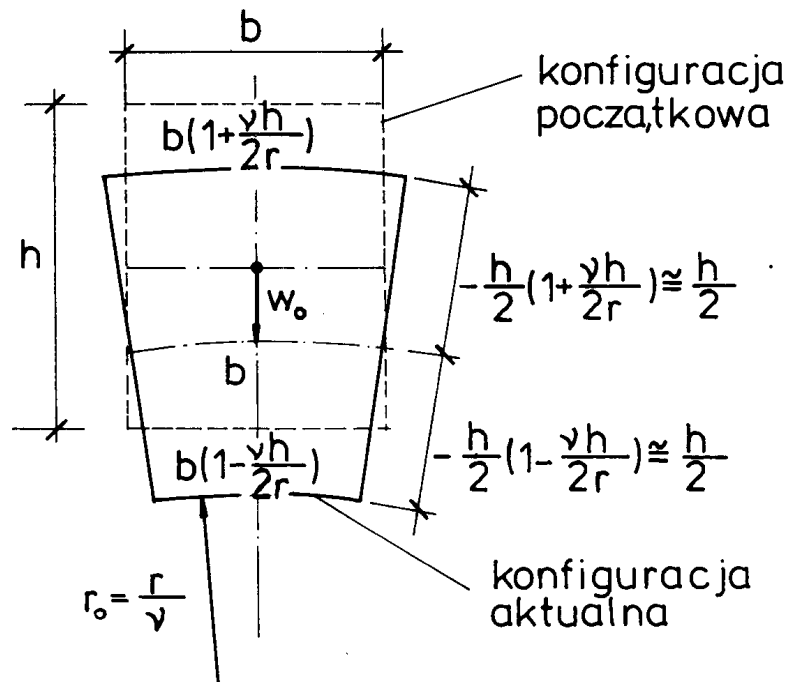
Wobec tego linia ugięcia jest parabolą II stopnia o równaniu:

$$(l) \quad w_0(x) = \frac{M}{2EJ} (lx - x^2).$$

Największe ugięcie (tzw. strzałka ugięcia) występuje w połowie rozpiętości:

$$\Delta = w_0\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{M l^2}{8 E J}.$$

Ścisłe biorąc linia ugięcia w rozważanym zadaniu jest fragmentem łuku koła, a nie parabolą II stopnia. Postać przedstawiona wzorem (1) jest rozwiązaniem równania liniowego (10.20). Rozwiązanie ścisłe otrzymamy po zastosowaniu równania nieliniowego (10.19). Warto dodać, że dla małych ugięć różnice rozwiązań równań liniowego i nieliniowego są bardzo małe.



Rys. 10.11

Wyznaczenie wszystkich współrzędnych wektora przemieszczenia dla każdego punktu pręta jest bardziej złożone, ale ze względów praktycznych niekonieczne, ponieważ przemieszczenia  $u(x, y, z)$  i  $v(x, y, z)$  są bardzo małe, a  $w(x, y, z) \approx w(x, 0, 0) = w_0(x)$ . Dla zobrazowania tej sprawy rozważymy jednak pręt o przekroju prostokątnym. Ściskana część przekroju ulega poprzecznemu poszerzeniu, a rozciągana – zwężeniu (por. rys. 10.11). Krawędzie boczne są liniami prostymi, a krawędzie dolna i górna są łukami kołowymi. Opisane deformacje przekroju poprzecznego łatwo można zaobserwować przy zginaniu pręta gumowego. Szerokość skrajnej górnej krawędzi przekroju wyraża w przybliżeniu wzór:

$$b + b\nu\varepsilon = b\left(1 + \nu\varepsilon \frac{h}{2}\right) = b\left(1 + \frac{\nu h}{2r}\right).$$

Jeśli przyjmiemy dalej, że średnia odległość krawędzi od osi obojętnej w trakcie deformacji nie ulega zmianie i wynosi  $h/2$ , to możemy obliczyć krzywiznę linii przechodzącej przez odkształconą oś pręta. Z proporcji:

$$\frac{r_0 + \frac{h}{2}}{r_0} = \frac{b\left(1 + \frac{\nu h}{2r}\right)}{b}$$

otrzymujemy, że:

$$(m) \quad r_0 = \frac{r}{\nu}.$$

Gdy  $\nu = 0$  oraz  $r_0 \rightarrow \infty$ , wymiary przekroju poprzecznego nie ulegają zmianie.

Wyczerpujące omówienie sposobu obliczania przemieszczeń  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  i  $w(x, y, z)$  dla liniowego problemu zginania znajduje się w książce *Piechnika* [34]. W rozważanym przez nas czystym zginaniu pręta z rysunku 10.9 funkcje te mają następującą postać:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= \frac{M}{EJ} \left(x - \frac{l}{2}\right) z = -z \frac{\partial w(x, 0, 0)}{x}, \\ v(x, y, z) &= -\nu \frac{M}{EJ} \cdot yz, \\ w(z, y, z) &= \frac{M}{2EJ} [lx - x^2 + \nu(y^2 - z^2)]. \end{aligned} \right\} \quad (10.21)$$

### 10.1.5. Zakres stosowania wyprowadzonych wzorów

Wszystkie dotychczas omówione rezultaty liniowej teorii zginania są ściśle dla czystego zginania izotropowych i jednorodnych prętów pryzmatycznych, jakkolwiek stosujemy je również w następujących przypadkach:

- do prętów ortotropowych (np. drewnianych), jeżeli kierunek główny anizotropii (kierunek włókien) jest zawsze równoległy do osi pręta,
- do prętów podłużnie niejednorodnych, czyli prętów, w których współczynniki sprężystości zmieniają się wzdłuż osi pręta (np.  $E = E(x)$ ),
- do prętów o łagodnej zmianie przekroju,
- do prętów cienkich, poddanych działaniu momentu zginającego, zmieniającego się wzdłuż osi pręta,
- do prętów słabo zakrzywionych.

Stosowanie liniowej teorii zginania w przypadkach a) i b) daje wyniki dokładne. W prętach o zmiennym przekroju (przypadek c)) – podobnie jak przy działaniu siły normalnej – poza naprężeniem  $\sigma_x$  występują również inne składowe stanu naprężenia. W przypadku d), gdy moment zginający zmienia się wzdłuż osi pręta (np.  $M = M(x)$ ), zgodnie z równaniem różniczkowym równowagi (por. wzór (14.25)) musi wystąpić również siła poprzeczna  $Q(x) = dM/dx$ . Obecność deformacji wywołanych siłą poprzeczną (por. rozdz. 11.) prowadzi do wniosku, że hipoteza *Bernoulliego* jest niesłuszna. Jeżeli jednak wymiary poprzeczne pręta są wyraźnie mniejsze od jego długości (pręt jest cienki), to wpływ sił poprzecznych na wartości ugięć można pominąć<sup>\*)</sup>. Wobec powyższego uogólniona postać równania różniczkowego linii ugięcia, obejmująca również przypadki b), c) i d) jest następująca:

$$E(x) \cdot J(x) \frac{d^2 w_0}{dx^2} = -M(x). \quad (10.22)$$

Zakrzywienie osi pręta prowadzi do nieliniowego rozkładu naprężeń normalnych w obrębie przekroju. Problematyka prętów silnie zakrzywionych, w których nieliniowy rozkład naprężeń wprowadza istotne różnice ilościowe, będzie omówiona w rozdziale 13.

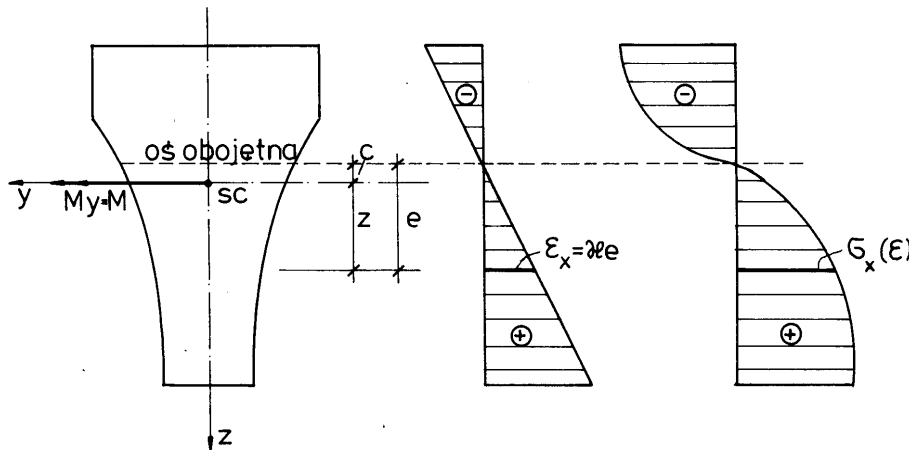
<sup>\*)</sup> Patrz rozdz. 11.1.3.

## 10.1.6. Zależności energetyczne

Wyznamy wartość całki objętościowej z iloczynu tensorów naprężenia i odkształcenia przy zginaniu pręta. Jeśli przyjmiemy, że jedyną niezerową współrzędną tensora naprężenia jest  $\sigma_{11} = \sigma_x$ , otrzymamy:

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV = \int_s \left[ \int_A \sigma_x \varepsilon_x dA \right] ds,$$

gdzie  $s$  jest długością pręta (może to być również pręt słabo zakrzywiony), a  $ds$  elementem łuku mierzonym na osi pręta.



Rys. 10.12

Dla bardzo małych odkształceń, zgodnie z hipotezą płaskich przekrojów,  $\varepsilon_x = \kappa \cdot e$ . Jeżeli ograniczymy się do przypadków, w których wektor momentu zginającego  $M_g = M_y = M$  i pokrywa się z główną osią bezwładności, to  $e = z + c$ , przy czym  $c$  jest odległością osi obojętnej od osi ciężkości (por. rys. 10.12). Wobec tego

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_V \kappa \left[ \int_A \sigma_x (z+c) dA \right] ds = \int_s \kappa \left[ \int_A \sigma_x z dA + c \int_A \sigma_x dA \right] ds.$$

Ponieważ

$$\int_A \sigma_x z dA = M_y = M \quad \text{oraz} \quad \int_A \sigma_x dA = N = 0,$$

więc

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_s M(s) \kappa(s) ds. \quad (10.23)$$

Wzór (10.23) jest słuszny również dla nieliniowej zależności  $\sigma_x(\varepsilon_x)$ , przy czym w przypadku ogólnym moment zginający  $M$  i krzywizna mogą się zmieniać wzdłuż osi pręta. Z wyprowadzonej zależności wynika, że moment zginający wykonuje pracę na przyrostach kąta obrotu:  $d\varphi = \kappa ds$ . Wnioskujemy stąd, że skupiony moment zginający (np. moment zewnętrzny działający na końcowy przekrój pręta) wykonuje pracę na kącie obrotu przekroju  $\varphi$ .

Jeśli pręt jest liniowo-sprężysty, to energia sprężysta, zawarta wewnątrz pręta

$$U = \frac{1}{2} \int_s M \kappa ds.$$

Ponieważ krzywizna  $\kappa = M/(EJ)$ , więc

$$U = U_M = \frac{1}{2} \int_s \frac{M^2}{EJ} \cdot ds \quad (10.24)$$

lub

$$U = U_\kappa = \frac{1}{2} \int_s EJ \kappa^2 \cdot ds. \quad (10.24a)$$

Zależność (10.23) służy również do obliczenia wewnętrznych prac wirtualnych:

$$\int_V \sigma_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} dV = \int_s M \cdot \kappa \cdot ds, \quad (10.25)$$

$$\int_V \bar{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_s \bar{M} \cdot \kappa ds. \quad (10.26)$$

Wielkości wirtualne oznaczono nadkreśleniem.

## 10.2. METODY WYZNACZANIA LINII UGIĘCIA I ZASTOSOWANIA RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO LINII UGIĘCIA

### 10.2.1. Postacie równania różniczkowego linii ugięcia. Warunki brzegowe

Pręt zginany nazywamy krótko *belką*, a przez ugięcie rozumiemy przemieszczenie punktów osi ciężkości w płaszczyźnie zginania. W dalszym ciągu dla skrócenia zapisu ugięcie belki będziemy oznaczać przez  $w(x)$ , z pominięciem indeksu "0". Z rozważań zawartych w p. 10.1 wiadomo, że równanie różniczkowe linii ugięcia (wzór (10.22)) ma postać:

$$EJ w'' = -M(x). \quad (10.27)$$

Po zróżniczkowaniu tego równania względem  $x$  otrzymujemy:

$$(EJ w'')' = -Q(x). \quad (10.28)$$

Ponowne zróżniczkowanie równania (10.28) prowadzi do wyniku:

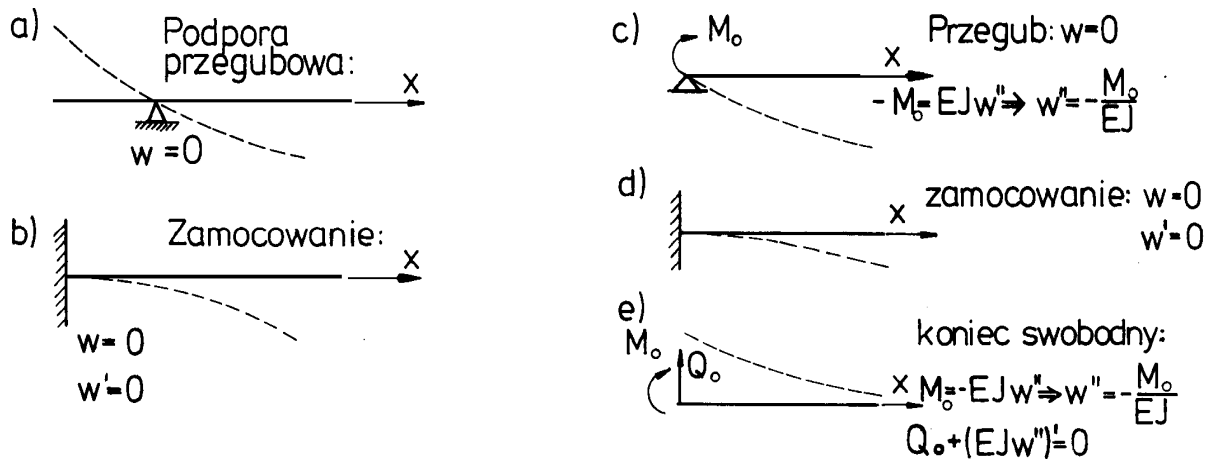
$$(EJ w'')'' = q(x). \quad (10.29)$$

W wyprowadzeniu powyższych równań skorzystaliśmy ze związków różniczkowych między momentem zginającym, siłą poprzeczną i obciążeniem (por. wzór (13.25)):

$$\left. \begin{aligned} M(x)' &= Q(x), \\ Q(x)' &= -q(x). \end{aligned} \right\} \quad (10.30)$$

Zależności (10.27) ÷ (10.29) przedstawiają 3 postacie równania różniczkowego linii ugięcia. W przypadku równania (10.27) trzeba znać funkcję momentów  $M(x)$ , co ogranicza stosowanie go do układów statycznie wyznaczalnych. Równanie (10.28) rzadko służy do wyznaczania ugięć, jest natomiast użyteczne w formułowaniu warunków brzegowych. Najogólniejszą postacią równania różniczkowego linii ugięcia jest równanie (10.29). Znajduje ono zastosowanie również w układach statycznie niewyznaczalnych, bo do rozwiązania wystarczy znać tylko funkcję obciążenia  $q(x)$ .





Rys. 10.13

Stałe całkowania, których liczba jest równa rzędowi równania, wyznaczamy z warunków brzegowych. Dla równania drugiego rzędu (10.27) warunki te sprowadzają się do podania znanych wartości ugięcia  $w$  lub kąta obrotu  $\varphi = w'$ . I tak na przykład:

$$\left. \begin{array}{l} w=0 \quad \text{dla podpory przegubowej (rys. 10.13a),} \\ w=0, w'=0 \quad \text{dla utwierdzenia (rys. 10.13b).} \end{array} \right\} \quad (10.31)$$

W równaniu (10.29) podaje się po 2 warunki brzegowe na każdym końcu belki (razem 4 warunki do wyznaczenia czterech stałych). Przykładowo, jeśli  $EJ = \text{const}$ , to

– dla podpory przegubowej obciążonej znanym momentem  $M_0$  (rys. 10.13c):

$$\left. \begin{array}{l} w=0 \\ w'' = -\frac{M_0}{EJ} \end{array} \right\} \quad (10.32a)$$

– dla utwierdzenia (rys. 10.13d):

$$\left. \begin{array}{l} w=0, \\ w'=0. \end{array} \right\} \quad (10.32b)$$

– dla końca swobodnego obciążonego znanym momentem  $M_0$  i znaną siłą poprzeczną  $Q_0$  (rys. 10.13e):

$$\left. \begin{array}{l} w'' = -\frac{M_0}{EJ}, \\ w''' = -\frac{Q_0}{EJ}. \end{array} \right\} \quad (10.32c)$$

## 10.2.2. Całkowanie równania drugiego rzędu

Wyznamy linię ugięcia belki swobodnie podpartej o stałym przekroju ( $EJ = \text{const}$ ), poddanej działaniu obciążenia równomiernego  $q(x) = q = \text{const}$  (rys. 10.14).

Moment zginający jest opisany funkcją:

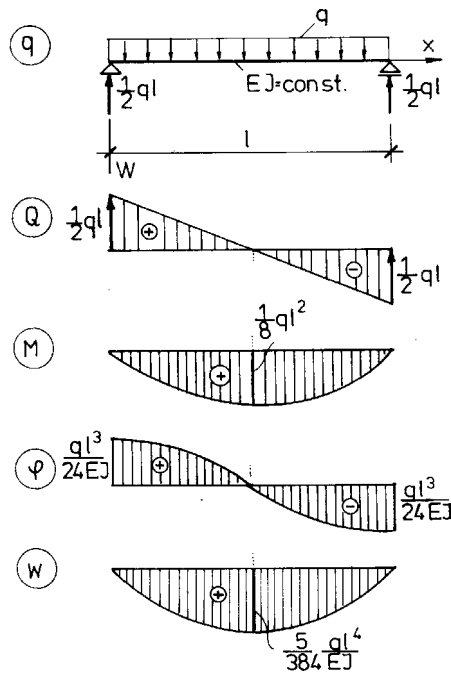
$$M(x) = \frac{ql}{2}x - q\frac{x^2}{2}.$$

Wobec tego równanie (10.27) przyjmuje postać:

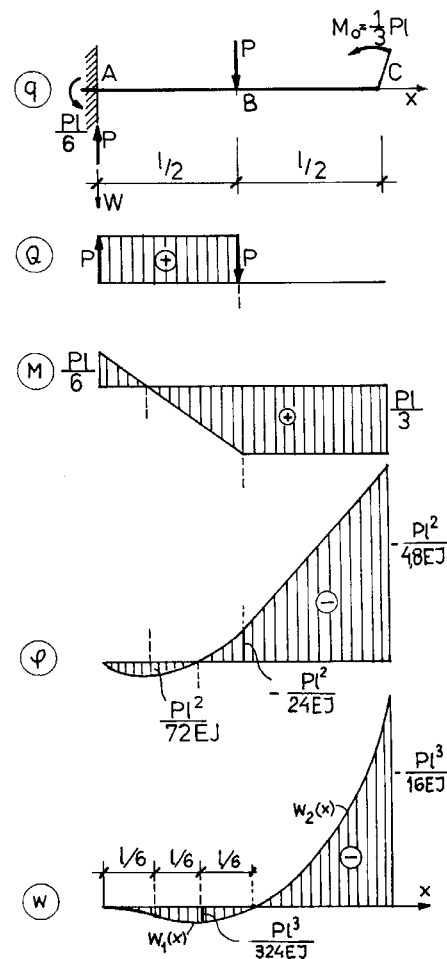
$$(a) \quad EJw'' = -\frac{ql}{2}x + q\frac{x^2}{2},$$

a warunki brzegowe są następujące

$$(b) \quad w(0) = 0, \quad w(l) = 0.$$



Rys. 10.14



Rys. 10.15

Dwukrotne całkowanie równania (a) daje kolejno:

$$EJw' = -\frac{ql}{4}x^2 + \frac{q}{6}x^3 + C_1,$$

$$EJw = -\frac{ql}{12}x^3 + \frac{q}{24}x^4 + C_1x + C_2.$$

Z warunków brzegowych mamy:

$$w(0) = 0: C_2 = 0,$$

$$w(l) = 0: C_1 = \frac{ql^3}{24}.$$

Wobec tego

$$(c) \quad \begin{cases} w(x) = \frac{ql^4}{24EJ} \left[ \left(\frac{x}{l}\right) - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4 \right], \\ \varphi(x) = w'(x) = \frac{ql^3}{24EJ} \left[ 1 - 6\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]. \end{cases}$$

Z równań (c) otrzymujemy strzałkę ugięcia  $\Delta = w_{\max}$  oraz kąt obrotu na podporze  $\varphi(0)$ :

$$(d) \quad \begin{cases} \Delta = w_{\max} = w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}, \\ \varphi_{\max} = \varphi(0) = \frac{ql^3}{24EJ}. \end{cases}$$

Warto zwrócić uwagę, że jeżeli znamy linię ugięcia  $w(x)$ , to określone są zarówno wielkości kinematyczne, jak i statyczne. Kąt obrotu  $\varphi$ , moment zginający  $M$ , siłę poprzeczną  $Q$  i obciążenie  $q$  uzyskujemy w wyniku kolejnego różniczkowania funkcji  $w(x)$  według schematu:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= w', \\ M &= -EJ\varphi', \\ Q &= M', \\ q &= -Q'. \end{aligned} \right\} \quad (10.33)$$

Wykresy wymienionych wielkości podano na rys. 10.14.

Wyznamy teraz linię ugięcia belki wspornikowej przedstawionej na rys. 10.15. Równania momentów są następujące:

$$\begin{aligned} - \text{w przedziale I } 0 \leq x \leq \frac{l}{2} & \quad M_1(x) = -\frac{Pl}{6} + Px, \\ - \text{w przedziale II } \frac{l}{2} \leq x \leq l & \quad M_2(x) = \frac{Pl}{3} = \text{const.} \end{aligned}$$

Ponieważ funkcję  $M(x)$  określają 2 wzory, więc trzeba rozwiązać 2 równania różniczkowe:

$$\begin{aligned}
 EJ w_1'' &= \frac{Pl}{6} - Px, & \text{oraz} & \quad EJ w_2'' = -\frac{Pl}{3}, \\
 EJ w_1' &= \frac{Pl}{6}x - P\frac{x^2}{2} + C_1, & EJ w_2' &= -\frac{Pl}{3}x + C_2, \\
 EJ w_1 &= \frac{Pl}{12}x^2 - P\frac{x^3}{6} + C_1x + D_1, & EJ w_2 &= -\frac{Pl}{6}x^2 + C_2x + D_2.
 \end{aligned}$$

Powstaje więc problem wyznaczenia czterech stałych całkowania (po dwie stałe w każdym z przedziałów). Warunki brzegowe dla funkcji  $w_1(x)$  zgodnie z zależnością (10.31) są następujące:

- 1)  $w_1(0) = 0$ ,
- 2)  $\varphi(0) = w_1'(0) = 0$ .

Funkcję  $w_2(x)$  dobieramy tak, by linia ugięcia była funkcją ciągłą wraz z pierwszą pochodną, tzn. by

- 3)  $w_1(l/2) = w_2(l/2)$ ,
- 4)  $w_1'(l/2) = w_2'(l/2)$ .

Wykorzystanie warunków 1) i 2) daje  $C_1 = D_1 = 0$ . Z kolei z warunków 3) i 4) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 w_1\left(\frac{l}{2}\right) &= 0, & \text{skąd} & \quad w_2\left(\frac{l}{2}\right) = \left(-\frac{Pl^3}{24} + C_2\frac{l}{2} + D_2\right)\frac{1}{EJ} = 0, \\
 w_1'\left(\frac{l}{2}\right) &= -\frac{Pl^2}{24EJ}, & \text{skąd} & \quad w_2'\left(\frac{l}{2}\right) = \left(-\frac{Pl^2}{6} + C_2\right)\frac{1}{EJ} = -\frac{Pl^2}{3EJ}.
 \end{aligned}$$

Wobec powyższego

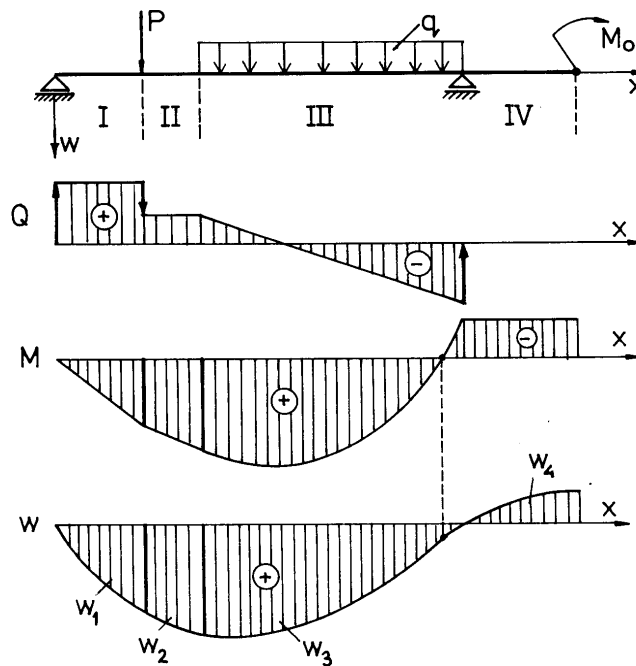
$$C_2 = \frac{Pl^2}{8} \quad \text{oraz} \quad D_2 = -\frac{Pl^3}{48}.$$

Rozwiązanie zadania jest następujące:

$$(e) \quad w(x) = \begin{cases} \frac{Pl^3}{12EJ} \left[ \left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right], & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ \frac{Pl^3}{48EJ} \left[ -8\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 6\left(\frac{x}{l}\right) - 1 \right], & \frac{l}{2} \leq x \leq l, \end{cases}$$

a jego ilustracją jest rys. 10.15. Z przebiegu rozwiązania tego zadania wynika, że gdy obciążenie nie jest ciągle (większa liczba przedziałów), wyznaczenie linii ugięcia staje się kłopotliwe, bo określenie stałych całkowania wymaga rozwiązania dosyć dużego układu równań liniowych. Liczba tych równań jest równa podwójnej liczbie przedziałów (np. w zadaniu z rysunku 10.16 mamy  $2 \times 4 = 8$  równań). Jeżeli jednak obciążenie zapiszemy w postaci dystrybucji, to zadanie sprowadza się zawsze do wyznaczenia tylko dwóch stałych. Taki sposób całkowania obmyślił już w XIX wieku *Clebsch* (1833-1872), nie znając teorii dystrybucji. Sposób *Clebscha* polega na takim zapisie równania momentów, by stałe  $C_i$  oraz  $D_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) w każdym z  $n$  przedziałów były sobie równe. Bardzo ogólną metodą numeryczną rozwiązania

równań różniczkowych jest tzw. metoda różnic skończonych. Opis i zastosowania tych metod przedstawiono w dodatku.



Rys. 10.16

### 10.2.3. Metoda obciążenia krzywiznami<sup>\*)</sup>

Równanie różniczkowe linii ugięcia w postaci (10.27):

$$(f) \quad w''(x) = -\frac{M(x)}{E(x)J(x)}$$

jest bardzo podobne do równania różniczkowego równowagi, wiążącego moment zginający  $M$  z obciążeniem  $q$ :

$$(g) \quad M'(x) = -q(x).$$

Równanie (g) otrzymuje się przez zróżniczkowanie pierwszego z równań (10.30) i dodanie do drugiego.

Jeśli w równaniu (f) przyjmiemy, że:

$$q^*(x) = k(x) = \frac{M(x)}{E(x)J(x)}, \quad (10.34)$$

a ugięcie  $w(x)$  oznaczymy przez  $M^*(x)$ :

$$w(x) = M^*(x), \quad (10.35)$$

to otrzymujemy następujące równanie różniczkowe:

$$(h) \quad M^*(x)'' = -q^*(x).$$

Jeżeli pominiemy gwiazdki, to równanie (h) jest identyczne z równaniem równowagi pręta (g). Wnioskujemy stąd, że kształt wykresu momentów  $M^*(x)$  pochodzących od obciążenia krzywizną  $q^*(x) = k(x)$  odpowiada kształtowi linii ugięcia. Po raz pierwszy na fakt ten zwrócił uwagę *Mohr* w 1868 roku. Należy jednak podkreślić, że identyczność dwóch równań różniczkowych prowadzi tylko wówczas do identycznych rozwiązań, gdy warunki brzegowe w obu zadaniach są takie same. W związku z tym musimy wprowadzić pewne fikcyjne warunki brzegowe. Belka fikcyjna poddana obciążeniu  $q^*(x)$  musi być tak obrona, by odpowiadała rzeczywistym warunkom brzegowym dla funkcji ugięcia. Trzeba tu pamiętać, że

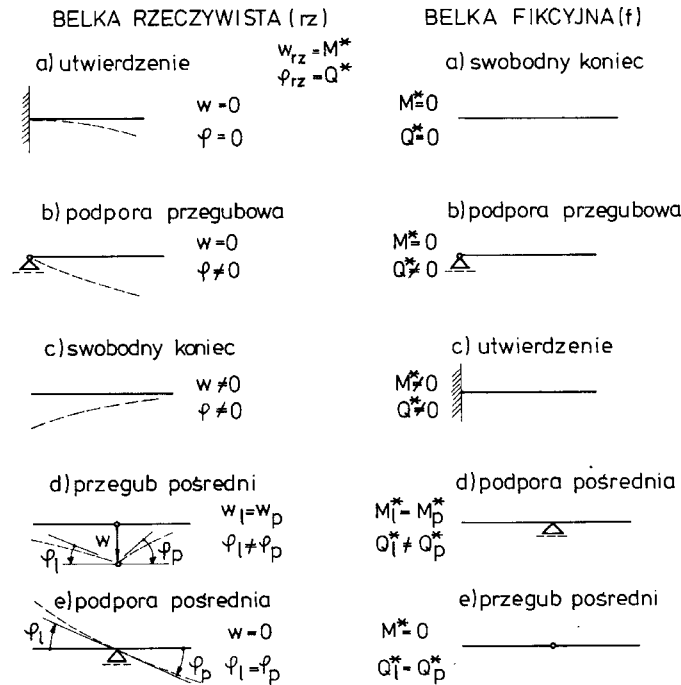
<sup>\*)</sup> Metoda ta jest nazywana również *metodą momentów wtórnych*.

zgodnie ze wzorem (10.35) ugięcie  $w(x)$  jest równe fikcyjnemu momentowi  $M^*(x)$ , a kąt obrotu  $\varphi(x)$  jest równy fikcyjnej sile poprzecznej  $Q^*(x)$ :

$$\varphi(x) = Q^*(x), \quad (10.36)$$

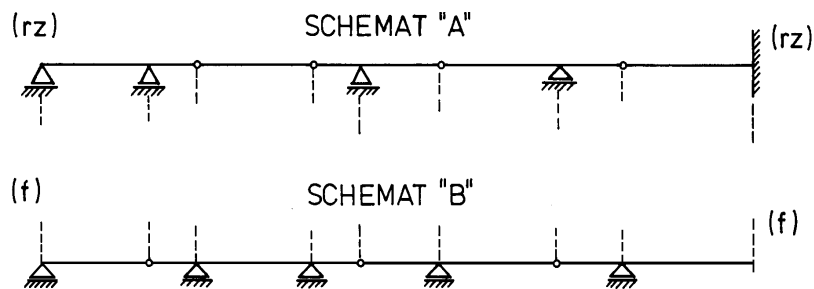
bo

$$\varphi(x) = w'(x) = M^{*'}(x) = Q^*(x).$$



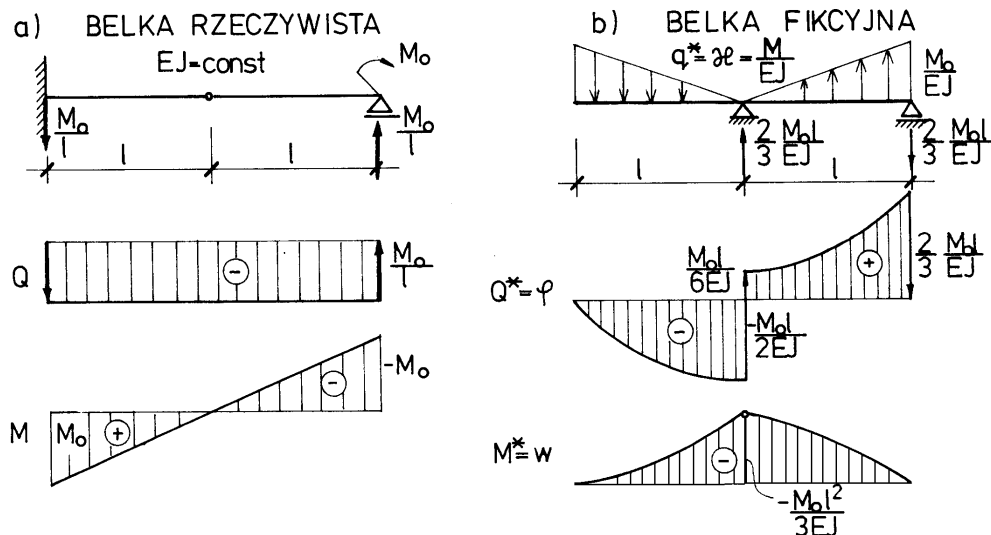
Rys. 10.17

Relacje między różnymi wariantami podparcia belek rzeczywistych i belek fikcyjnych przedstawia rys. 10.17. Dla objaśnienia przytoczymy przykładowo sposób rozumowania dotyczący przypadku e). W belce rzeczywistej występuje podpora pośrednia, dla której ugięcie jest równe zero, a kąt obrotu z lewej strony podpory  $\varphi_l$  jest równy kątowi obrotu z prawej strony podpory  $\varphi_p$ . Wobec tego belce fikcyjnej należy przypisać taki punkt, w którym wielkości statyczne:  $M^* = 0$  oraz  $Q_l^* = Q_p^*$ . Własności takie ma przegub pośredni.



Rys. 10.18

Na podstawie rysunku 10.17 schematowi belki rzeczywistej można bez trudu przyporządkować schemat belki fikcyjnej (por. rys. 10.18). Zwróćmy uwagę na to, że rzeczywistej belce statycznie wyznaczalnej odpowiada zawsze statycznie wyznaczalna belka fikcyjna. Relacje między warunkami brzegowymi zachodzą w obu kierunkach, tzn. jeśli rzeczywistemu schematowi  $A$  odpowiada fikcyjny schemat statyczny  $B$ , to rzeczywistemu schematowi  $B$  odpowiada fikcyjny schemat  $A$ . Jeśli układ rzeczywisty jest statycznie niewyznaczalny, to układ fikcyjny jest geometrycznie zmienny i na odwrót.



Rys. 10.19

W podsumowaniu rozważań stwierdzamy, co następuje. Aby wyznaczyć ugięcia  $w(x)$  i kąty obrotu belki  $\varphi(x)$  należy:

- narysować schemat statyczny i obciążenia belki rzeczywistej,
- sporządzić wykres momentów zginających w belce rzeczywistej,
- narysować schemat statyczny belki fikcyjnej i obciążyć ją krzywiznami

$$q^*(x) = \kappa(x) = \frac{M(x)}{E(x)J(x)} + \kappa_0(x),$$

gdzie  $\kappa_0(x)$  oznacza krzywiznę pochodzącą od innych wpływów niemechanicznych (np. od nierównomiernego ogrzania, skurczu) lub technologicznych (np. zakrzywienie spowodowane błędami wykonania),

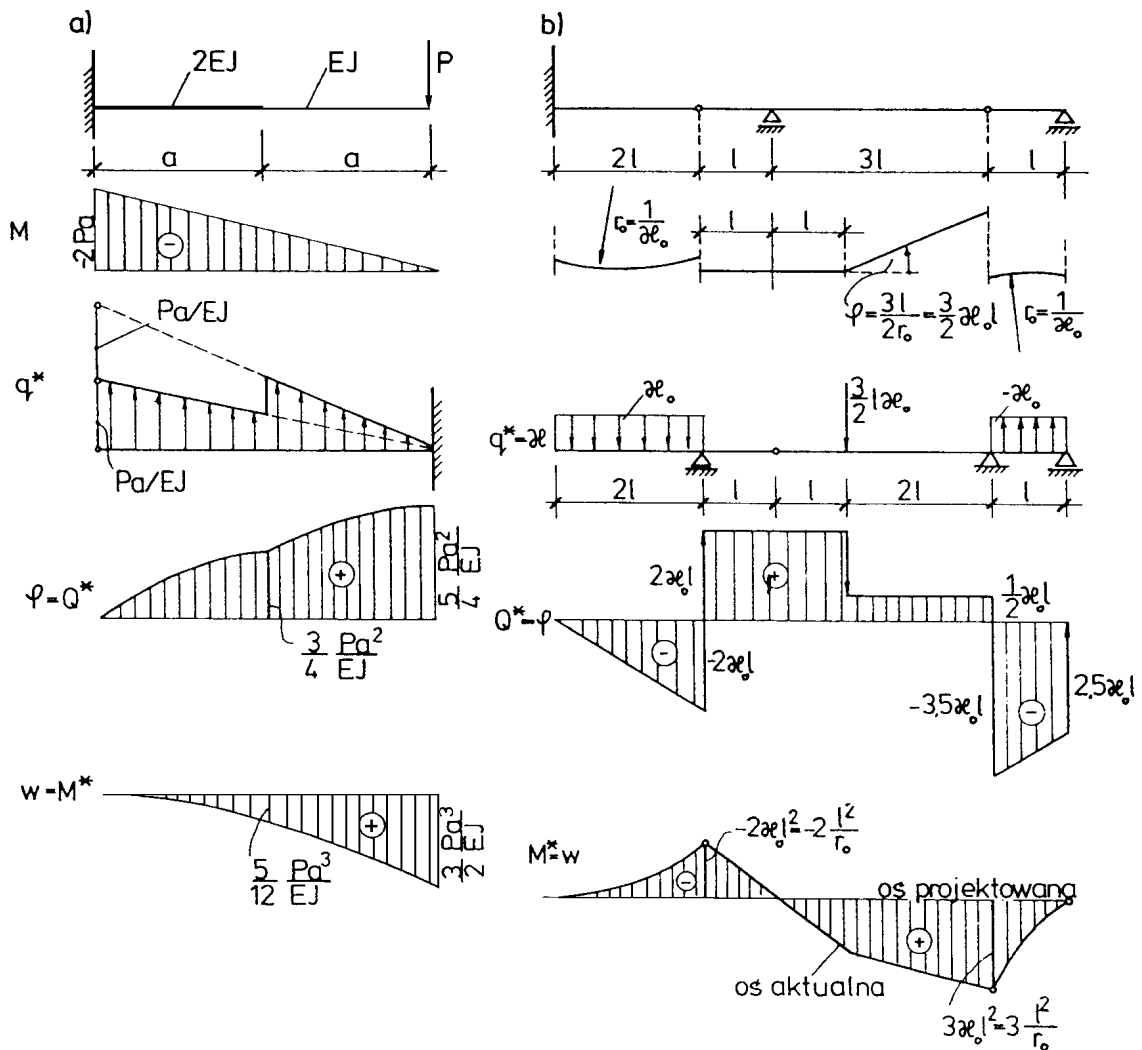
– wyznaczyć siły poprzeczne  $Q^*(x)$  i momenty zginające  $M^*(x)$  dla belki fikcyjnej (ugięcia belki  $w(x) = M^*(x)$ , a kąty obrotu  $\varphi(x) = Q^*(x)$ ).

Przedstawimy jeszcze przykłady zastosowań metody *Mohra*. Pierwszy przypadek dotyczy belki o stałej sztywności. Obciążenie i schemat statyczny oraz wykresy  $Q(x)$  i  $M(x)$  dla belki rzeczywistej podano na rys. 10.19a. Rysunek 10.19b przedstawia obciążenie  $q^*$  i schemat statyczny belki fikcyjnej oraz wykresy fikcyjnej siły poprzecznej  $Q^*(x) = \varphi(x)$  i fikcyjnego momentu zginającego  $M^*(x) = w(x)$ .

Na rysunku 10.20a zestawiono rezultaty obliczeń belki wspornikowej o skokowo zmiennej sztywności. Do wykonania belki z rys. 10.20b zamiast prętów prostoliniowych użyto dwóch skrajnych prętów wstępnie zakrzywionych o stałej krzywiznie  $\kappa_0 = 1/r_0 = \text{const}$ , a pręt środkowy jest załamany pod kątem:

$$\varphi_0 = 3l / (2r_0) = 3\kappa_0 l / 2.$$

Chodzi o obliczenie aktualnego położenia osi belki w odniesieniu do projektowanej osi prostoliniowej. Rozwiązanie tego zadania jest bardzo proste, bo znana jest z góry stała krzywizna  $\kappa_0$  a kąt  $\varphi_0$  jako krzywizna skoncentrowana jest siłą skupioną. Krzywizna  $\kappa_0$ , i kąt  $\varphi_0$  stanowią obciążenie belki fikcyjnej. Rezultaty obliczeń przedstawiono na wykresach.



Rys. 10.20

Metoda obciążenia krzywiznami ma duże znaczenie w mechanice budowli, gdzie z pewnymi modyfikacjami stosuje się ją również do obliczenia ugięć kratownic i łuków (tzw. metoda ciężarków sprężystych) oraz do wyznaczania funkcji prędkości ugięć przy badaniu nośności granicznej konstrukcji prętowych i powierzchniowych. Metoda *Mohra* jest ogólną metodą rozwiązywania równania różniczkowego  $y'' = f(x)$ , przy czym  $f(x)$  może być również dystrybucją.

#### 10.2.4. Obliczanie belek statycznie niewyznaczalnych. Belki na podłożu sprężystym

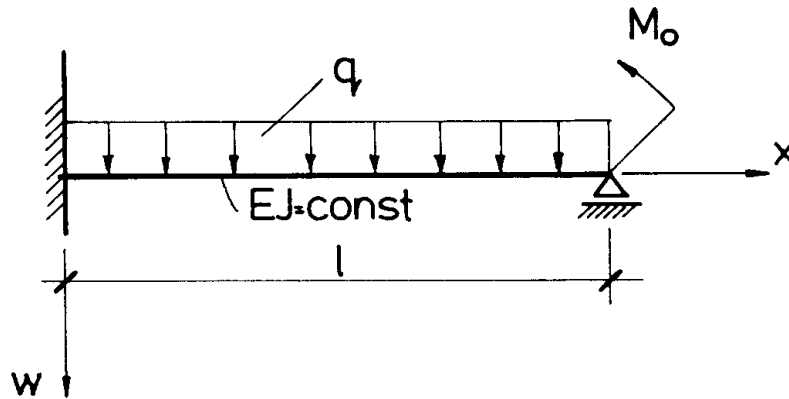
W układach statycznie wyznaczalnych do określenia sił wewnętrznych wystarcza wykorzystać tylko równania równowagi: liczba więzów podporowych i wewnętrznych jest równa liczbie równań statyki. Jeżeli liczba więzów jest większa od liczby równań równowagi, to mamy do czynienia z tzw. układami statycznie niewyznaczalnymi. Do obliczenia sił wewnętrznych w takich układach oprócz równań równowagi wykorzystuje się jeszcze równania ciągłości przemieszczeń. Teoria układów statycznie niewyznaczalnych jest bardzo rozbudowana i dobrze znane są ogólne metody rozwiązywania takich układów. W pewnych przypadkach dogodnie jest jednak bezpośrednio zastosowanie równania różniczkowego linii ugięcia czwartego rzędu w postaci (10.29). Poniżej przedstawimy rozwiązania dwóch zadań o dużym znaczeniu praktycznym.



## Przykład 1

Rozważmy belkę przedstawioną na rys. 10.21. Warunki brzegowe na funkcję  $w(x)$  są następujące (por. wzory (10.32)):

$$1) w(0) = 0, \quad 2) w'(0) = 0, \quad 3) w(l) = 0, \quad 4) w''(l) = -\frac{M_0}{EJ}.$$



Rys. 10.21

## Rozwiązanie

Wykonamy całkowanie równania różniczkowego linii ugięcia:

$$\begin{aligned}
 EJw^{IV} &= q, \\
 EJw^{III} &= qx + C_1, \\
 EJw'' &= q\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2, \\
 EJw' &= q\frac{x^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3, \\
 EJw &= q\frac{x^4}{24} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4.
 \end{aligned}$$

(i)

Z warunków brzegowych 1) i 2) wynika, że  $C_3 = C_4 = 0$ . Stałe  $C_1$  i  $C_2$  obliczymy z pozostałych warunków brzegowych:

$$\begin{aligned}
 3) w(l) = 0 : \quad & \frac{ql^4}{24} + C_1\frac{l^3}{6} + C_2\frac{l^2}{2} = 0, \\
 4) w''(l) = -\frac{M_0}{EJ} : \quad & \frac{ql^2}{2} + C_1\frac{l}{2} + C_2 = -M_0.
 \end{aligned}$$

Rozwiązaniem tego układu są wartości:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -\frac{5}{8}ql - \frac{3M_0}{2l}, \\
 C_2 &= \frac{1}{8}ql^2 + \frac{1}{2}M_0.
 \end{aligned}$$

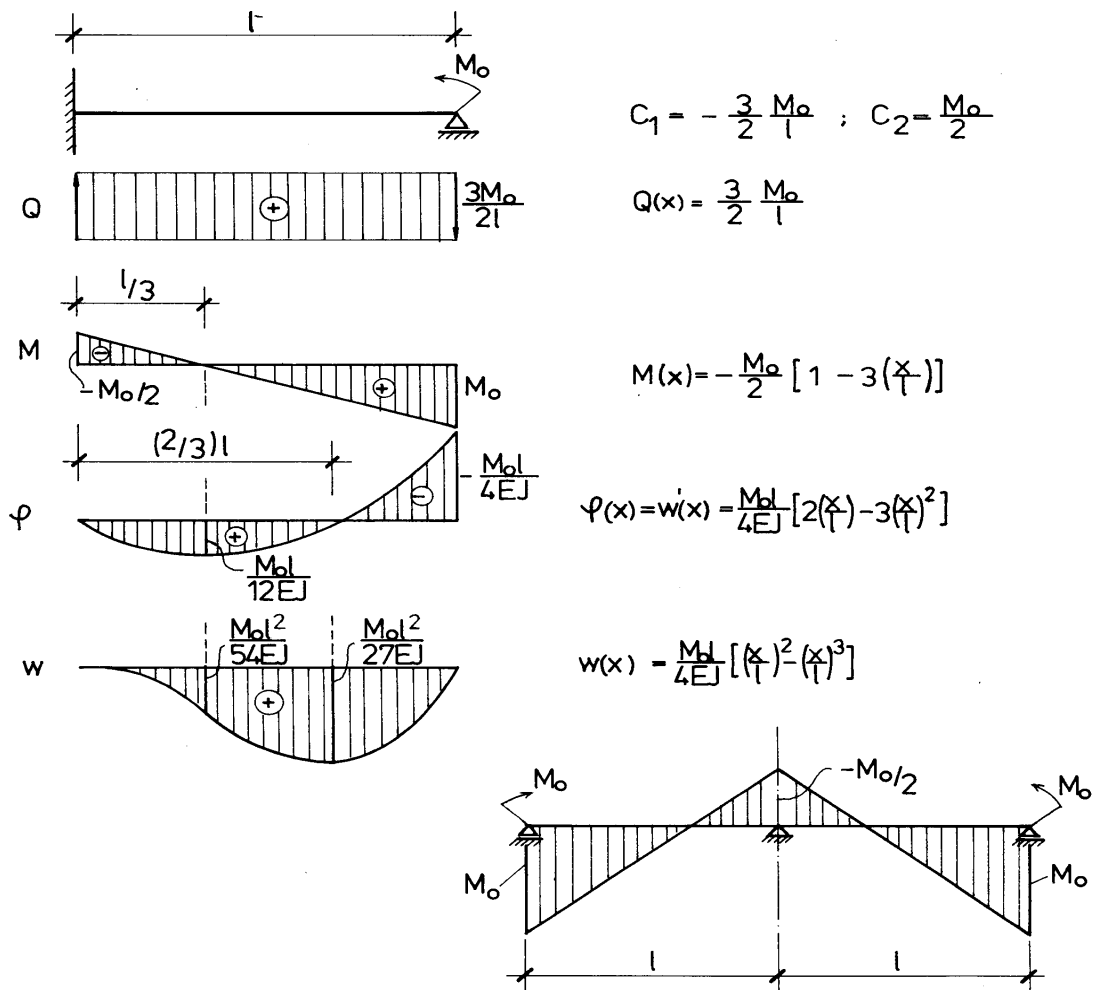
(j)

Po ich podstawieniu do równań (i) otrzymujemy:

$$(k) \begin{cases} w(x) = \frac{l^4}{24EJ} \left[ q \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^4 - 4\left(\frac{5}{8}q + \frac{3M_0}{2l^2}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^3 + 12\left(\frac{1}{8}q + \frac{M_0}{2l^2}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^2 \right], \\ \varphi(x) = w'(x) = \frac{l^3}{6EJ} \left[ q \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{5}{8}q + \frac{3M_0}{2l^2}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 6\left(\frac{1}{8}q + \frac{M_0}{2l^2}\right)\left(\frac{x}{l}\right) \right], \\ M(x) = -EJ = -EJw'' = -\frac{l^2}{2} \left[ q \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{8}q + \frac{3M_0}{2l^2}\right)\left(\frac{x}{l}\right) + 2\left(\frac{1}{8}q + \frac{M_0}{2l^2}\right) \right], \\ Q(x) = M'(x) = -l \left[ q \cdot \left(\frac{x}{l}\right) - \left(\frac{5}{8}q + \frac{3M_0}{2l^2}\right) \right]. \end{cases}$$

Rozważmy teraz trzy przypadki szczególne

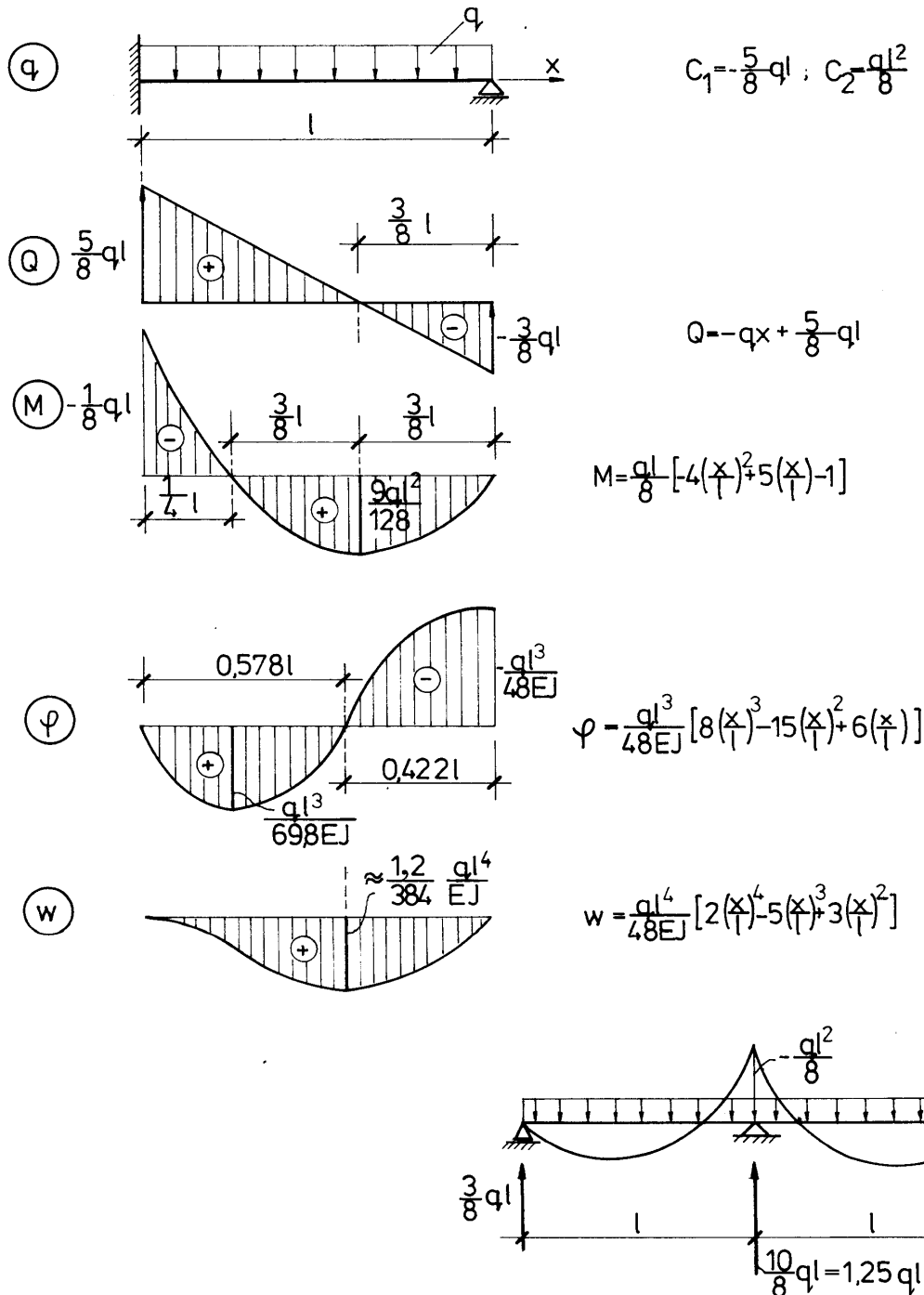
- a)  $q = 0, \quad M_0 \neq 0$  (rys. 10.22),  
 b)  $q \neq 0, \quad M_0 = 0$  (rys. 10.23),  
 c)  $q \neq 0, \quad M_0 = -\frac{ql^2}{12}$  (rys. 10.24).



Rys. 10.22

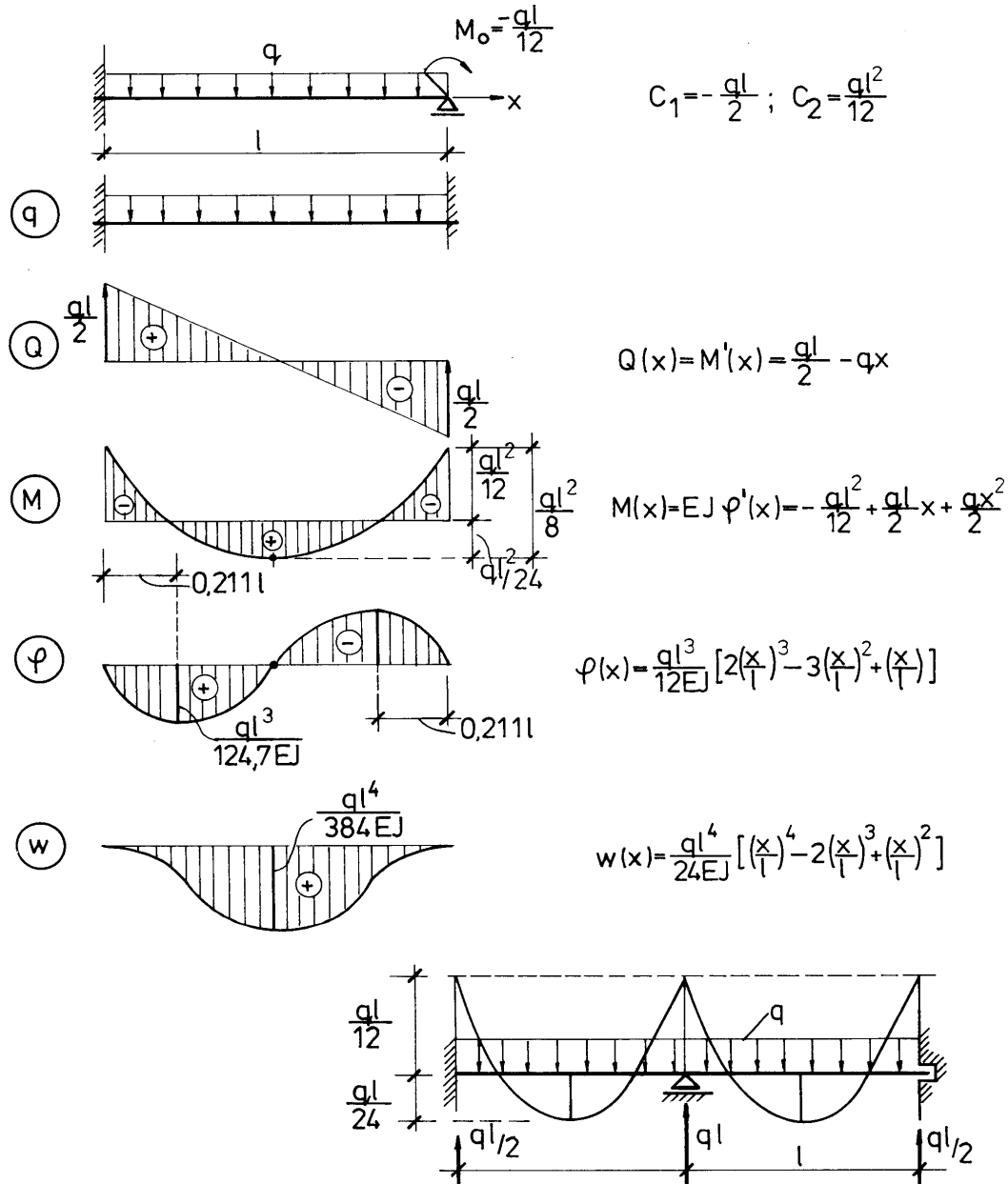
W przypadku a) niezależnie od wartości obciążenia dla  $x = l/3$  moment zginający jest równy zero, a w miejscu utwierdzenia jest równy  $-M_0/2$ .

W przypadku b) charakterystyczne jest to, że reakcja na podporze utwierdzonej wynosi  $5ql/8$  i jest większa od  $ql/2$ , a maksymalna bezwzględna wartość momentu równa się  $ql^2/8$  i jest taka sama jak w belce swobodnie podpartej. Wynika stąd, że utwierdzenie belki na jednej podporze z punktu widzenia wytrzymałości nie daje żadnej korzyści, redukuje jednak w istotny sposób ugięcie (strzałka ugięcia jest około 2,4 razy mniejsza niż w belce swobodnie podpartej). Zwróćmy uwagę na to, że dla belki dwuprzęsłowej o podporach przegubowych reakcja na środkowej podporze jest o 25% większa od reakcji obliczonej dla dwóch oddzielnych belek swobodnie podpartych. Warto o tym pamiętać podczas projektowania tej podpory.



Rys. 10.23

Przypadek c) jest rozwiązaniem belki obustronnie utwierdzonej. W belce tej największa bezwzględna wartość momentu zginającego występuje na podporach i wynosi  $ql^2/12$ , a strzałka ugięcia jest 5 razy mniejsza niż w belce swobodnie podpartej. Każdy z rozważanych przypadków można uważać za rozwiązanie belki dwuprzęsłowej obciążonej symetrycznie.

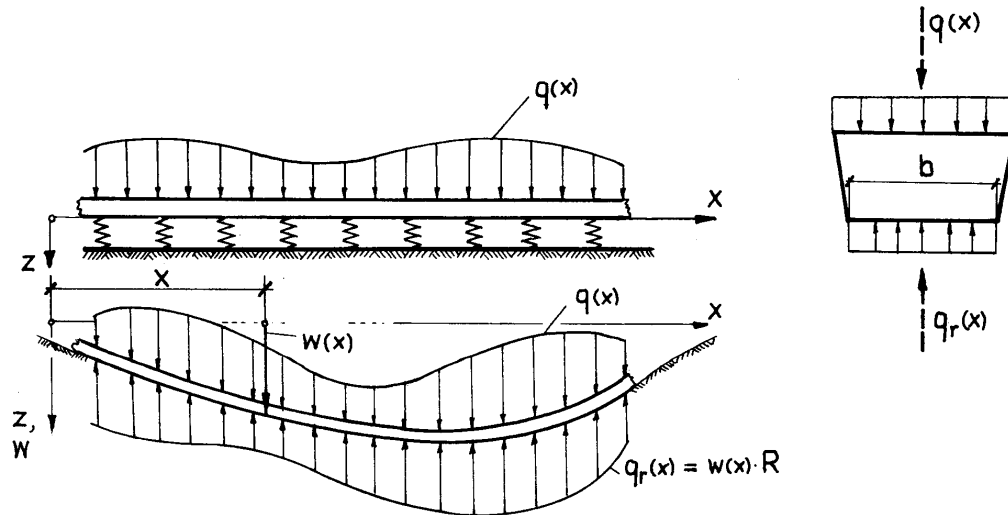


Rys. 10.24

### Przykład 2

Rozważmy belkę (np. ławę fundamentową, rurociąg) spoczywającą na podłożu gruntowym (rys. 10.25). Pod wpływem obciążenia  $q(x)$  belka wykazuje ugięcie  $w(x)$ . Równowaga belki jest spełniona dzięki wystąpieniu reakcji podłoża  $q_r(x)$ , rozłożonej w sposób ciągły. Jeżeli dla uproszczenia przyjmiemy, że podłoże składa się z wielu bardzo blisko siebie położonych sprężynek o sztywności  $R$ , to zgodnie z rys. 10.25 reakcję podłoża określa wzór:

$$q_r(x) = R \cdot w(x). \quad (10.37)$$



Rys. 10.25

### Rozwiązanie

Sztywność  $R$  zależy od szerokości belki  $b$  w poziomie kontaktu z podłożem i własności gruntu:

$$R = b C \text{ [MN/m}^2\text{]}, \quad (10.38)$$

gdzie  $C \text{ [MN/m}^3\text{]}$  oznacza tzw. współczynnik podłoża (np. dla drobnego piasku wynosi on około  $50 \text{ MN/m}^3$ , a dla iltu zwartego około  $2000 \text{ MN/m}^3$ ). Opisany wyżej model podłoża nazywamy podłożem sprężystym lub podłożem *Winklera* (1835-1888). Jego cechą charakterystyczną jest to, że przemieszczenia rozważanego punktu zależą tylko od wartości obciążenia w tym punkcie. Zasadnicze przybliżenie polega więc na założeniu, że ugięcia poszczególnych sprężynek są od siebie niezależne.

Do rozwiązywania belek na podłożu sprężystym wykorzystamy bezpośrednio równanie różniczkowe linii ugięcia czwartego rzędu z uwzględnieniem, że obliczeniowe obciążenie belki

$$(l) \quad q_0(x) = q(x) - q_r(x).$$

Wobec tego równanie różniczkowe linii ugięcia belki pryzmatycznej ma postać:

$$(m) \quad EJ \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x) - R \cdot w(x)$$

lub po uporządkowaniu:

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + R \cdot w(x) = q(x). \quad (10.39)$$

W dalszych obliczeniach wygodne jest wprowadzenie zmiennej bezwymiarowej

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad (10.40)$$

skąd

$$dx = L \cdot d\xi,$$

$$dx^4 = L^4 d\xi^4,$$

gdzie  $L$  oznacza pewną stałą o wymiarze długości. Dla ułatwienia obliczeń długość  $L$  wybieramy tak, by

$$\frac{RL^4}{EJ} = 4, \quad \text{czyli } L = \sqrt[4]{\frac{4EJ}{R}}. \quad (10.41)$$

Równanie (10.39) przyjmuje ostatecznie następującą postać:

$$w^{IV} + 4w = \frac{4q}{R}, \quad \text{gdzie } w^{IV} = \frac{d^4 w}{d\xi^4}. \quad (10.42)$$

Rozwiązanie tego równania składa się z całki szczególnej równania niejednorodnego  $w_s(\xi)$  oraz całki ogólnej równania jednorodnego  $w_0(\xi)$ :

$$(n) \quad w(\xi) = w_s(\xi) + w_0(\xi).$$

Funkcja  $w_0(\xi)$  jest rozwiązaniem następującego równania różniczkowego:

$$(o) \quad w_0^{IV} + 4w_0 = 0.$$

Jeżeli  $w_0 = e^{t\xi}$ , to  $w_0^{IV} = t^4 e^{t\xi}$ , zatem równanie charakterystyczne

$$(p) \quad t^4 + 4 = 0$$

ma pierwiastki:

$$(q) \quad t_{1,2} = 1 \pm i, \quad t_{3,4} = -(1 \pm i), \quad i = \sqrt{-1}.$$

Całkę ogólną  $w_0(\xi)$  określa więc zależność:

$$(r) \quad w_0(\xi) = C_1 e^{\xi} e^{i\xi} + C_2 e^{\xi} e^{-i\xi} + C_3 e^{-\xi} e^{-i\xi} + C_4 e^{-\xi} e^{i\xi}.$$

Po wykorzystaniu wzoru Eulera

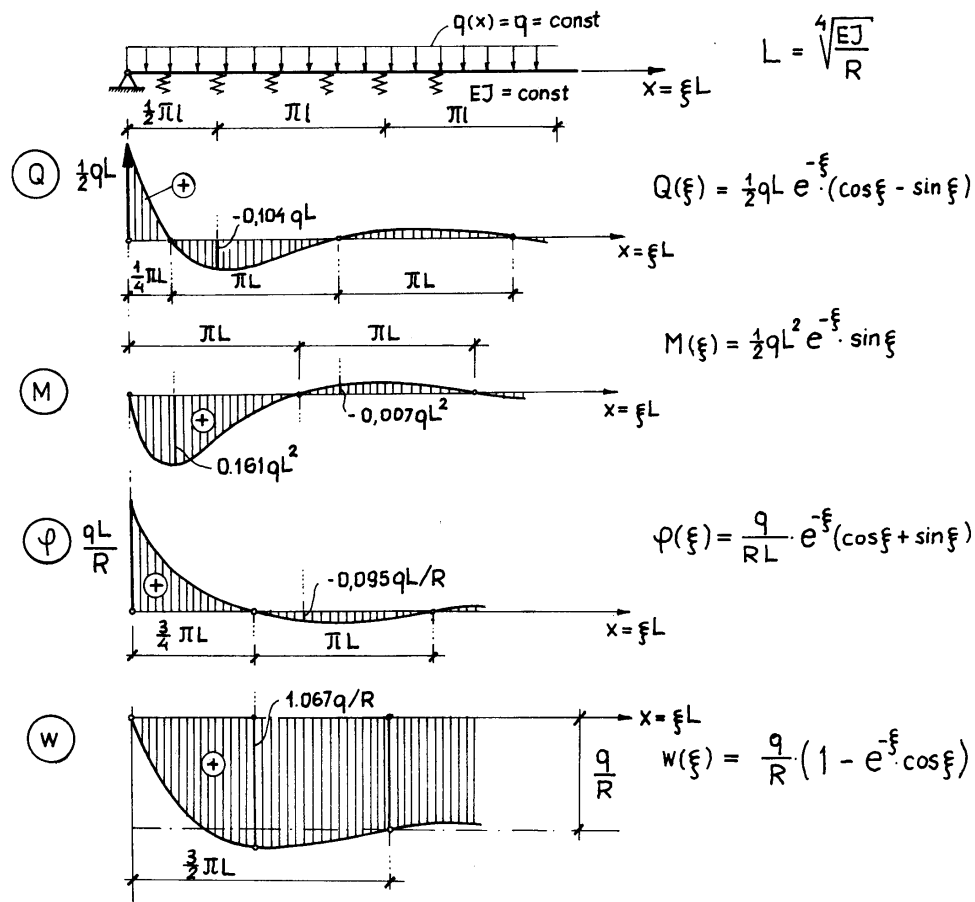
$$(s) \quad e^{\pm i\xi} = \cos \xi \pm i \cdot \sin \xi$$

rozwiązanie równania różniczkowego (10.42) można zapisać następująco:

$$w(\xi) = w_s(\xi) + e^{-\xi} (D_1 \cos \xi + D_2 \sin \xi) + e^{\xi} (D_3 \cos \xi + D_4 \sin \xi). \quad (10.43)$$

Całkę szczególną  $w_s(\xi)$  wyznaczamy każdorazowo w zależności od sposobu obciążenia belki. Gdy warunki brzegowe, z których wyznaczamy stałe całkowania, są podane za pośrednictwem sił wewnętrznych należy pamiętać, że

$$\left. \begin{aligned} M(\xi) &= -EJ \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{EJ}{L^2} \cdot \frac{d^2 w}{d\xi^2} = -\frac{RL^2}{4} \cdot \frac{d^2 w}{d\xi^2} \\ Q(\xi) &= -EJ \frac{d^3 w}{dx^3} = -\frac{EJ}{L^3} \cdot \frac{d^3 w}{d\xi^3} = -\frac{RL}{4} \cdot \frac{d^3 w}{d\xi^3} \end{aligned} \right\} \quad (10.44)$$



Rys. 10.26

Rozwiążemy teraz konkretny przykład belki o nieskończonej długości, zilustrowany rys. 10.26. Obciążenie belki jest równomierne ( $q(x) = q = \text{const}$ ), lewy jej koniec belki opiera się przegubowo na niepodatnej podporze, a prawy leży w nieskończoności. Warunki brzegowe na lewym końcu belki są następujące:

$$1) w(0) = 0. \quad 2) M(0) = 0, \quad \text{skąd} \quad w''(0) = 0.$$

Na końcu prawym, gdy  $x \rightarrow \infty$ , belka nie wykazuje już kątów obrotu i zakrzywienia. Wobec tego

$$3) w'(\infty) = 0, \quad 4) w''(\infty) = 0.$$

Całkę szczególną przyjmujemy w postaci:

$$(t) \quad w_s(\xi) = \frac{q}{R} = \text{const},$$

która, jak łatwo sprawdzić, spełnia równanie (10.42). Obliczymy jeszcze pochodne  $w'(\xi)$  i  $w''(\xi)$ :

$$(u) \quad w'(\xi) = w'_s(\xi) + e^{-\xi}[-D_1(\cos \xi + \sin \xi) + D_2(\cos \xi - \sin \xi)] + e^{\xi}[D_3(\cos \xi - \sin \xi) + D_4(\cos \xi + \sin \xi)],$$

$$(w) \quad w''(\xi) = w''_s(\xi) + 2e^{-\xi}(D_1 \sin \xi - D_2 \cos \xi) + 2e^{\xi}(-D_3 \sin \xi + D_4 \cos \xi).$$

Warunki brzegowe 3) i 4) będą spełnione, jeśli  $D_3 = D_4 = 0$ . Z warunków 1) i 2) mamy:

$$1) w(0) = 0: \quad \frac{q}{R} + D_1 + D_3 = 0, \quad \text{skąd} \quad D_1 = -\frac{q}{R},$$

$$2) w''(0) = 0: \quad -2D_2 + 2D_4 = 0, \quad \text{skąd} \quad D_2 = 0.$$

Po podstawieniu wartości stałej  $D_1$  oraz całki szczególnej  $w_s(\xi)$  do rozwiązania (10.43) oraz zależności (10.44) otrzymujemy wzory na ugięcie (reakcję podłoża), moment zginający i siłę poprzeczną. Wzory te łącznie z wykresami przedstawiono na rys. 10.26.