

11. DZIAŁANIE SIŁY POPRZECZNEJ

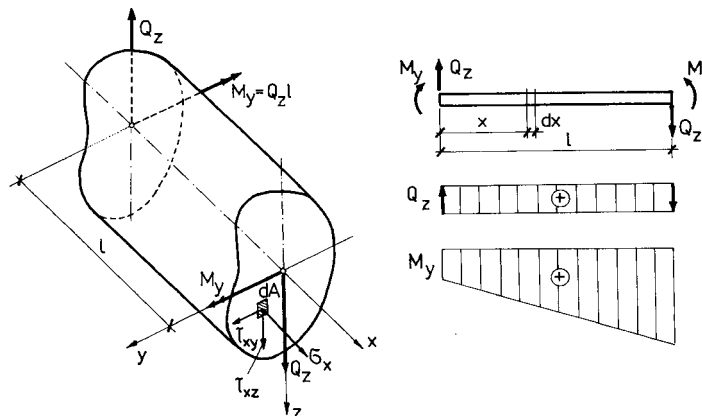


11.1. ZALEŻNOŚCI PODSTAWOWE

11.1.1. Obliczanie naprężeń

Rozważmy działanie siły poprzecznej Q_z na pręt pryzmatyczny przedstawiony na rysunku 11.1. Z równowagi tego pręta wynika, że siła poprzeczna nie może występować samodzielnie, gdyż zawsze musi jej towarzyszyć zmiana momentu zginającego o wektorze prostopadłym do wektora siły poprzecznej. Wniosek ten wypływa również z zależności różniczkowej (por. wzór (14.25)):

$$Q_z = \frac{dM_y}{dx}. \quad (11.1)$$



Rys. 11.1

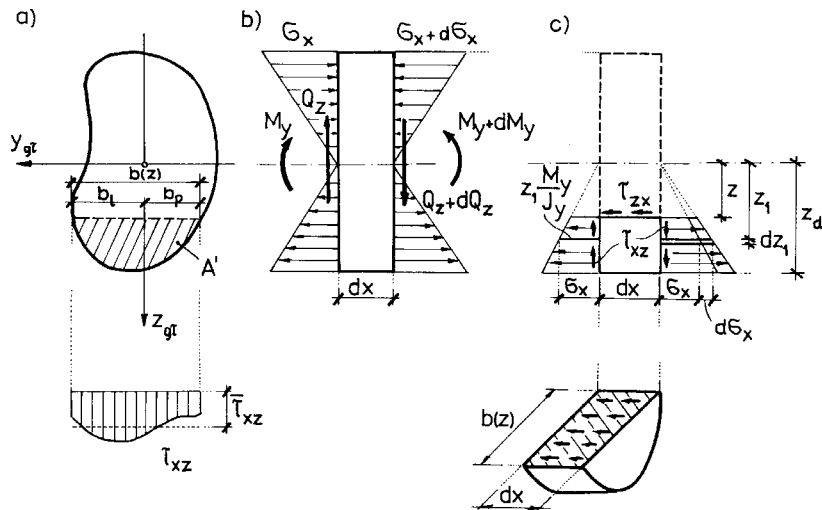
W rozważanym przypadku muszą więc wystąpić zarówno naprężenia styczne τ_{xz} , jak i normalne σ_x , wynikające z działania momentu zginającego M_y . Przyjmujemy zatem, że jedynymi siłami wewnętrznymi są Q_z i M_y i stosownie do równań definicyjnych (7.1) otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} Q_z &= \int_A \tau_{xz} dA, & Q_y &= \int_A \tau_{xy} dA = 0, \\ M_y &= \int_A \sigma_x z dA, & M_z &= -\int_A \sigma_x y dA = 0, \\ N &= \int_A \sigma_x dA = 0, & \mathfrak{M} &= \int_A (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z) dA = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

Macierz naprężeń w pierwszym przybliżeniu można przedstawić następująco:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (11.3)$$

Na wstępie trzeba stwierdzić, że ściśle obliczenie współrzędnych tensora naprężenia w przypadku dowolnego kształtu przekroju pręta jest bardzo trudne. Jeśli jednak znamy rozkład naprężeń normalnych σ_x , to dobre przybliżenie można uzyskać, analizując równowagę pewnych fragmentów pręta.



Rys. 11.2

Założmy, że osie y i z są głównymi osiami bezwładności przekroju i zbadajmy równowagę elementu przedstawionego na rys. 11.2c. Ułożymy równanie równowagi sił równoległych do osi x . Przyrost naprężenia normalnego $d\sigma_x$ musi być zrównoważony siłą poziomą wynikającą z naprężeń stycznych τ_{zx} , działających na pole o wymiarach $b dx$ (por. rys. 11.2c):

$$(a) \quad \int_{A'} d\sigma_x dA = \left[\int_{-b_p}^{b_l} \tau_{zx} dy \right] dx.$$

Symbolem A' oznaczono tutaj zakreskowaną część przekroju na rys. 11.2a. Z teorii zginania prętów pryzmatycznych podanej w p.10.1.2. wynika, że:

$$(b) \quad \sigma_x = \sigma_x(x, z_1) = \frac{M_y(x)}{J_y} \cdot z_1,$$

gdzie z_1 ($z \leq z_1 \leq z_d$) oznacza odległość badanego włókna od osi y . Przyrost naprężenia $d\sigma_x$ wynikający ze zmiany współrzędnej x

$$(c) \quad d\sigma_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dx = \frac{dM_y(x)}{dx} \cdot \frac{z_1}{J_y} dx = Q_z \cdot \frac{z_1}{J_y} \cdot dx.$$

Uzyskany wynik podstawimy do równania (a):

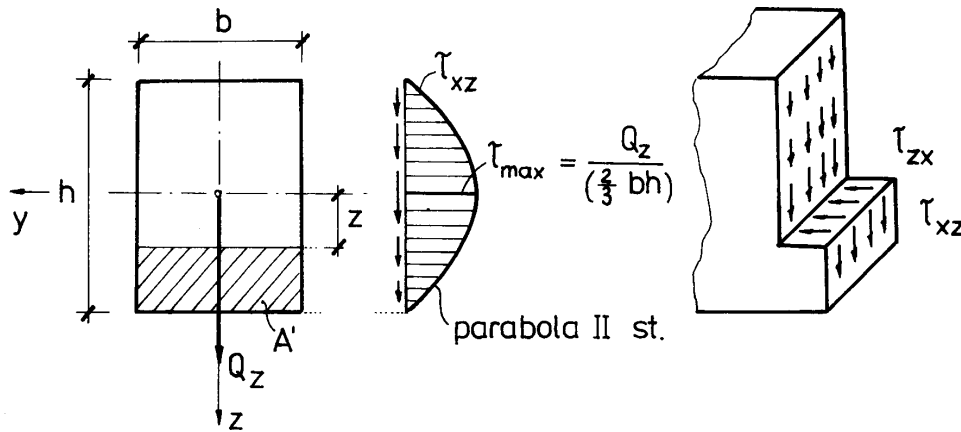
$$(d) \quad \left[\int_{-b_p(z)}^{b_l(z)} \tau_{zx} dy \right] dx = \left[\frac{Q_z}{J_y} \int_{A'} z_1 dA \right] dx.$$

Całka występująca po prawej stronie wzoru (d) jest momentem statycznym pola A' względem osi y , przy czym jego wartość zależy od współrzędnej z . Wielkość tę oznaczymy przez $S_y(z)$:

$$S_y(z) = \int_{A'} z_1 dA. \quad (11.4)$$

Na podstawie zależności (d) otrzymujemy:

$$\int_{-b_p(z)}^{b_l(z)} \tau_{zx} dy = \frac{Q_z(x) S_y(z)}{J_y}. \quad (11.5)$$



Rys. 11.3

Ze wzoru (11.5) nie można jednoznacznie określić naprężeń τ_{zx} . Zazwyczaj zadowalamy się średnią wartością tego naprężenia $\bar{\tau}_{zx}$ na aktualnej szerokości przekroju $b(z)$ (por. rys. 11.2a):

$$\bar{\tau}_{zx} = \bar{\tau}_{xz} = \frac{1}{b(z)} \int_{-b_p(z)}^{b_l(z)} \tau_{zx} dy = \frac{Q_z(x) S_y(z)}{J_y b(z)}. \quad (11.6)$$

Macierz naprężeń (11.3), w której τ_{zx} jest określone wzorem (11.6), przedstawia w sposób ścisły stan naprężenia jedynie w przecie liniowo-sprężystym o przekroju prostokątnym. W tym przypadku (rys. 11.3)

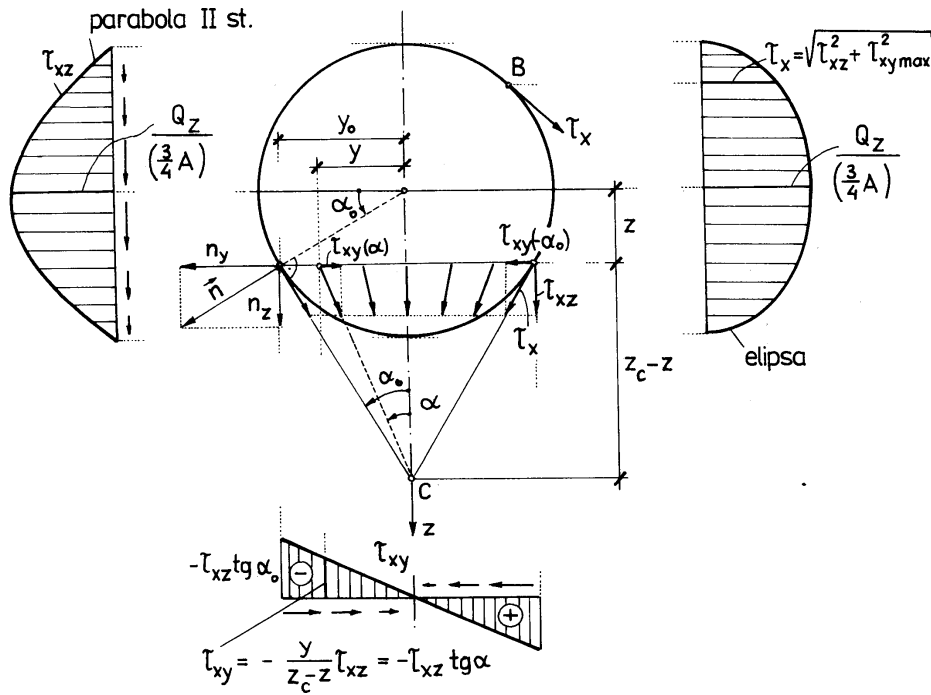
$$S_y(z) = b \left(\frac{h}{2} - z \right) \cdot \left[\frac{h}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - z \right) \right] = \frac{b}{2} \cdot \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right], \quad J_y = \frac{bh^3}{12},$$

co po podstawieniu do wzoru (11.6) prowadzi do rezultatu:

$$(e) \quad \bar{\tau}_{zx} = \bar{\tau}_{xz} = \frac{Q_z}{\left(\frac{2}{3} bh \right)} \cdot \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right].$$

Wykres naprężeń jest paraboliczny, a największa wartość τ_{xz} występuje w środku ciężkości przekroju*).

*) Warto dodać, że wzór (e) można łatwo wyprowadzić z równań różniczkowych równowagi ośrodka ciągłego (1.9) przy wykorzystaniu warunków brzegowych (1.7b).



Rys. 11.4

Wzór (11.6) stosuje się również do innych kształtów przekroju. W przypadkach tych pojawiają się dodatkowe naprężenia τ_{xy} . Wniosek ten wynika z równań na powierzchni ograniczającej pręt. Wybierzmy punkt B leżący na poboczniczy pręta o przekroju kołowym (rys. 11.4). W punkcie tym współrzędne wektora naprężenia są równe zero, tzn. $p_i = \sigma_{ji} n_j = 0$ ($i = 1, 2, 3$). Wykorzystamy pierwsze z tych równań ($i = 1$):

$$\sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 = 0.$$

Ponieważ $n_1 = n_x = 0$, $n_2 = n_y = \cos \alpha_0$, $n_3 = n_z = \sin \alpha_0$, więc

$$\tau_{xy} \cos \alpha_0 + \tau_{xz} \sin \alpha_0 = 0,$$

skąd

$$\tau_{xy} = -\tau_{xz} \operatorname{tg} \alpha_0 = -\tau_{xz} \cdot \frac{y_0}{z_c - z}. \quad (11.7)$$

Kąt α_0 jest kątem między osią z a styczną do konturu przekroju. Wzór (11.7) wskazuje na to, że wypadkowy wektor naprężenia stycznego na płaszczyźnie o normalnej współliniowej z osią z , $\tau_x = \tau_{xy} + \tau_{xz}$, jest zawsze styczny do konturu przekroju. Zależność (11.7) rozszerza się również na wewnętrzne punkty przekroju; dla naprężeń τ_{xz} przyjmuje się wzór (11.6), a zamiast kąta α_0 wprowadza się kąt α (por. rys. 11.4). Wówczas

$$\tau_{xy} = -\frac{Q_z S_y(z)}{J_y \cdot b(z)} \cdot \operatorname{tg} \alpha = -\frac{Q_z S_y(z)}{J_y \cdot b(z)} \cdot \frac{y}{z_c - z}. \quad (11.8)$$

Wobec powyższego stwierdzamy, że dla przekrojów nieprostokątnych macierz naprężeń w rozważanym zadaniu ma bardziej złożoną postać:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

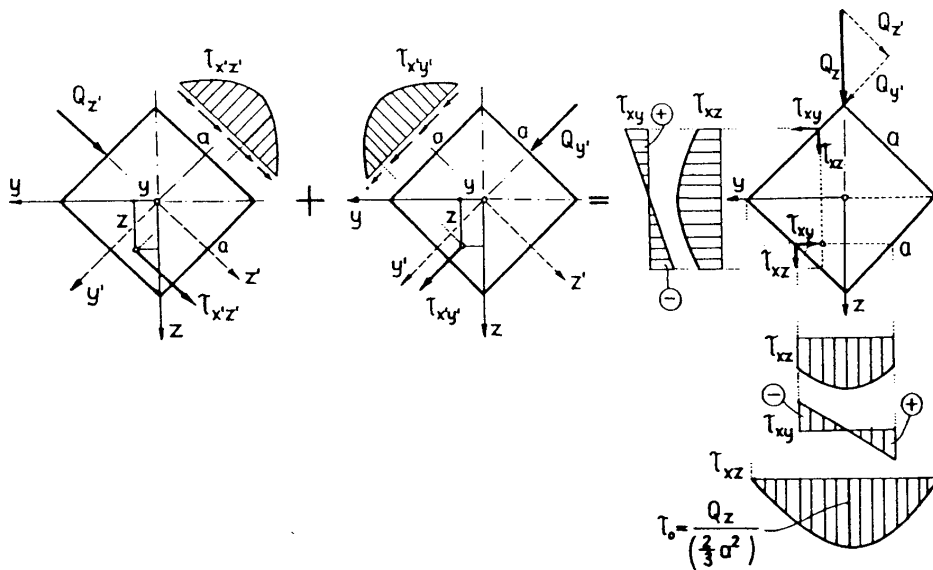
Dobry pogląd na stosowane do tej pory przybliżenia daje rozwiązanie dla liniowo-sprężystego pręta przyrównanego do przekroju kwadratowym, podane przez *Jakubowicza* i *Orłosia* [20]. Wektor siły poprzecznej Q_y pokrywa się z przekątną kwadratu (rys. 11.5). Dokładne wartości naprężeń $\tau_{x'y'}$ i $\tau_{x'z'}$, wywołane przez składowe $Q_{y'}$ i $Q_{z'}$, można wyznaczyć ze wzoru (e). Następnie, korzysta-

jąc z zasady superpozycji i dokonując obrotu układu współrzędnych, otrzymuje się wzory na naprężenia τ_{xy} i τ_{xz} :

$$(f) \quad \tau_{xy} = -\tau_0 \cdot \frac{yz}{a^2},$$

$$(g) \quad \tau_{xz} = \tau_0 \cdot \left[1 - \frac{2(y^2 + z^2)}{a^2} \right],$$

gdzie a jest bokiem kwadratu, a $\tau_0 = 3Q_z / (2a^2)$ i oznacza maksymalne naprężenie styczne w przekroju prostokątnym. Wzory (f) i (g) są ściśle. Łatwo można sprawdzić, że są spełnione zarówno równania różniczkowe równowagi i warunki na powierzchni pręta, jak i równania nierozdzielności odkształceń. Ze wzorów (f) i (g) wynika, że w narożach przekroju naprężenia są równe zero, a na aktualnej szerokości przekroju $b(z)$ naprężenia styczne nie są rozłożone równomiernie.



Rys. 11.5

Omówimy jeszcze inny sposób szacowania wartości naprężeń τ_{xy} . Równanie sumy rzutów sił na oś x dla elementu zakreskowanego na rys. 11.6 prowadzi do zależności:

$$(h) \quad \int_{A''} d\sigma_x dA = \left[\int_{-h_g(y)}^{h_d(y)} \tau_{xy} dz \right] dx.$$

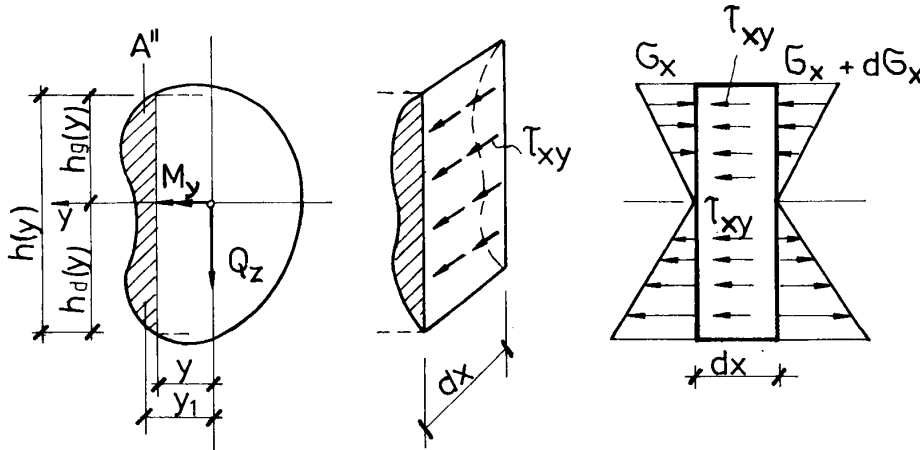
Postępując analogicznie jak przy wyprowadzaniu wzoru (11.6), otrzymujemy:

$$(i) \quad \int_{-h_g(y)}^{h_d(y)} \tau_{xy} dz = \frac{Q_z}{J_y} S_y(y),$$

gdzie $S_y(y)$ jest momentem statycznym pola zakreskowanego A'' względem osi y . Wzór (i) może służyć do obliczenia naprężenia średniego $\bar{\tau}_{xy}$ na wysokości $h(y)$:

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{h(y)} \int_{-h_g(y)}^{h_d(y)} \tau_{xy} dz = \frac{Q_z}{J_y} \frac{S_y(y)}{h(y)}. \quad (11.9)$$

Zależność (11.9), choć słuszna, jest bezwartościowa dla przekrojów wypukłych, których osią symetrii jest oś y . Wówczas bowiem $S_y(y) = 0$ i średnie naprężenia $\bar{\tau}_{xy}$ są zawsze równe zero. Przykładem takiego przekroju jest rozważany wyżej przekrój kołowy lub kwadratowy, w którym wyznaczone na innej drodze naprężenia styczne τ_{xy} mają wartości porównywalne z naprężeniami τ_{xz} .

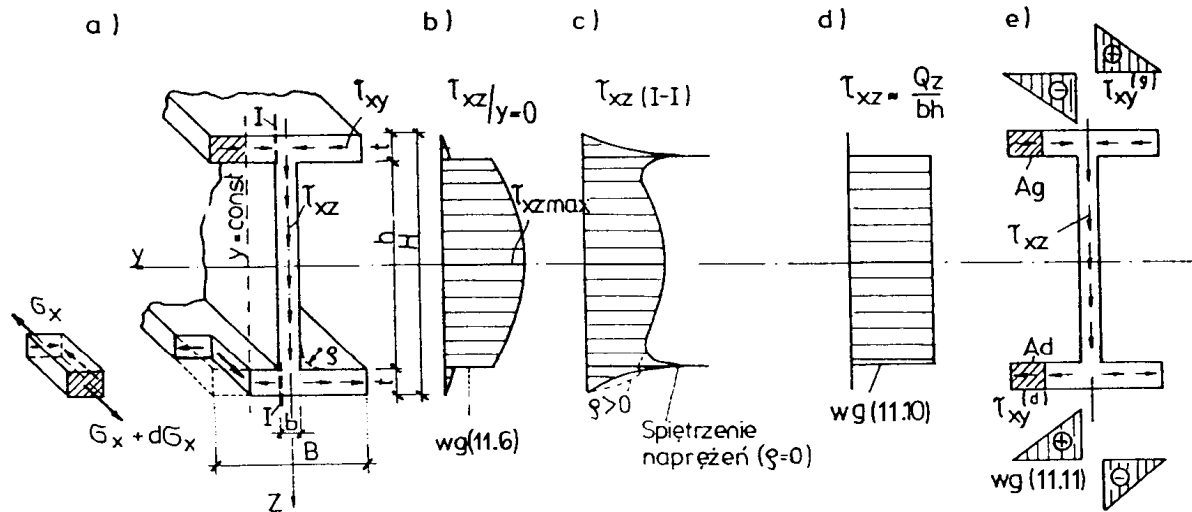


Rys. 11.6

Omówiony tutaj sposób szacowania naprężeń τ_{xy} daje jednak bardzo dobre rezultaty w przekrojach cienkościennych, powszechnie stosowanych w budownictwie metalowym. Dla ilustracji przeanalizujemy naprężenia τ_{xz} i τ_{xy} występujące w przekroju dwuteowym (rys. 11.7). Do obliczenia naprężeń τ_{xz} stosujemy wzór (11.6). Wykres tych naprężeń wzdłuż osi z ma charakterystyczny kształt kapelusza (rys. 11.7b). Półki przekroju przenoszą tylko niewielką część siły poprzecznej, ponieważ naprężenia τ_{xz} są tam bardzo małe. Dlatego w praktyce projektowej bardzo często przyjmuje się, że całą siłę poprzeczną przenosi środnik, przy czym rozkład naprężeń τ_{xz} jest równomierny (por. rys. 11.7c):

$$\tau_{xz} \approx \frac{Q_z}{A_{\text{śr}}} = \text{const.} \quad (11.10)$$

We wzorze (11.10) $A_{\text{śr}} = bh$ i oznacza pole środnika. Wzór ten służy również do kontroli obliczeń według wzoru (11.6). Rzeczywisty rozkład naprężeń τ_{xz} wzdłuż osi I-I ilustruje rys. 11.6c. Silne koncentracje naprężeń występują na poziomie połączenia półek ze środnikiem. Efekt spiętrzenia naprężeń można złagodzić przez zaokrąglenie wklęsłych naroży przekroju możliwie dużym promieniem krzywizny. Powierzchnie boczne przekroju dwuteowego są z reguły wolne od naprężeń stycznych. Z symetrii tensora naprężenia wynika więc, że w każdym punkcie konturu przekroju składowe naprężenia stycznych prostopadłe do konturu są równe zero. Uzasadnione jest zatem uproszczenie polegające na całkowitym pominięciu tych składowych w obrębie całego przekroju cienkościennego.

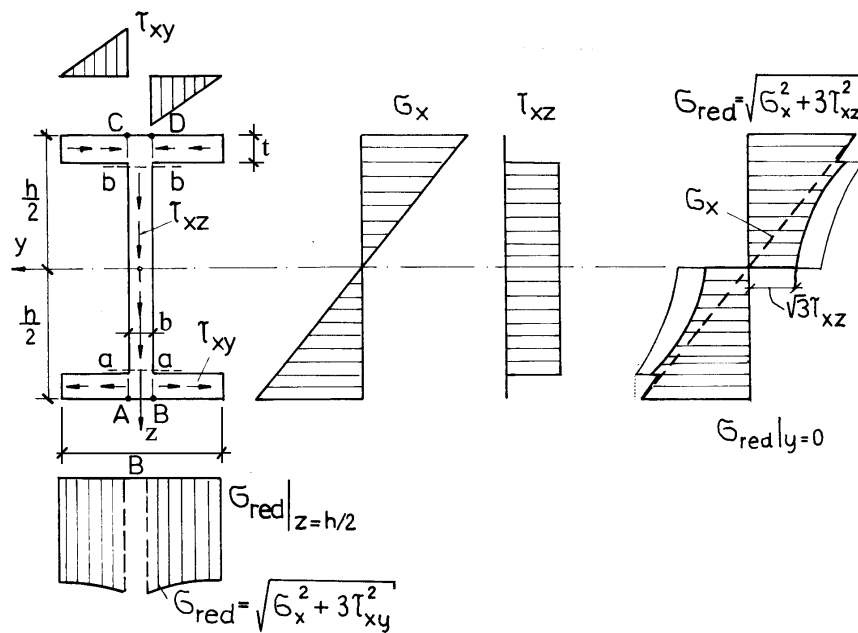


Rys. 11.7

Naprężenia τ_{xy} w półkach przekroju oblicza się z równowagi elementów odciętych płaszczyzną $y = \text{const}$ (por. rys. 11.7a). Rozważmy jeden z tych elementów, np. element dolny. Zakładamy, że naprężenia τ_{xy} na grubości półki są rozłożone równomiernie, i otrzymujemy wzór analogiczny do zależności (11.9):

$$\tau_{xy}^d = \frac{Q_z S_y^d(y)}{J_y \cdot t}, \quad (11.11)$$

gdzie $S_y^d(y)$ oznacza moment statyczny zakreskowanego pola A_d względem osi y .



Rys. 11.8

Wobec tego

$$(j) \quad S_y^d(y) = t \left(\frac{B}{2} - y \right) \left(\frac{H}{2} - \frac{t}{2} \right),$$

skąd widać, że naprężenia τ_{xy}^d są liniową funkcją współrzędnej y . Odpowiednie naprężenia w półce górnej $\tau_{xy}^g = -\tau_{xy}^d$, bo $S_y^g(y) = -S_y^d(y)$. Średnie naprężenia $\bar{\tau}_{xy}$ są, rzecz jasna, równe zero. Wykresy naprężeń τ_{xy} przedstawiono na rys. 11.7e. Dla $-b/2 < y < b/2$ wzór (11.11) traci sens.

Na podstawie wzorów (11.6) i (11.11) można przekonać się, że dla dwuteowników walcowanych maksymalne naprężenia τ_{xy} są około 3÷5 razy mniejsze od największych naprężeń τ_{xz} .

Ze względu na złożony stan naprężenia występujący przy działaniu siły poprzecznej, której towarzyszy z reguły moment zginający, sprawdzaniu warunku wytrzymałościowego trzeba poświęcić nieco więcej uwagi. Pogląd na tę sprawę daje analiza wartości naprężenia zastępczego σ_{red} w przekroju dwuteowym. Na rysunku 11.8 przedstawiono przebieg naprężeń stycznych i normalnych oraz wykresy naprężeń zastępczych σ_{red} , obliczonych według hipotezy *HMH*. Analizując ten rysunek widzimy, że największe naprężenia występują w punktach *A*, *B*, *C* i *D* oraz w miejscu połączenia środka belki z półkami (włókna *a-a* i *b-b*). Ponieważ przyjęliśmy, że środek przejmuje tylko naprężenia τ_{xz} a półki tylko naprężenia τ_{xy} , więc obliczenie naprężenia zastępczego przebiega jak dla płaskiego stanu naprężenia, a warunek wytrzymałościowy ma postać:

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_x^2}, \quad (11.12)$$

gdzie τ_x oznacza w zależności od badanego punktu naprężenia τ_{xz} lub τ_{xy} .

11.1.2. Obliczanie odkształceń

Odkształcenia $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{xz}$ oraz $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{xy}$ spowodowane wyłącznym działaniem siły poprzecznej Q_z oblicza się bezpośrednio ze związków fizycznych dla materiału liniowo-sprężystego:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{2G}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G}, \end{aligned} \right\} \quad (11.13)$$

przy czym wyraźnie większe są tutaj odkształcenia ε_{xz} .

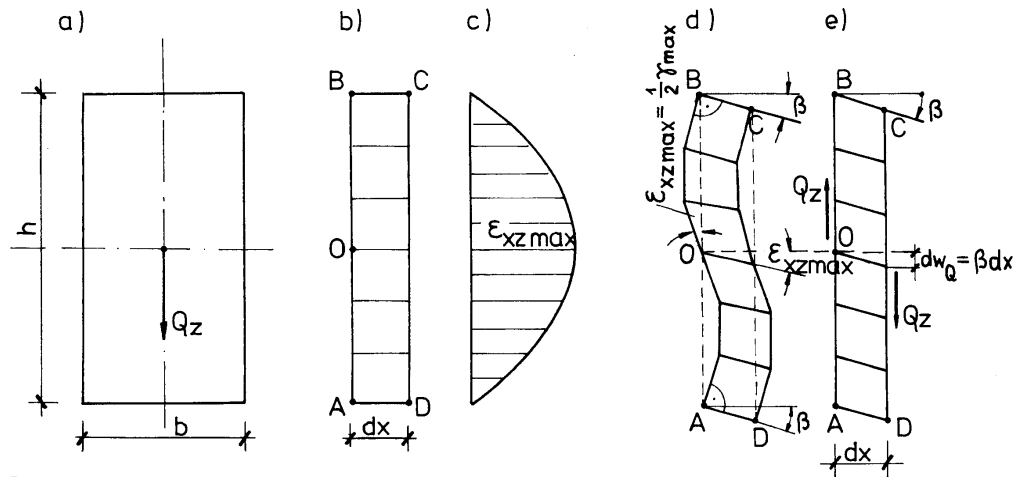
Macierz odkształceń dla łącznego działania siły poprzecznej Q_z i momentu zginającego M_y ma więc postać:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & -\nu\varepsilon_x & 0 \\ \varepsilon_{zx} & 0 & -\nu\varepsilon_x \end{bmatrix}. \quad (11.14)$$

Wartość ε_x obliczamy ze wzorów (10.15).

11.1.3. Obliczanie przemieszczeń

Przemieszczenia wywołane przez siłę poprzeczną są na ogół bardzo małe. Ograniczymy się tutaj do określenia wpływu siły poprzecznej na ugięcie pręta. Rozważmy deformacje odcinka belki prostokątnej o długości dx , spowodowane tylko działaniem siły poprzecznej Q_z . Powierzchnię tego odcinka (tzn. prostokąt $ABCD$) podzielimy myślowo na elementarne kwadraty o boku dx .



Rys. 11.9

Największe odkształcenia postaciowe elementów, stosownie do wykresu ϵ_{xz} (rys. 11.9c), występują w sąsiedztwie osi ciężkości przekroju. W miarę oddalania się od tej osi odkształcenia ϵ_{xz} maleją, by we włóknach skrajnych osiągnąć wartości zerowe, a wydzielone tam myślowo elementy są w dalszym ciągu kwadratami. Wobec powyższego stwierdzamy, że pierwotnie płaski przekrój belki wygina się w kształcie litery S (por. rys. 11.9d). Jeżeli przyjmiemy, że po deformacji punkty AB leżą nadal na linii pionowej, to w efekcie końcowym odnotowujemy względne przemieszczenia sąsiednich cięciw AB i CD , określone pewnym kątem β (rys. 11.9e). Gdyby odkształcenia ϵ_{xz} na wysokości przekroju były stałe, to kąt β równałby się kątowi $2\epsilon_{xz}$. W ogólnym przypadku $0 < \beta < 2\epsilon_{xz}$. Powstaje pytanie, jak określić kąt β . Najbardziej uzasadnione jest ustalenie tego kąta na podstawie rozważań energetycznych. Zgodnie z twierdzeniem *Clapeyrona* dla układów liniowych przyjmujemy, że praca siły poprzecznej Q_z (traktowanej jako siła zewnętrzna) na przemieszczeniu $dw_Q = \beta dx$ ma być równa energii sprężystej zmagazynowanej wewnątrz rozważanego odcinka belki. Żądamy więc, by:

$$\frac{1}{2} Q_z \cdot \beta \cdot dx = \left[\int_A \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dA \right] dx,$$

skąd

$$(k) \quad \int_A \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dA = Q_z \beta.$$

W naszym przypadku

$$\sigma_{ij} \cdot \epsilon_{ij} = \sigma_{13} \cdot \epsilon_{13} + \sigma_{31} \cdot \epsilon_{31} = 2\tau_{xz} \cdot \epsilon_{xz} = 2 \left(\frac{Q_z S_y}{J_y b} \right) \left(\frac{Q_z S_y}{J_y b} \right) \cdot \frac{1}{2G} = \frac{Q_z^2 S_y^2}{J_y^2 b^2 G}.$$

Wobec tego

$$(l) \quad Q_z \cdot \beta = \frac{Q_z^2}{G J_y^2} \int_A \frac{S_y^2(z)}{b^2(z)} dA.$$

Ze wzoru (l) otrzymujemy wyrażenie na *średni kąt ścinania*:

$$\beta = \frac{Q_z}{GA} \cdot k, \quad (11.15)$$

gdzie

$$k = \frac{A}{J_y^2} \int_A \frac{S_y^2(z)}{b^2(z)} \cdot dA. \quad (11.16)$$

Współczynnik k jest bezwymiarowy i zależy od kształtu przekroju. Dla prostokąta wynosi 1,2, a dla przekrojów dwuteowych waha się od 2,4 (dla I 80) do 2,0 (dla I 500). Wyznaczenie wartości k dla dowolnych przekrojów dwuteowych jest dosyć kłopotliwe. Jeżeli jednak akceptujemy równomierny rozkład naprężeń τ_{xz} w przekroju środka, $\tau_{xz} = Q_z / A_{\text{sr}}$, to

$$(m) \quad \beta = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{Q_z}{GA_{\text{sr}}} = \frac{Q_z}{GA} \cdot \frac{A}{A_{\text{sr}}}.$$

Z porównania tego rezultatu ze wzorem (11.15) wnioskujemy, że

$$(n) \quad k = \frac{A}{A_{\text{sr}}}.$$

Wartości obliczone ze wzoru (n) są nieco większe od wartości obliczonych z kryterium energii.

W celu uwzględnienia wpływu siły poprzecznej na ugięcie skorzystamy ze wzoru (11.15):

$$(o) \quad \beta = \frac{dw_Q}{dx} = \frac{Q_z}{GA} \cdot k.$$

Całkowite ugięcie jest sumą ugięcia $w_M(x)$ wywołanego przez moment zginający M_y , oraz ugięcia $w_Q(x)$, wywołanego przez siłę poprzeczną Q_z :

$$w(z) = w_M(x) + w_Q(x). \quad (11.17)$$

Równanie różniczkowe funkcji $w_M(x)$ ma postać:

$$(p) \quad w''_M(x) = -\frac{M_y}{EJ_y},$$

a na podstawie równania (o) można napisać ($EJ = \text{const}$):

$$(r) \quad w''_Q(x) = \beta'(x) = \frac{dQ_z}{dx} \cdot \frac{k}{GA} = -q(x) \frac{k}{GA}.$$

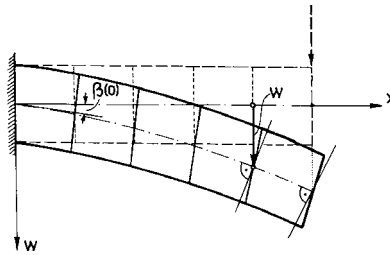
Po dodaniu stronami równań (p) i (r) otrzymujemy:

$$w''(x) = w''_M(x) + w''_Q(x) = -\left(\frac{M_y}{EJ_y} + \frac{q}{GA} k \right). \quad (11.18)$$

Równanie (11.18) jest równaniem różniczkowym linii ugięcia pręta przyrządnym uwzględniającym wpływ sił poprzecznych. Wpływ ten jest na ogół niewielki; przyjmuje się, że jest on istotny jedynie dla belek grubych, gdzie stosunek wysokości belki h do jej rozpiętości l jest większy od 0,2. Należy zwrócić uwagę na to, że uwzględnienie wpływu sił poprzecznych na ugięcie oznacza odstępianie od hipotezy *Bernoulliego*; przekroje nadal pozostają płaskie, lecz nie są prostopadłe do wygiętej osi belki. W konsekwencji warunki brzegowe dla utwierdzenia są następujące (por. rys. 11.10):

$$(s) \quad w(0) = 0, \quad w'(0) = \beta(0) = \frac{Q_x(0) \cdot k}{GA}.$$

Dla innych sposobów podparcia różnice w formułowaniu warunków brzegowych nie występują.

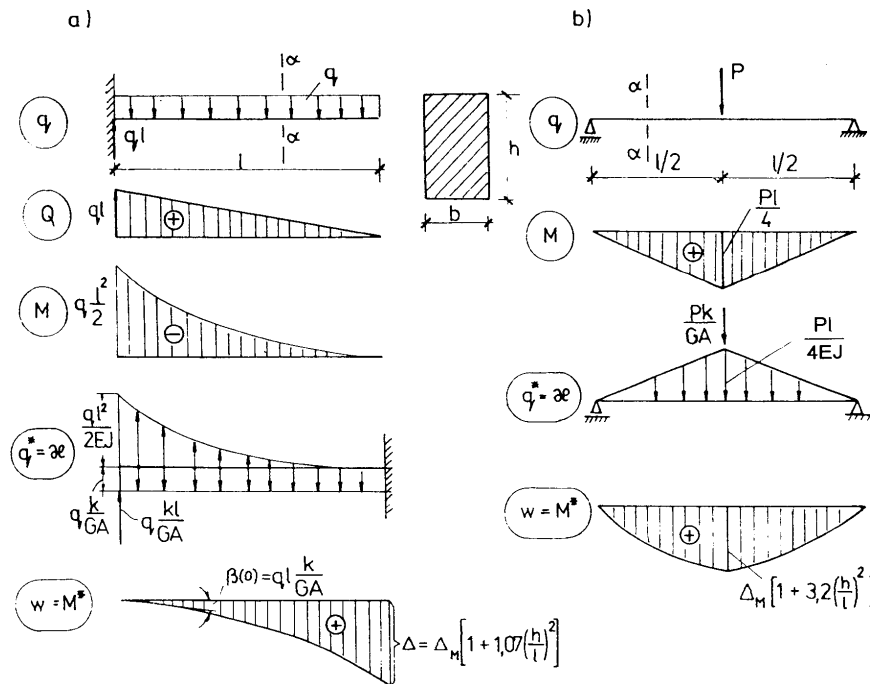


Rys. 11.10

W celu zilustrowania wpływu sił poprzecznych na ugięcie rozwiążemy dwa zadania stosując metodę obciążenia krzywiznami.

W pierwszym zadaniu wyznaczmy ugięcie wspornikowej belki prostokątnej o szerokości b i wysokości h (rys. 11.11a). Materiał belki charakteryzują dwie stałe sprężystości E i ν , przy czym $\nu = 1/3$. Obciążenie belki fikcyjnej odpowiada prawej stronie równania (11.18):

$$q^* = \frac{M(x)}{EJ} + \frac{q(x) \cdot k}{GA} \quad (11.19)$$



Rys. 11.11

Jako obciążenie $q(x)$ należy rozumieć wszystkie siły (czynne i bierne) obciążające belkę, a fikcyjne schematy statyczne przyjmuje się zgodnie z rys. 10.17. Maksymalne ugięcie belki:

$$(t) \quad \Delta = M^*(l) = \frac{ql^2}{2EJ} \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot l - \frac{ql^2}{8EJ} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot l + \frac{qlk}{GA} \cdot l - \frac{qk}{GA} \cdot \frac{1}{2} l^2.$$

Wzór (t) ułożono z wykorzystaniem wzorów na pole i położenie środka ciężkości paraboli II stopnia (por. dodatek). Po uporządkowaniu i uwzględnieniu, że $G = E / [2(1 + \nu)] = 3E / 8$ oraz $k = 1, 2$, otrzymujemy:

$$(u) \quad \Delta = \frac{ql^4}{8EJ} \left(1 + \frac{4kJ}{l^2 GA} \right) = \frac{ql^4}{8EJ} \left[1 + 1,07 \left(\frac{h}{l} \right)^2 \right].$$

Składnik $1,07 \cdot (h/l)^2$ opisuje wpływ sił poprzecznych. Jeśli na przykład $h/l = 0,10$, to przyrost ugięcia stanowi 1,07% wartości ugięcia spowodowanego przez moment zginający. Dla $h/l = 0,20$ wpływ ten sięga 4,28%.

Drugie zadanie dotyczy belki swobodnie podpartej z rys. 11.11b. Dla przekroju prostokątnego i identycznej wartości współczynnika *Poissona* maksymalne ugięcie w połowie rozpiętości belki

$$(w) \quad \Delta = \frac{Pl}{4EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \left(\frac{l}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} \right) + \frac{Pk}{GA} \cdot \frac{l}{4} = \frac{Pl^3}{48EJ} \left[1 + 3,2 \left(\frac{h}{l} \right)^2 \right].$$

Wpływ sił poprzecznych na ugięcie jest tutaj 3 razy większy niż w z zadaniu pierwszym.

11.1.4. Zależności energetyczne

Problem energii poruszono już w p. 11.1.3. Zgodnie z podanymi tam wynikami można napisać, że:

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_s Q(s) \beta(s) ds, \quad Q = Q_z. \quad (11.20)$$

Jeżeli pręt jest liniowo-sprężysty, to energię sprężystą U wyraża się następującymi zależnościami:

$$U = \frac{1}{2} \int_s Q(s) \beta(s) ds, \quad (11.21)$$

$$U_Q = \frac{1}{2} \int_s \frac{Q^2}{(GA/k)} ds, \quad \text{bo } \beta = \frac{Q}{(GA/k)}, \quad (11.22)$$

$$U_\beta = \frac{1}{2} \int_s (GA/k) \cdot \beta^2 ds. \quad (11.23)$$

Wyrażenie GA/k występujące w powyższych wzorach nazywamy *szywnością ścinania przekroju*.

Zgodnie ze wzorem (11.20) składniki wewnętrznych prac wirtualnych mają postać:

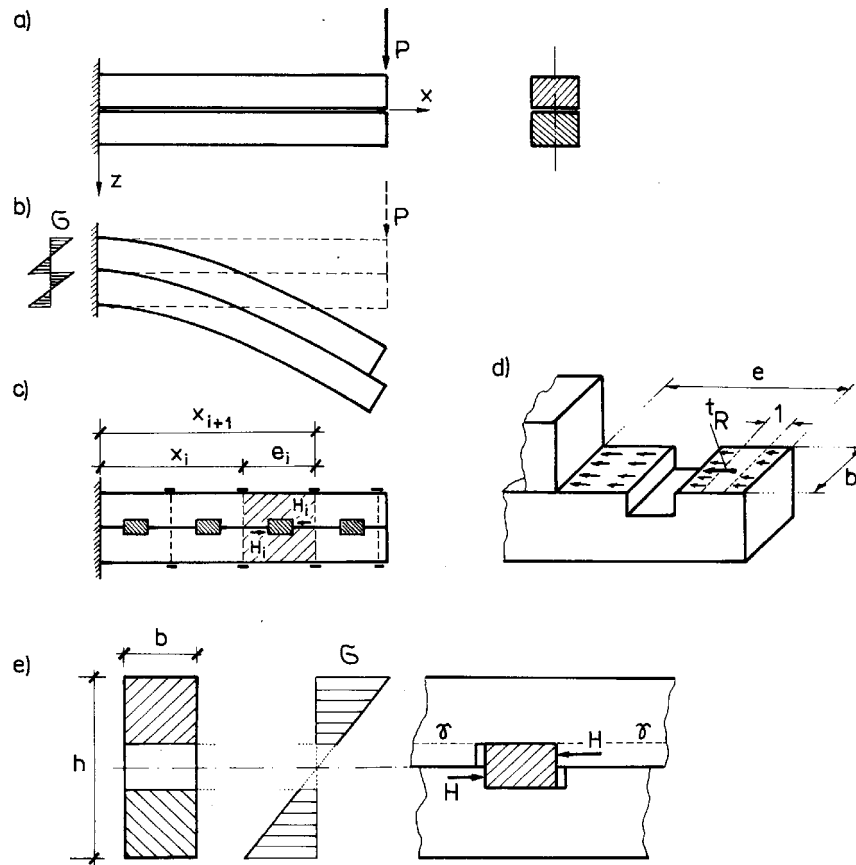
$$\int_V \sigma_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} dV = \int_s Q(s) \bar{\beta}(s) ds, \quad (11.24)$$

$$\int_V \bar{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_s \bar{Q}(s) \beta(s) ds. \quad (11.25)$$

11.2. ŚCINANIE W BELKACH ZŁOŻONYCH

Naprężenia styczne mają bardzo duże znaczenie w projektowaniu tzw. belek złożonych. Rozważmy najpierw belkę drewnianą. Ponieważ wymiary przekroju poprzecznego takich belek są ograniczone średnicą pnia, więc dla większych obciążeń jesteśmy zmuszeni zastosować belkę złożoną z dwóch lub trzech belek o mniejszych wysokościach (rys. 11.12). Obciążenie luźno ułożonych na sobie belek składowych wywołuje deformację układu przedstawioną na rys. 11.12b. Obie belki przylegają do siebie, jednak wzdłuż powierzchni kontaktu ulegają względnym przesunięciom. Efekt jest więc taki, jakby każda belka pracowała oddzielnie. Aby w pełni wykorzystać własności wytrzymałościowe celowe jest połączenie obu belek w taki sposób, by zlikwidować wzajemne przesunięcia w płaszczyźnie połączenia. W tym celu stosuje się kliny z drewna twardego umieszczone jak na rys. 11.12c. Każdy z klinów musi przejąć siłę poziomą H . Siłę tę można uważać za wypadkową naprężeń stycznych τ_{zx} obliczonych jak dla belki jednolitej i działających na pole o wymiarach $b \cdot e$, przypadające na dany klin. Bardzo sugestywne jest wprowadzenie pojęcia tzw. *siły rozwarstwiającej* t_R , czyli siły poziomej przypadającej na jednostkę długości belki wzdłuż płaszczyzny połączenia:

$$t_R = \tau_{zx} \cdot b = \frac{Q_z S_y}{J_y}. \quad (11.26)$$



Rys. 11.12

Jeśli klin "i" ma przyjmować siłę poziomą H_i dla $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ (rys. 11.12c), to

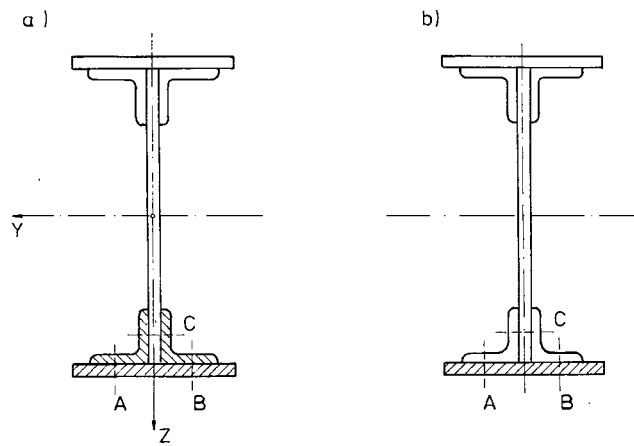
$$(a) \quad H_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} t_R(x) dx.$$

W rozważanym zadaniu z rysunku 11.12 siły H_i są takie same dla każdego klina i wyraża je wzór:

$$(b) \quad H = e \cdot \frac{Q_z S_y}{J_y} = \frac{Q_z}{\left(\frac{2}{3}bh\right)} \cdot e,$$

gdzie h jest całkowitą wysokością belki.

Wyznaczona wartość siły H jest punktem wyjścia do dalszych obliczeń belki złożonej. Trzeba tu sprawdzić wytrzymałość klina na bezpośrednie ścinanie, wytrzymałość belek składowych na docisk klinów oraz ścinanie tych belek w płaszczyźnie $\gamma - \gamma$. Połączenie belek klinami pozwala traktować belkę złożoną jako belkę jednolitą. Trzeba jednak pamiętać, że belka złożona jest osłabiona wcięciami na kliny, co uwzględnia się przez przyjęcie w obliczeniach momentu bezwładności przekroju netto (przekrój zakreśkowany na rys. 11.12e).



Rys. 11.13

Podobne obliczenia prowadzi się dla belek złożonych wykonanych z innych materiałów, np. dla belek stalowych. Najczęściej mamy do czynienia z obliczaniem połączenia pasa ze środnikiem w blachowniach (rys. 11.13). Jeżeli stosujemy połączenie na śruby lub nity, to największa siła rozwarstwiająca przypada na łącznik poziomy C. Przy obliczaniu tej siły należy przyjąć moment zakreskowanej części przekroju na rys. 11.13a. Łączniki A i B projektuje się, przyjmując moment statyczny pasa względem osi y (por. rys. 11.13b).

11.3. STAN NAPRĘŻENIA W BELKACH OBCIĄŻONYCH POPRZECZNIE

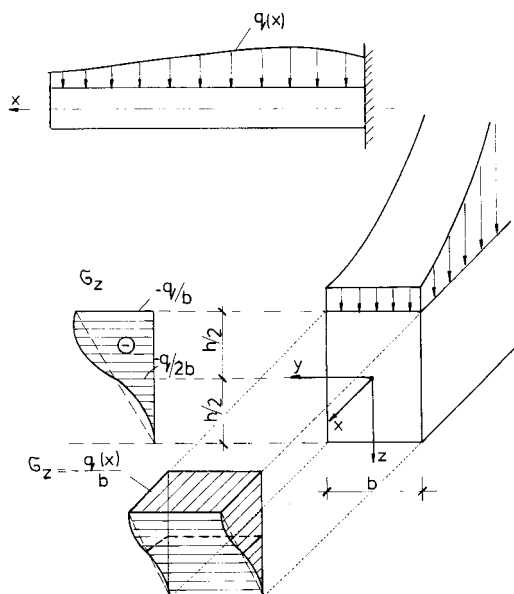
Do tej pory przy ustalaniu stanu naprężenia przyjmowaliśmy, że obciążenie belki $q(x)$ jest równe zero. Wpływ tego obciążenia oszacujemy dla belki prostokątnej przedstawionej na rys. 11.14. Jeśli belka jest nieważka, to obciążenie $q(x)$ na powierzchni $z = z_g = -h/2$ wywołuje naprężenia normalne $\sigma_z = -q(x)/b$, natomiast jeśli $z = z_d = h/2$, to $\sigma_z = 0$. Na podstawie równania różniczkowego równowagi

$$(a) \quad \sigma_{ji,j} = 0$$

oraz wzoru (11.6) na naprężenie styczne σ_{13} i analizy warunków brzegowych otrzymuje się zależność:

$$\sigma_{33} = \sigma_z = \frac{q(x)}{b} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{z}{h} \right) - 2 \left(\frac{z}{h} \right)^3 - \frac{1}{2} \right]. \quad (11.27)$$

Przebieg funkcji σ_z ilustruje rys. 11.14.



Rys. 11.14

Wobec powyższego macierz naprężeń przy zginaniu poprzecznym ma postać:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (11.28)$$

Łatwo się przekonać, że naprężenia σ_z są zazwyczaj bardzo małe (około 1÷2% wartości σ_x) i pominięcie ich nie wpływa w istotny sposób na warunek wytrzymałości i sztywności konstrukcji. Uwaga ta nie dotyczy obciążeń skupionych, w odniesieniu do których sposób przekazania sił na belkę wymaga odrębnej analizy. W uzupełnieniu dodamy jeszcze, że praktyczna przydatność wzoru (11.27) jest znikoma. W praktyce przyjmuje się bowiem, że obciążenie $q(x)$ jest sumą obciążeń powierzchniowych i masowych (ciężar własny belki), co nie jest zgodne z założeniem przyjętym w wyprowadzeniu wzoru (11.27).

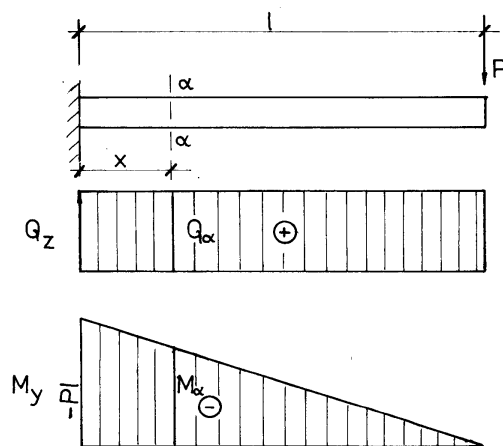
11.4. NAPRĘŻENIA GŁÓWNE W BELKACH

Rozważmy belkę wspornikową o przekroju prostokątnym, poddaną działaniu obciążenia skupionego (rys. 11.15). W przekroju α - α występuje siła poprzeczna $Q_z = P$ oraz moment zginający $M_y = -P(l - x)$. Siła poprzeczna wywołuje naprężenia styczne τ_{xz} , a moment zginający – naprężenia normalne σ_x . Stan naprężenia obrazuje macierz:

$$(a) \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

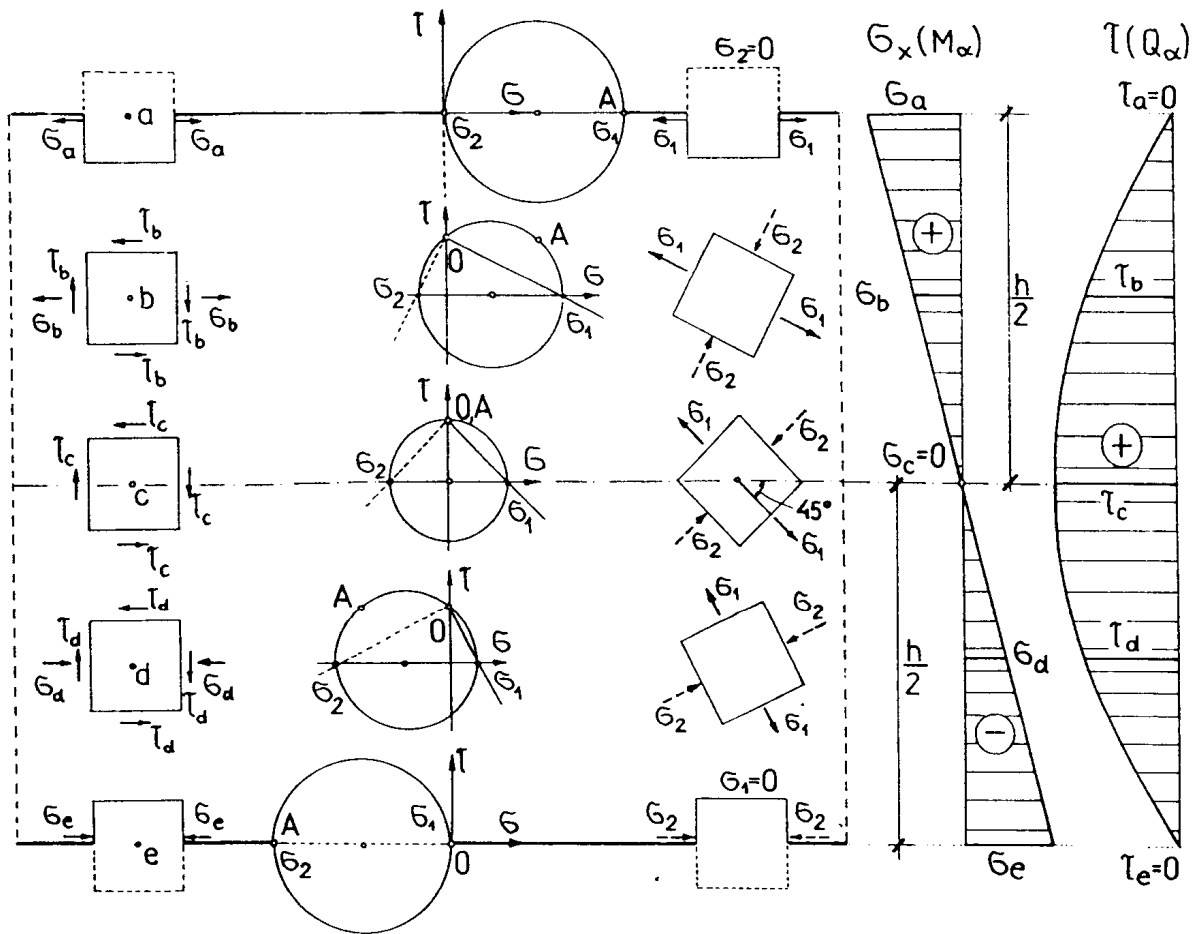
gdzie

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} \cdot z \quad \text{oraz} \quad \tau_{xz} = \frac{Q_z}{J_y} \cdot \frac{S_y(z)}{b}$$



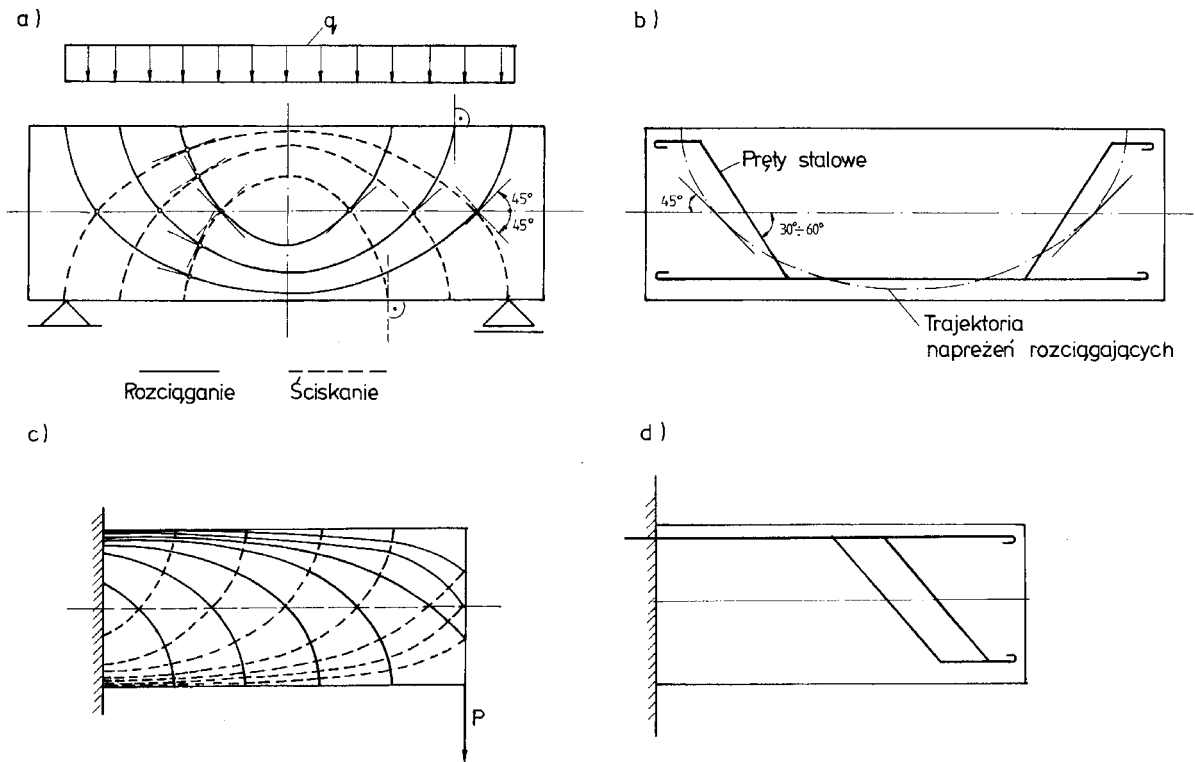
Rys. 11.15

Na wysokości przekroju naprężenia te się zmieniają. Zmieniają się więc także kierunki i wartości naprężeń głównych. Ilustruje to rys. 11.16, na którym linią ciągłą zaznaczono kierunki głównych naprężeń rozciągających, a przerywaną – ściskających.



Rys. 11.16

Jeśli wykonamy identyczne czynności dla kilku przekrojów belki, to możemy narysować tzw. linie izostatyczne. Linie te mają tę własność, że styczne do nich w dowolnym punkcie wskazują kierunek jednego z naprężeń głównych. Linie izostatyczne nazywa się również trajektoriami naprężeń głównych. Są dwie rodziny takich linii: trajektorie naprężeń rozciągających (linie ciągłe) i trajektorie naprężeń ściskających. Linie te są wzajemnie prostopadłe i nachylone pod kątem 45° do osi belki w punktach leżących na osi obojętnej. Przebieg trajektorii naprężeń głównych ilustruje jeszcze rys. 11.17a, na którym przedstawiono belkę swobodnie podpartą, poddaną obciążeniu $q(x) = \text{const}$. Na podstawie tego rysunku możemy wyobrazić sobie, że zginanie odpowiada współdziałaniu ściskanego „łuku” (linia przerywana) i rozciąganych „ciągów” (linia ciągła). Spostrzeżenie to uzasadnia przebieg zbrojenia w belkach żelbetowych. Beton charakteryzuje się dużą wytrzymałością na ściskanie i brakiem wytrzymałości na rozciąganie. Dlatego w konstrukcjach zbrojonych jest następujący podział funkcji: beton przejmuje ściskanie, a pręty stalowe – rozciąganie. W realnych konstrukcjach pręty te mają kształt zbliżony do kształtu trajektorii naprężeń rozciągających (por. rys. 11.17b). Zwróćmy uwagę na odmienny sposób zbrojenia belki wspornikowej (rys. 11.17d); zbrojenie przebiega tam nie w dolnych, lecz w górnych, rozciąganych partiach belki.



Rys 11.17

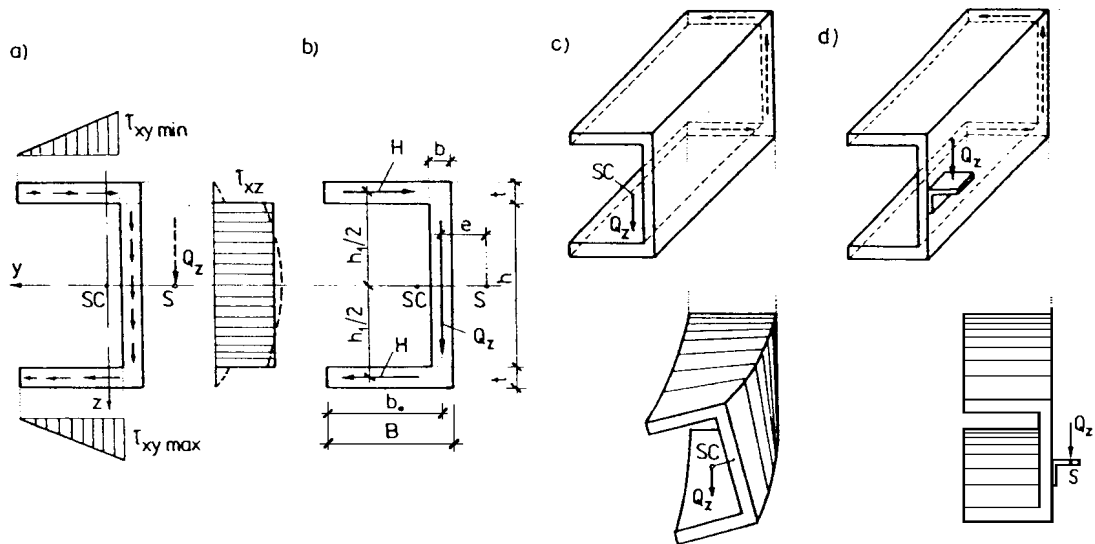
11.5. ŚRODEK ŚCINANIA

Z rozważań zawartych w p. 11.1 wynika, że dokładne obliczenie naprężeń stycznych τ_{xz} i τ_{xy} w dowolnym przekroju natrafia na duże trudności. Z tego względu nie sprawdzaliśmy do tej pory wymagania, by stosownie do zależności (11.2) siła poprzeczna Q_y i moment skręcający \mathfrak{M} były równe zero. W przekrojach o dwóch osiach symetrii wymaganie to jest zawsze spełnione. W zakresie przekrojów o jednej osi symetrii najlepsze przybliżenie wartości naprężeń stycznych otrzymujemy w przekrojach cienkościennych. Rozważmy więc dla przykładu przekrój ceowy poddany działaniu siły poprzecznej Q_z . Naprężenia styczne wyznacza się identycznie jak w przekroju dwuteowym. Z rysunku 11.18a widać natychmiast, że moment skręcający względem układu osi środkowych jest różny od zera, natomiast siła poprzeczna $Q_y = 0$. Powstaje więc pytanie, gdzie leży punkt, względem którego moment skręcający jest równy zero. Rozkład naprężeń stycznych wskazuje, że punkt ten leży na osi symetrii przekroju. Przyjmijmy, że całą siłę poprzeczną Q_z przenosi środek. Wypadkową siłę poziomą przenoszoną przez każdą z półek oznaczmy przez H . Wówczas położenie punktu S (por. rys. 11.18b), względem którego moment skręcający jest równy zero, obliczamy z równania:

$$(a) \quad \mathfrak{M} = -Q_z e + H h_1 = 0,$$

skąd

$$(b) \quad e = \frac{H h_1}{Q_z}.$$



Rys. 11.18

Siła pozioma (rys. 4.18a, b)

$$(c) \quad H = \frac{1}{2} b_0 \cdot t \cdot \tau_{xy \max},$$

przy czym naprężenia $\tau_{xy \max}$ określa wzór (11.11):

$$(d) \quad \tau_{xy \max} = Q_z \cdot \frac{S_{y \max}}{J_y t}.$$

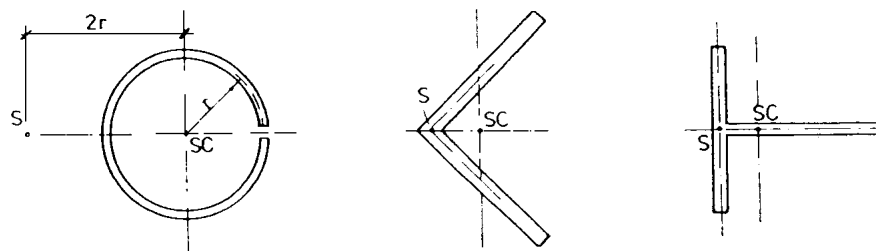
Jeżeli $A_p = Bt \approx b_0 t$ i oznacza pole przekroju półki, a $A_{sr} = bh$ i oznacza pole przekroju środknika, to

$$(e) \quad \begin{cases} S_{y \max} = b_0 t \cdot \frac{h_1}{2} \approx A_p \cdot \frac{h_1}{2}, \\ J_y = \frac{bh_1^3}{12} + 2 \cdot b_0 \cdot t \left(\frac{h_1}{2} \right)^2 = \frac{h_1^2}{2} \left(A_p + \frac{1}{6} A_{sr} \right). \end{cases}$$

Po podstawieniu tych zależności do wzorów (d) i (b) otrzymujemy:

$$(f) \quad e = \frac{1}{2} b_0 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{6} \frac{A_{sr}}{A_p}}.$$

Ze wzoru (f) wynika, że $e < b_0 / 2 \approx B / 2$.



Rys. 11.19

Punkt S nazywa się zazwyczaj środkiem ścinania lub środkiem zginania. Ta druga nazwa wynika stąd, że jeżeli płaszczyzna obciążenia przechodzi przez ten punkt, to pręt ulega tylko zginaniu (por. rys. 11.18*d*). W przeciwnym razie oprócz zginania występuje również skręcanie, a odkształcona oś pręta nie jest krzywą płaską (rys. 11.18*c*). Pojęcie środka zginania ma bardzo duże znaczenie w teorii prętów cienkościennych, którą omówimy w rozdziale 12. Położenie środka ścinania w innych przekrojach cienkościennych ilustruje rys. 11.19. Warto jeszcze dodać, że w przekrojach zwartych o dowolnym przekroju środek ścinania na ogół nie pokrywa się ze środkiem ciężkości, jednak z uwagi na dużą sztywność takich przekrojów wpływ dodatkowego skręcania przekroju jest w praktyce pomijany.