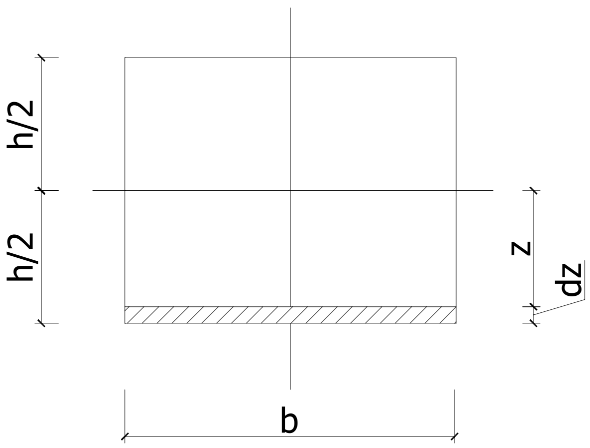
Olga Kopacz, Adam Łodygowski, Wojciech Pawłowski,
Michał Płotkowiak, Krzysztof Tymber
Konsultacje naukowe: prof. dr hab. JERZY RAKOWSKI
Poznań 2002/2003

MECHANIKA BUDOWLI 3

WSPÓŁCZYNNIK KAPPA:

Współczynnik kappa dla prostokąta:



Wzór ogólny współczynnika:

$$\kappa = \frac{A}{I_y^{\,2}} \int_A \frac{S_y(z)^2}{b(z)^2} dA \qquad \text{(bonus.1)}$$

Przedstawienie parametrów:

$$A = h \cdot b$$

$$I_y^{\,2} = \frac{b^2 h^6}{144}$$

$$b(z) = b$$

$$S_y = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + z\right) \cdot \left(b \cdot \left(\frac{h}{2} - z\right)\right) = \left(\frac{h^4}{4} - z^2\right) \cdot \frac{b}{2} \qquad \text{(bonus.2)}$$

$$S_y^{\,2} = \left(\frac{h^4}{16} - \frac{h^2 b^2}{2} + z^4\right) \cdot \frac{b^2}{4}$$

$$dA = bdz$$

Podstawienie wszystkich wartości:

$$\kappa = \frac{A}{I_y^{\,2}} \int_A \frac{S_y(z)^2}{b(z)^2} dA$$

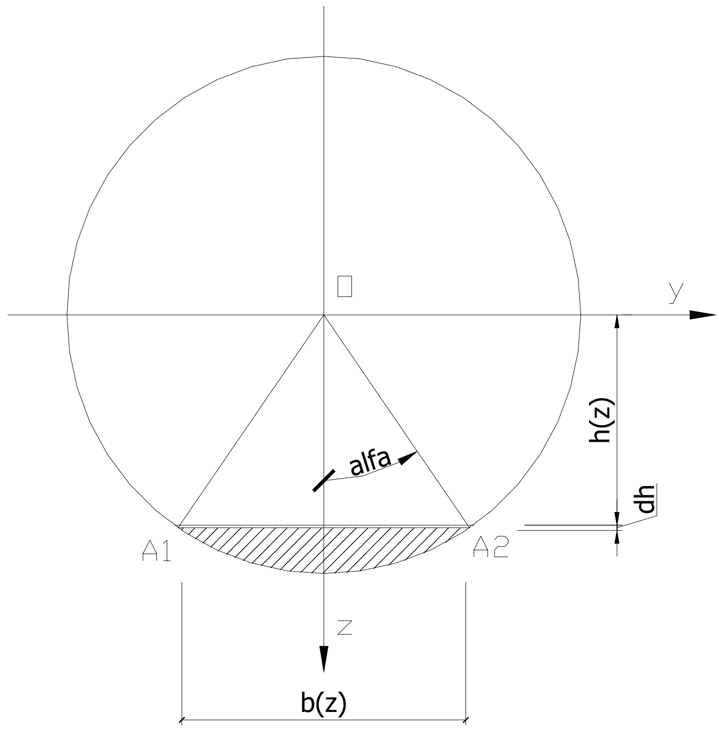
$$\kappa = \frac{144}{bh^5} \cdot \int_0^{h/2} \frac{\left(\frac{h^4}{16} - \frac{h^2 b^2}{2} + z^4\right) \cdot \frac{b^2}{4}}{b^2} bdz$$

$$\kappa = \frac{144}{4h^5} \cdot \int_0^{h/2} \left(\frac{h^4}{16} - \frac{h^2 b^2}{2} + z^4\right) dz \qquad \text{(bonus.3)}$$

$$\kappa = \frac{144}{4h^5} \cdot \left[\frac{h^4}{16} \int_0^{h/2} zdz - \frac{h^2}{2} \int_0^{h/2} z^2 dz + \int_0^{h/2} \left(z^4\right) dz\right]$$

$$\kappa = \frac{144}{4h^5} \cdot \left[\frac{h^4}{16} \cdot \frac{h}{2} - \frac{h^2}{2} \cdot \frac{h^3}{24} + \frac{h^5}{160}\right] = \frac{576}{480} = 1{,}2$$

Współczynnik kappa dla koła:



Wzór ogólny współczynnika:

$$\kappa = \frac{A}{I_y{}^2} \int_A \frac{S_y(z)^2}{b(z)^2} dA \qquad \text{(bonus.4)}$$

Przedstawienie parametrów:

$$
\begin{aligned}
&A = \pi R^2 \\
&I_y{}^2 = \frac{\pi^2 R^8}{16} \\
&b(z) = 2R\sin\alpha \\
&h = R\cos\alpha
\end{aligned}
\tag{bonus.5}
$$

Moment statyczny pola wycinka koła (obszar zakreskowany) wyznaczyć można korzystając ze wzorów na wycinek koła O,A_1,A_2 oraz trójkąta:

$$
\begin{aligned}
&A_{wycinka} = \alpha R^2 \\
&x = \frac{2R\sin\alpha}{3\alpha} \\
&A_{trójkąró} = \frac{1}{2} b(z) \cdot h \\
&x = \frac{2}{3} h
\end{aligned}
\tag{bonus.7}
$$

Gdzie x to współrzędna środka ciężkości

Moment statyczny szukanego zakreskowanego obszaru to różnica momentów statycznych wycinka koła (1) i trójkąta (2):

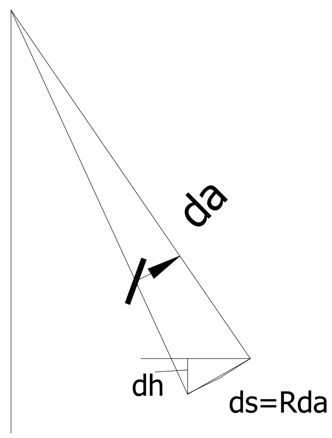
$$
\begin{aligned}
&S = S_1 - S_2 \\
&S = \frac{2}{3} R^3 \sin\alpha - \frac{2}{3} R^3 \sin\alpha \cos \quad \alpha^2 \\
&S = \frac{2}{3} R^3 \sin\alpha (1 - \cos\alpha^2) \\
&S = \frac{2}{3} R^3 \sin\alpha^3
\end{aligned}
\tag{bonus.8}
$$

Przechodząc na współrzędne biegunowe całkę powierzchniową zmieniamy na całkę tylko po jednej zmiennej- po kącie obrotu:

$$
\begin{aligned}
&dA = b(z)\cdot dh\\
&b(z) = 2R\sin\alpha\\
&h(\alpha) = -R\cos\alpha\\
&\frac{dh}{d\alpha} = h'(\alpha) = -R\sin\alpha\\
&dA = 2R\sin^2\alpha d\alpha
\end{aligned}
\tag{bonus.9}
$$

Należy zwrócić uwagę, że dodatni wzrost zmiennej α powoduje ujemną zmianę funkcji h(α)

Inne spojrzenie na dh



$$
\begin{aligned}
&\frac{dh}{ds} = \sin a\\
&dh = ds\sin a\\
&ds = Rda\\
&dh = -R\sin da
\end{aligned}
\tag{bonus.10}
$$

Znak ujemny z tego samego powodu co powyżej (dodatni przyrost kąta a ujemny przyrost funkcji h(α))

$$\kappa = \frac{A}{{I_y}^2} \int_A \frac{S_y(z)^2}{b(z)^2} dA$$

$$\kappa = \frac{16}{\pi R^6} \int_A \frac{\frac{4}{9} R^6 \sin^6 \alpha}{4R^2 \sin^2 \alpha} \cdot \left(2R \sin^2 \alpha\right) d\alpha \qquad \text{(bonus.11)}$$

$$\kappa = \frac{32}{9\pi} \int_A \sin^6 \alpha d\alpha$$

Obliczenie całki:

$$\int_0^\pi \sin^6 \alpha d\alpha = -\frac{1}{6} \sin^5 \alpha \cos\alpha + \frac{5}{6} \int_0^\pi \sin^4 \alpha d\alpha =$$

$$= -\frac{1}{6} \sin^5 \alpha \cos\alpha + \frac{5}{6} \left[-\frac{1}{4} \sin^3 \alpha \cos\alpha + \frac{3}{4} \int_0^\pi \sin^2 \alpha d\alpha \right] =$$

$$= \left\{ \frac{1}{6} \sin^5 \alpha \cos\alpha + \frac{5}{6} \left[-\frac{1}{4} \sin^3 \alpha \cos\alpha - \frac{3}{8} \sin\alpha \cos\alpha + \frac{3}{8} \alpha \right] \right\} \Bigg|_0^\pi \qquad \text{(bonus.12)}$$

$$= \frac{15}{48} \pi$$

Podstawienie wszystkich składowych i wyznaczenie kappy:

$$\kappa = -\frac{16}{9\pi} \int_A \sin^6 \alpha d\alpha$$

$$\kappa = -\frac{32}{9\pi} \cdot \frac{15}{48} \pi = \frac{10}{9} \qquad \text{(bonus.13)}$$