Olga Kopacz, Adam Łodygowski, Wojciech Pawłowski,
Michał Płotkowiak, Krzysztof Tymber
Konsultacje naukowe: prof. dr hab. JERZY RAKOWSKI
Poznań 2002/2003

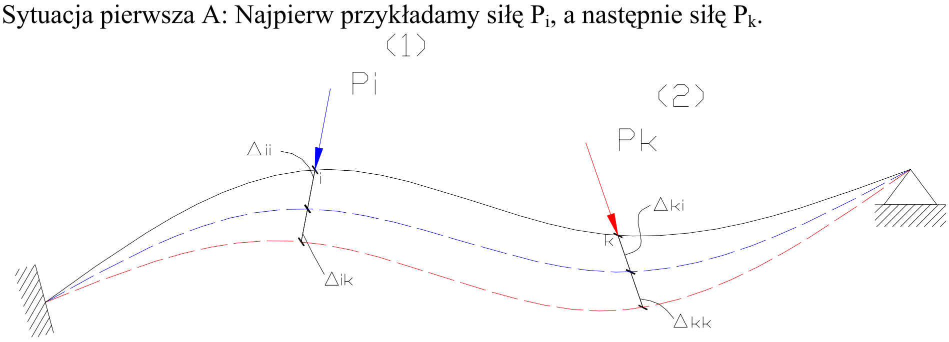
MECHANIKA BUDOWLI 7

TWIERDZENIA O WZAJEMNOŚCIACH

TWIERDZENIE BETTIEGO (o wzajemności prac)

Niech na dowolny układ ramowy statycznie wyznaczalny lub niewyznaczalny, ale o niepodatnych podporach i przy braku naprężeń termicznych, działa układ sił i momentów skupionych. Obciążenia te rozdzielić można, w sposób dowolny, na dwie grupy, z których jedną nazwiemy układem sił P_i a drugą układem sił P_k (przez „siły” rozumieć należy zarówno siły uogólnione).

Sytuacja pierwsza A: Najpierw przykładamy siłę P_i, a następnie siłę P_k.

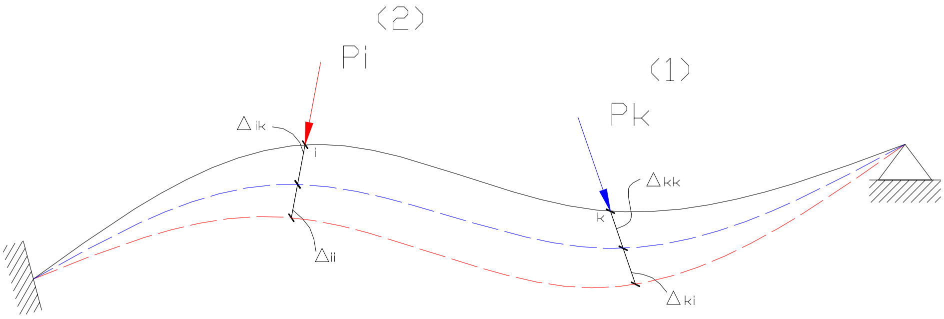


Obkaśnienia:
Punkt i - zestaw punktów poddany obserwacjom,
P_i - układ sił (moment, siła skupiona itd.) działających na punkt i,
Δ_{jn} - przemieszczenie punktu j wywołane przyczyną w pkt n,
Δ_{jn} - przemieszczenie punktu j wywołane jednostkową przyczyną w pkt n,

Najpierw przykładamy grupę sił P_i a następnie do tego stanu wprowadzamy grupę sił P_k. Praca sił zewnętrznych w sytuacji A:

$$
\begin{aligned}
L_z^{\ A} &= \frac{1}{2} P_i v_i \\
L_z^{\ A} &= \left[\frac{1}{2} P_i \Delta_{ii}\right]^{P_i} + \left[\frac{1}{2} P_k \Delta_{kk} + P_i \Delta_{ik}\right]^{P_k}
\end{aligned}
\qquad (6.1)
$$

Sytuacja druga B: Najpierw przykładamy siłę P_k, a następnie siłę P_i



Siły przykładamy podobnie jak w poprzednim wypadku z tą różnicą, że najpierw przykładamy grupę sił P_k, a następnie do tego stanu wprowadzamy grupę sił P_i. Praca sił zewnętrznych od sytuacji B:

$$
L_z^{\ B} = \left[\frac{1}{2} P_k \Delta_{kk}\right]^{P_k} + \left[\frac{1}{2} P_i \Delta_{ki} + P_k \Delta_{ki}\right]^{P_i} \qquad (6.2)
$$

linia A=linia B

Zgodnie z zasadą superpozycji oraz faktem, że wartość pracy nie zależy od historii (kolejności działania przyczyn) obciążeń można zapisać:

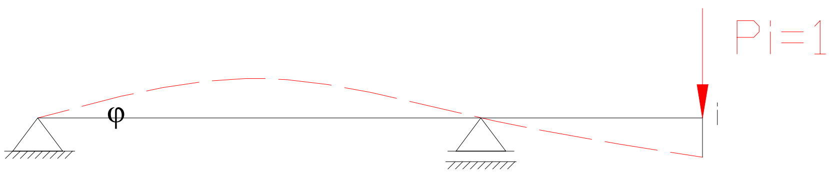
$$
\begin{aligned}
L_z^{\ A} &= L_z^{\ B} \\
P_i \Delta_{ik} &= P_k \Delta_{ki}
\end{aligned}
\qquad (6.3)
$$

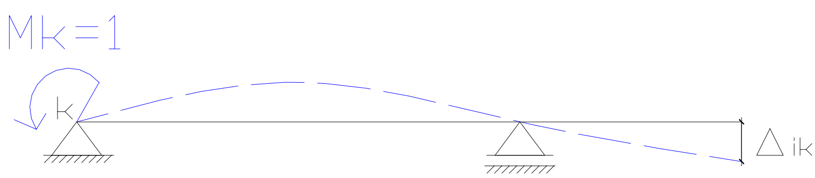
Twierdzenie:
Jeżeli na ustrój sprężysty działają dwa niezależne układy obciążeń, spełniające równania równowagi to: układ sił P_i wykonuje na przemieszczeniach wywołanych układem sił P_k taką samą pracę jak siły P_k na przemieszczeniach spowodowanych układem sił P_i.

TWIERDZENIE MAXWELLA (o wzajemności przemieszczeń)

Rozpatrzmy dowolny układ statycznie wyznaczalny lub niewyznaczalny. Załóżmy obciążenia:
Pierwszy typ obciążenia: Niech na układ działa siła jednostkowa P_k=1, skierowana w kierunku przesunięcia δ_{ki}. **Drugi typ obciążenia**: Na układ działa siła jednostkowa P_i=1, skierowana w kierunku przesunięcia δ_{ik}.
Załóżmy, że podpory nie osiadają, a temperatura nie zmienia się, tak że mamy do czynienia wyłącznie z naprężeniami wywołanymi obciążeniem zewnętrznym. Między przesunięciami δ_{ik} i δ_{ki} zachodzi szczególny związek.

Przykłąd 1:





Do danej belki przykładamy jednostkowe obciążenia; w punkcie „i" jednostkową siłę P_i=1 a w punkcie „k" jednostkowy moment M_k=1. korzystając z wyżej przedstawionego *twierdzenia Bettiego* można zapisać zależność:

$$P_i \Delta_{ik} = M_k \varphi \tag{6.4}$$

Warto zauważyć, że kąt obrotu na którym pracuje moment to nic innego jak Δ_{ki}.

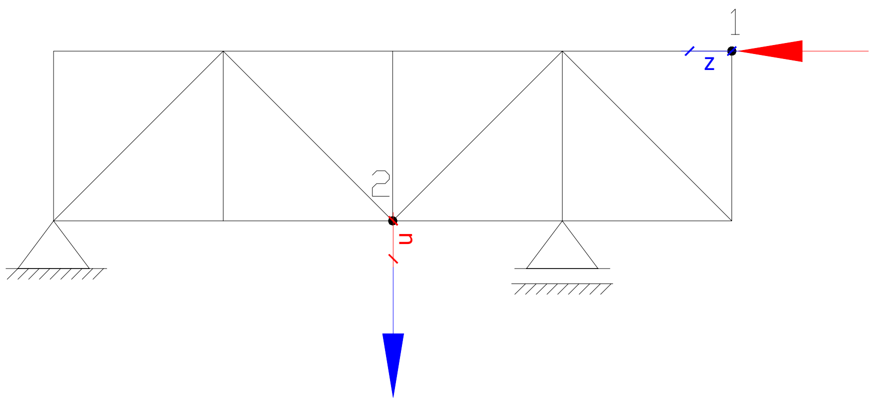
Przyjmując, że układy sił obciążających są jednostkowe, przemieszczenia zapisujemy następująco:

$$\begin{gathered}\Delta_{ik} = \delta_{ik} \\ \varphi = \Delta_{ki} = \delta_{ki}\end{gathered} \tag{6.5}$$

Wykorzystując powyższe założenia otrzymamy:

$$\begin{gathered}P_i \Delta_{ik} = M_k \Delta_{ki} \\ \delta_{ik} = \delta_{ki}\end{gathered} \tag{6.6}$$

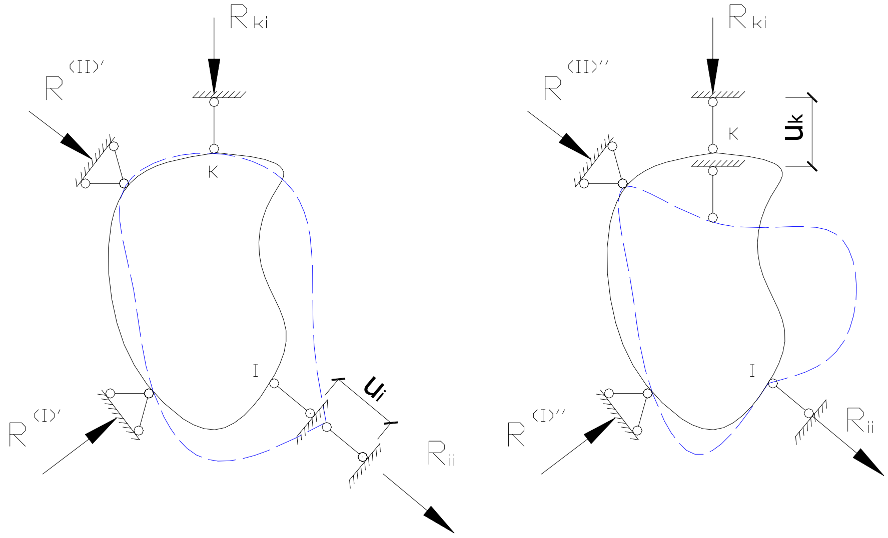
Przykład 2:
Do kratownicy przyłożono siłę jednostkową w puncie 1, która wywołała przemieszczenie w punkcie 2. Następnie do tej samej kratownicy przyłożono siłę jednostkową w puncie 2, która wywołała przemieszczenie punktu 1. Zgodnie z powyższym twierdzeniem przemieszczenia punktu 1 i 2 są sobie równe.



Twierdzenie:
Przemieszczenie uogólnione δ_{ik} odpowiadające i-tej sile uogólnionej i wywołane działaniem jednostkowej siły uogólnionej $P_k=1$ jest równe przemieszczeniu δ_{ki} odpowiadającemu k-tej sile uogólnionej i wywołanemu działaniem jednostkowej siły uogólnionej P_i.

TWIERDZENIE RAYLEIGHA (o wzajemności reakcji)

Ciało odkształcalne przedstawione na rysunku:



Zakładamy ogólny przypadek konstrukcji statycznie niewyznaczalnej. Przypuśćmy wymuszenie kinematyczne u_i po kierunku podpory „i" (rys 1). Następnie założymy wymuszenie kinematyczne u_k po kierunku podpory k (rys 2). Przemieszczenia podpór przyjmijmy za jednostkowe. Zgodnie z twierdzeniem Bettiego można zapisać pracę pierwszego układu :

$$R_{ki} \cdot u_k + R'^{(I)} \cdot 0 + R'^{(II)} \cdot 0 + R_{ii} \cdot 0 = R_{ki} \cdot 0 + R'^{(I)} \cdot 0 + R'^{(II)} \cdot 0 + R_{ii} \cdot u_i \quad (6.7)$$

Przemieszczenia można przyjąć jako jednostowe:

$$\begin{aligned} u_i &= 1_i \\ u_k &= 1_k \end{aligned} \quad (6.8)$$

Podstawiając przyjęte przemieszczenia do wzoru (6.7) otrzymamy:

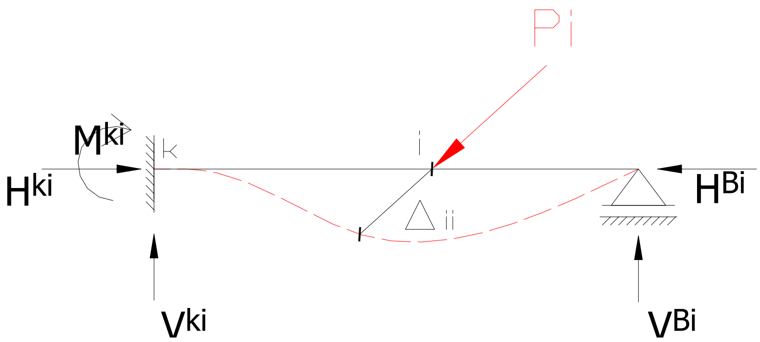
$$\begin{aligned} R_{ki} \cdot 1_k &= R_{ii} \cdot 1_i \\ r_{ki} &= r_{ik} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Zgodnie z przyjętą konwencją reakcje od jednostkowych przemieszczeń zapisujemy małą literą podobnie jak przemieszczenia od jednostkowych reakcji.

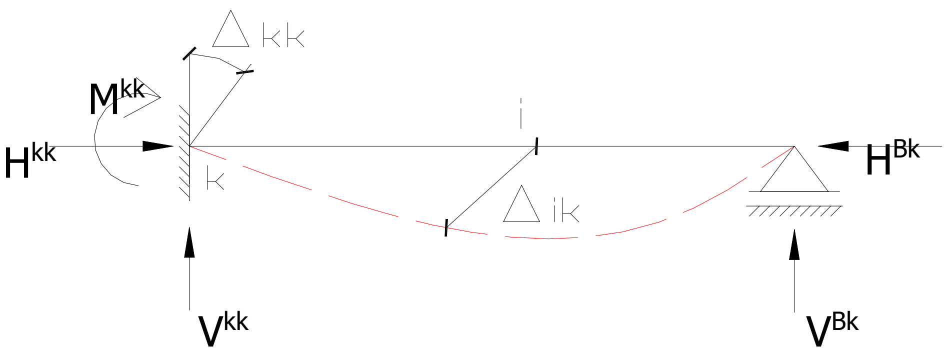
Twierdzenie: Reakcja uogólniona r_{ik} odpowiadająca i-temu przemieszczeniu uogólnionemu a wywołana jednostkowym przemieszczeniem u_k=1 k-tego więzu, równa jest uogólnionej reakcji r_{ki} odpowiadającej u-temu przemieszczeniu uogólnionemu w wywołanej jednostkowym przemieszczeniem u_i i-tego więzu.

TWIERDZENIE O WZAJEMNOŚCI PRZEMIESZCZEŃ REAKCJI

Niech na dowolny układ ramowy statycznie wyznaczalny lub niewyznaczalny, przy braku naprężeń termicznych, działa najpierw układ sił P_i. Zapiszemy pracę tego układu jako $L_{(z)}^1$. Następnie założmy podatność jednej podpór np. kąta obrotu i zapiszmy jego pracę jako $L_{(z)}^2$.



$$L_z^{(1)} = V_{ki} \cdot 0 + H_{ki} \cdot 0 + M_{ki} \cdot \Delta_{kk} + V_{Bi} \cdot 0 + H_{Bi} \cdot 0 + P_i \cdot \Delta_{ik} \qquad (6.10)$$



$$L_z^{(II)} = V_{kk} \cdot 0 + H_{kk} \cdot 0 + M_{kk} \cdot 0 + V_{Bk} \cdot 0 + H_{Bk} \cdot 0 \tag{6.11}$$

Zgodnie z zasadą superpozycji oraz faktem, że wartość pracy nie zależy od kolejności działań przyczyn praca jednego układu i drugiego są sobie równe:

$$\begin{aligned} L_z^{(I)} &= L_z^{(II)} \\ M_{ki} \cdot \Delta_{kk} + P_i \cdot \Delta_{ik} &= 0 \end{aligned} \quad k \tag{6.11}$$

Przyjmujemy, że siła i przemieszczenie są jednostkowe:

$$\begin{aligned} P_i &= 1 \\ \Delta_{kk} &= 1 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Wykorzystując zależności (6.11) i (6.12) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} M_{ki} \cdot 1_k + 1_i \cdot \Delta_{ik} &= 0 \\ m_{ki} &= -\delta_{ik} \\ r_{ki} &= -\delta_{ik} \end{aligned} \tag{6.13}$$

Twierdzenie:
Jeżeli na ustrój sprężysty w punkcie i działa układ sił P_i=1 wywołuje w punkcie k reacje i niezależnie od tego jeśli uogólnione przemieszczenie Δ_k podpory k-tej towarzyszy pojawienie się w punkcie i przemieszczenia δ_{ik} to rzut reakcji r_{ki} na kierunek przemieszczenia Δ_{ik} jest równy rzutowi przemieszczenia Δ_{ik} na kierunek uogólnionej siły P_i z przeciwnym znakiem.