

Olga Kopacz, Krzysztof Krawczyk, Adam Łodygowski,  
Michał Płotkowiak, Agnieszka Świtek, Krzysztof Tymper  
Konsultacje naukowe: prof. dr hab. JERZY RAKOWSKI  
Poznań 2002/2003

## MECHANIKA BUDOWLI 7\* METODA CROSSA (SPOSÓB ITERACYJNY)

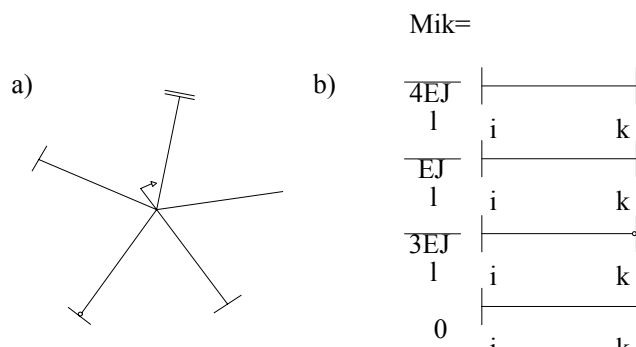
### 1. WPROWADZENIE

Metoda Crossa w łatwy sposób pozwala na wyznaczeniu wyników, których dokładność zależy od liczby przeprowadzonych iteracji. W odróżnieniu od metody sił oraz metody przemieszczeń nie wymaga ona rozwiązania układu równań, ale pozwala na bezpośrednie obliczenie szukanych wielkości.

Stosowanie metody iteracyjnej jest szczególnie korzystne przy rozwiązywaniu belek ciągłych i ram nieprzesuwnych, lub ram o niewielkiej liczbie niezależnych przesuwów.

Podstawowe założenia tej metody są identyczne z założeniami metody klasycznej. Poszukiwanymi wielkościami są **przęsłowe momenty przywęzłowe**, a schemat podstawowy przyjmuje się identyczny jak w metodzie przemieszczeń.

Układ prętowy po zastąpieniu go układem podstawowym będzie składał się z pojedynczych belek, które można przedstawić za pomocą schematów statycznych. Obrazuje to rysunek 1.1, na którym przedstawiono układ jednokrotnie geometrycznie niewyznaczalny (a) oraz rozkłady momentów na poszczególnych prętach (b). Wielkości te są proporcjonalne do sztywności tych prętów.



Rys. 1.1 a) Przykładowy układ prętów b) proporcje rozkładu sztywności na poszczególnych prętach

Mianem sztywności pręta określamy wartość momentu  $M_{ik}$  (przesłowego momentu przywęzłowego), jaki powstanie przez obrót przekroju  $i$  o kąt jednostkowy. Umowna sztywność pręta –  $s$ , zależy od rodzaju podparcia węzła, co obrazuje rys.1.1. Sztywnością węzła  $S_i$ , w którym zbiega się kilka prętów nazywamy sumę sztywności poszczególnych prętów.

$$S_i = \sum_k s_{ik} \quad (1.1)$$

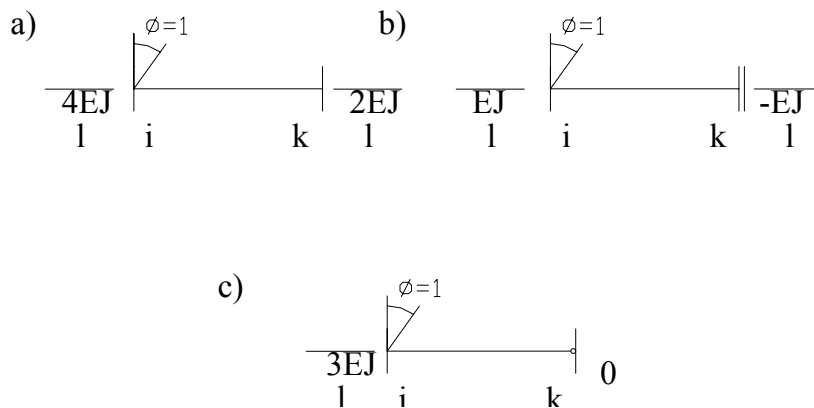
Moment przyłożony w węźle rozkłada się na poszczególne pręty proporcjonalnie do współczynnika rozdziału  $\mu_{ik}$ .

$$\mu_{ik} = \frac{s_{ik}}{S_i} \quad (1.2)$$

Przy czym:

$$\sum_k \mu_{ik} = 1 \quad (1.3)$$

Współczynnik rozdziału wyraża udział pręta w przeniesieniu momentu wywołanego jednostkowym obrotem węzła (Rys. 1.2).



Rys. 1.2 Rozkład momentów po obrocie węzłów o jednostkowy kąt  $\varphi$ .

Stosunek momentu w drugim przekroju brzegowym do momentu przekazywanego z przekroju doznającego obrotu o kąt jednostkowy nazywamy współczynnikiem przeniesienia –  $\lambda_{ik}$ .

$$\lambda_{ik} = \frac{M_{ki}}{M_{ik}} \quad (1.4)$$

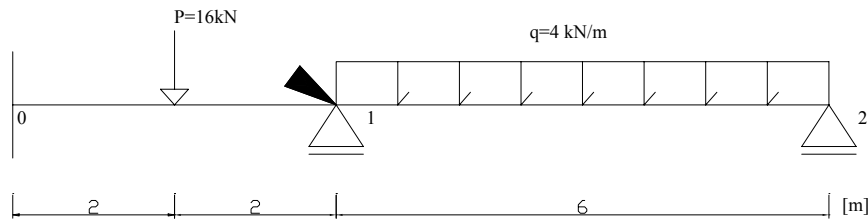
Z rysunku 1.2 możemy zauważyć, że dla pręta:

- a)  $\lambda_{ik}=0,5$
- b)  $\lambda_{ik}=0$
- c)  $\lambda_{ik}=-1$

dla pręta wspornikowego  $\lambda_{ik}=0$

## 2. PRZYKŁAD

W celu zobrazowania prostoty i automatyzmu postępowania w przypadku obliczeń dowolnie skomplikowanych ram metodą Crossa posłużymy się przykładem nieprzesuwnej belki ciągłej jednokrotnie kinematycznie niewyznaczalnej (obrót przekroju w węźle „1”) - Rys.2.1.



Rys. 2.1

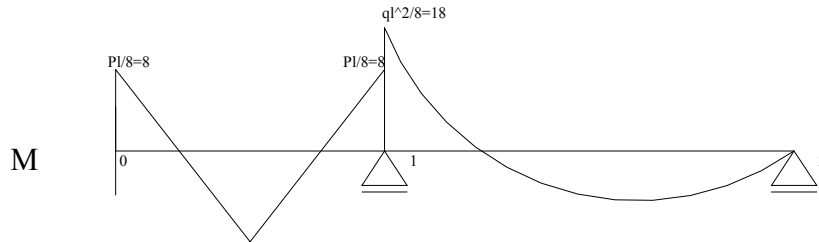
Wyobraźmy sobie, że układ jest geometrycznie wyznaczalny (jak w metodzie przemieszczeń), a wszystkie operacje przeprowadzamy na układzie podstawowym.

0-1	Węzeł 1			2-1
	suma	Belka 1-0	Belka 1-2	
	1,0	$\mu=2/3$	$\mu=1/3$	
Wartości momentów dla poszczególnych belek jak w met.przemieszcz.				
<b>-8</b>	<b>-18+8= -10</b>	<b>8 =24/3</b>	<b>-18 = -54/3</b>	<b>0,0</b>
$\lambda=0,5$ $\lambda*20/3=10/3$	<b>10</b>	$10*2/3 = 20/3$	$10*1/3 = 10/3$	$\lambda=0$ $\lambda*10/3=0$

WYKŁADY Z MECHANIKI BUDOWLI  
DYNAMIKA BUDOWLI- DRGANIA

Wyniki końcowe			
<b>-14/3</b>	<b>0,0</b>	<b>44/3</b>	<b>-44/3</b>

Tab. 2.1



Rys. 2.2 Wykres momentów dla poszczególnych belek jak w metodzie przemieszczeń

W tabeli opisujemy węzły, w których zbiegają się pręty, w naszym przykładzie jest to węzeł 1.

Obliczamy sztywności poszczególnych prętów:

$$0-1 \quad s_{10} = \frac{4EJ}{4} = EJ \quad \text{dla pręta obustronnie utwierdzonego}$$

$$1-2 \quad s_{12} = \frac{3EJ}{6} = 0,5EJ \quad \text{dla pręta z przegubem po prawej stronie}$$

Sztywność węzła 1:

$$S_1 = EJ + 0,5EJ = 1,5EJ$$

Współczynniki rozdziału:

$$\mu_{10} = \frac{EJ}{1,5EJ} = \frac{2}{3}$$

$$\mu_{12} = \frac{0,5EJ}{1,5EJ} = \frac{1}{3}$$

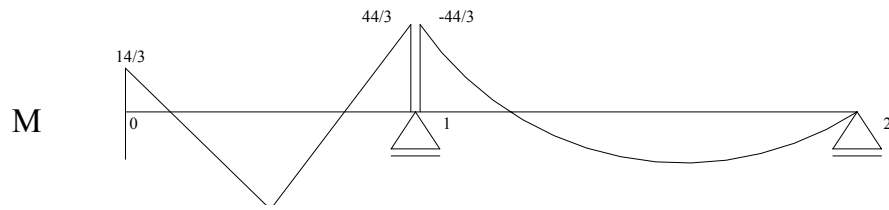
Sprawdzenie:

$$\mu_{10} + \mu_{12} = 1$$

Rozdzielamy niezrównoważony moment zginający w węźle „1” o wartości 10kNm na pręty 1-0 i 1-2. Współczynniki przeniesienia pozwalają nam obliczyć wartości momentów w punktach 0 i 2.

W bardziej skomplikowanych zadaniach przeprowadzamy więcej iteracji.

Końcowy wykres momentów został przedstawiony na rysunku 2.3.



Rys. 2.3 Końcowy wykres momentów