7.

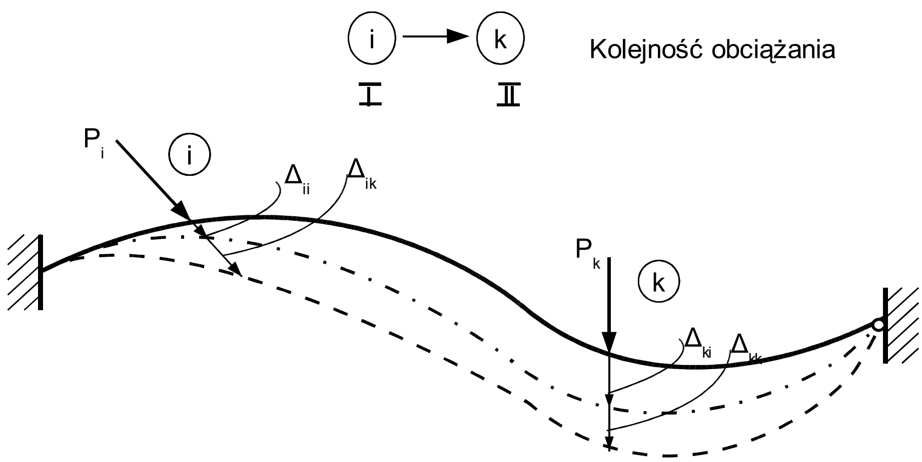
7. TWIERDZENIA O WZAJEMNOŚCI

7.1. Twierdzenie Bettiego (o wzajemności prac)

Niech na dowolny układ ramowy statycznie wyznaczalny lub niewyznaczalny, ale o niepodatnych podporach i przy braku naprężeń termicznych, działa układ sił i momentów skupionych. Obciążenia te rozdzielić można, w sposób dowolny, na dwie grupy, z których jedną nazwiemy układem sił P_i a drugą układem sił P_k (przez "siły" należy rozumieć siły uogólnione). Przeanalizujemy dwie metody obciążenia układu.

I przypadek:

Najpierw przykładamy grupę sił P_i , a następnie do tego stanu wprowadzamy grupę sił P_k (rys. 7.1).



Rys. 7.1. Ugięcie belki pod wpływem działania sił P_i, a następnie P_k

Objaśnienia:

P_i - układ sił (moment, siła skupiona itd.) działający na punkt *i*,

Δ_{ii} - przemieszczenie punktu *i* wywołane przyczyną w punkcie *i*,

Δ_{ik} - przemieszczenie punktu *i* wywołane przyczyną w punkcie *k*,

Δ_{ki} - przemieszczenie punktu *k* wywołane przyczyną w punkcie *i*,

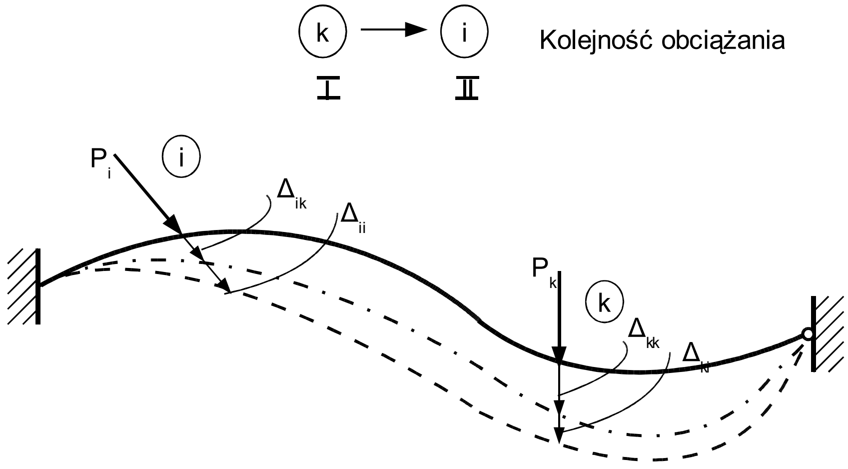
Δ_{kk} - przemieszczenie punktu *k* wywołane przyczyną w punkcie *k*.

Praca sił zewnętrznych na przemieszczeniach przez nie wywołanych wynosi:

$$L_{ik}=\left[\frac{1}{2}P_i\Delta_{ii}\right]^{P_i}+\left[\frac{1}{2}P_k\Delta_{kk}+P_i\Delta_{ik}\right]^{P_k} \tag{7.1}$$

II przypadek:

Układ obciążenia jest taki sam jak w przypadku I z tą różnicą, że najpierw przykładamy grupę sił P_k , a następnie do tego stanu wprowadzamy grupę sił P_i (rys. 7.2).



Rys. 7.2. Ugięcie belki pod działaniem sił P_k, a potem P_i

Praca sił zewnętrznych ma obecnie postać:

$$L_{ki}=\left[\frac{1}{2}P_k\Delta_{kk}\right]^{P_k}+\left[\frac{1}{2}P_i\Delta_{ii}+P_k\Delta_{ki}\right]^{P_i} \tag{7.2}$$

Po zrównoważeniu prawych stron równań, zgodnie z zasadą superpozycji, oraz faktem, że wartość pracy nie zależy od historii obciążeń (kolejności działania przyczyn) otrzymujemy:

$$L_{ik}=L_{ki}$$

po uproszczeniu:

$$P_i\Delta_{ik}=P_k\Delta_{ki} \tag{7.3}$$

Twierdzenie Bettiego (o wzajemności prac):

Jeżeli na ustrój sprężysty działają dwa nie zależne od siebie układy obciążeń, spełniające warunki równowagi, to praca obciążeń jednego układu wykonana na przemieszczeniach wywołanych działaniem drugiego układu równa się pracy obciążeń drugiego układu wykonanej na przemieszczeniach wywołanych działaniem pierwszego układu obciążeń.

7.2. Twierdzenie Maxwella (o wzajemności przemieszczeń)

Rozważmy dowolny układ statycznie wyznaczalny lub niewyznaczalny. Załóżmy obciążenia. Załóżmy że podpory nie osiadają, a temperatura nie zmienia się, mamy więc do czynienia wyłącznie z naprężeniami wywołanymi obciążeniem zewnętrznym.

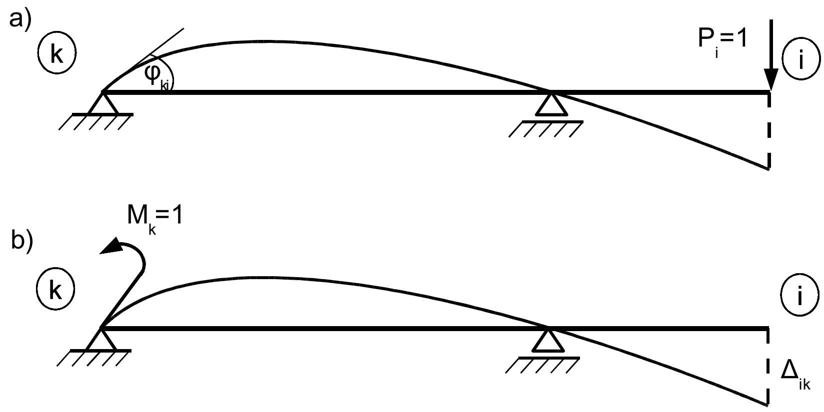
Układ poddamy działaniu dwóch typów obciążenia i zbadamy przemieszczenia:

- typ I: działa siła jednostkowa $P_i=1$ (w punkcie *i*), badamy przemieszczenia w punkcie *k* (δ_{ki}),
- typ II: działa siła jednostkowa $P_k=1$ (w punkcie *k*), mierzymy przemieszczenie w punkcie *i* (δ_{ik}).

Pomiędzy przemieszczeniami δ_{ki} i δ_{ik} zachodzi szczególny związek. Pokażemy to na dwóch przykładach.

Przykład 1

Analizie zostaną poddane przemieszczenia w belce wolnopodpartej.



Rys. 7.3. Do belki zostaje: a) przyłożona jednostkowa siła, b) przyłożony jednostkowy moment

Do danej belki przykładamy kolejno jednostkowe obciążenia: w punkcie *i* jednostkową siłę $P_i=1$, a w punkcie *k* jednostkowy moment $M_k=1$. Spowoduje to powstanie odpowiednich przemieszczeń φ_{ki} i Δ_{ik}.

Korzystając z twierdzenia Bettiego można zapisać zależność:

$$P_i \Delta_{ik} = M_k \Phi_{ki} \tag{7.4}$$

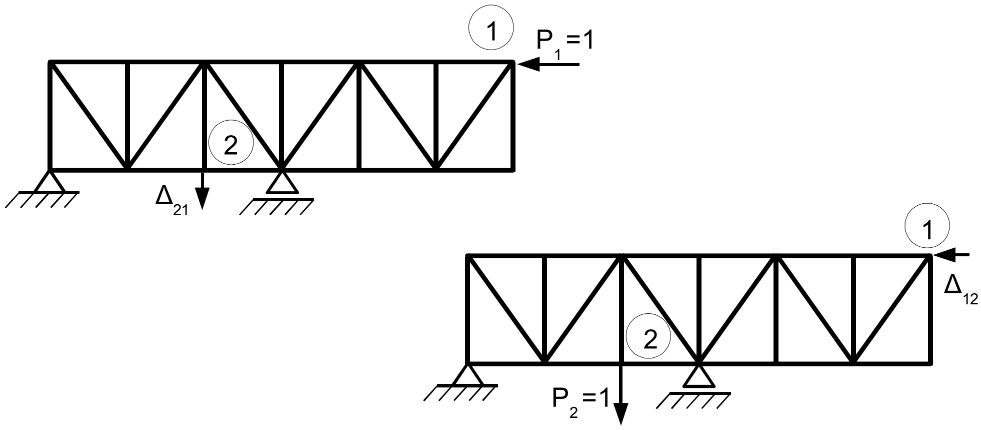
Należy zwrócić uwagę na to, że teraz przesunięcie Δ_{ki} we wzorze (7.3) ma wartość kąta Φ_{ki} w mierze łukowej.

Przyjmując, że układy sił obciążających są jednostkowe, zapis można uprościć:

$$\Delta_{ik} = \Phi_{ki} \tag{7.5}$$

Przykład 2

Do kratownicy przyłożono siłę jednostkową w punkcie *1*, która wywołała przemieszczenie w punkcie *2*. Następnie do tej samej kratownicy przyłożono siłę jednostkową w punkcie *2*, która wywołała przemieszczenie punktu *1*. Zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami przemieszczenia w punktach *1* i *2* w odpowiednich kierunkach i wywołane odpowiednimi siłami są sobie równe.



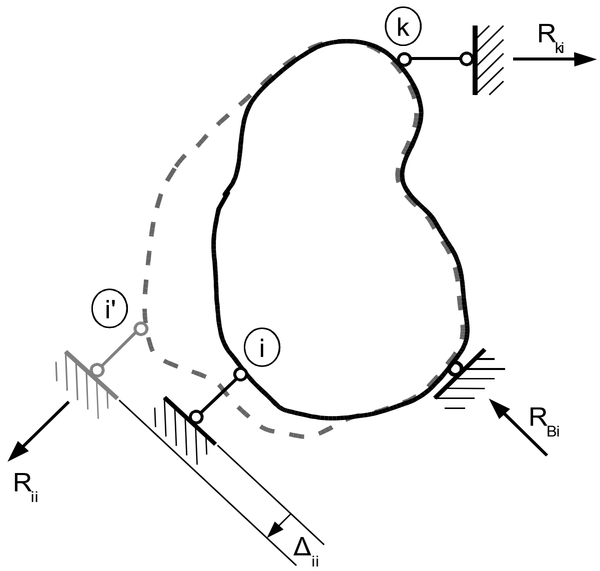
Rys. 7.4. Przemieszczenia kratownicy wywołane działaniem sił w punktach 1 i 2

Twierdzenie Maxwella (o wzajemności przemieszczeń).

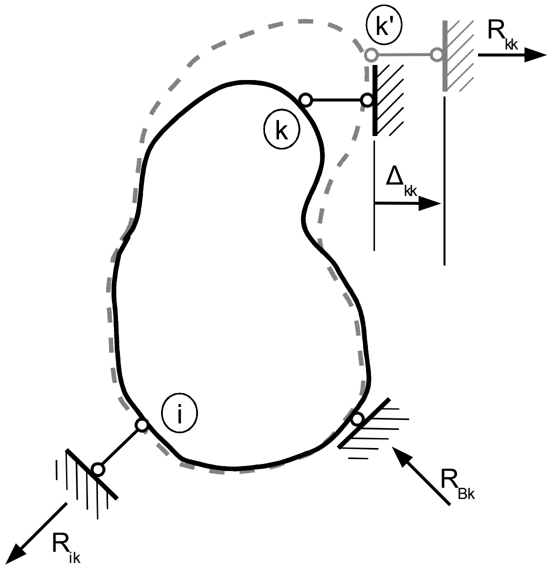
Przemieszczenie uogólnione δ_{ik} odpowiadające *i*-tej sile uogólnionej (po kierunku tej siły) i wywołane działaniem uogólnionej siły $P_k=1$, równe jest przemieszczeniu uogólnionemu δ_{ki}, odpowiadającemu *k*-tej sile uogólnionej i wywołanemu przez działanie jednostkowej siły uogólnionej $P_i=1$.

7.3. Twierdzenie Rayleigha (o wzajemności reakcji)

Rozważmy pracę reakcji na przemieszczeniach w dowolnym układzie sprężystym (ciało odkształcalne) przedstawionym na rys. 7.5.



Rys. 7.5. Reakcje powstałe na skutek przemieszczenia podpory "i"



Rys. 7.6. Reakcje powstałe na skutek przemieszczenia podpory "k"

Zakładamy ogólny przypadek konstrukcji statycznie niewyznaczalnej. Rysunek 7.5 przedstawia przypuszczalne (narzucone) wymuszenie kinematyczne Δ_{ii} , po kierunku podpory w punkcie *i*. Rysunek 7.6 to postać odkształcona i reakcje wywołane przesunięciem Δ_{kk} , po kierunku podpory *k*.

Zgodnie z twierdzeniem Bettiego można przyrównać pracę sił układu pierwszego na przemieszczeniach układu drugiego do pracy sił układu drugiego na przemieszczeniach układu pierwszego:

$$R_{ii}\,0+R_{Bi}\,0+R_{ki}\,\Delta_{kk}=R_{kk}\,0+R_{Bk}\,0+R_{ik}\,\Delta_{ii}$$
$$R_{ki}\,\Delta_{kk}=R_{ik}\,\Delta_{ii} \tag{7.6}$$

Jeżeli przemieszczenia podpór przyjmujemy jako jednostkowe:

$$\Delta_{kk}=1 \qquad \Delta_{ii}=1 \tag{7.7}$$

to ostatecznie otrzymujemy:

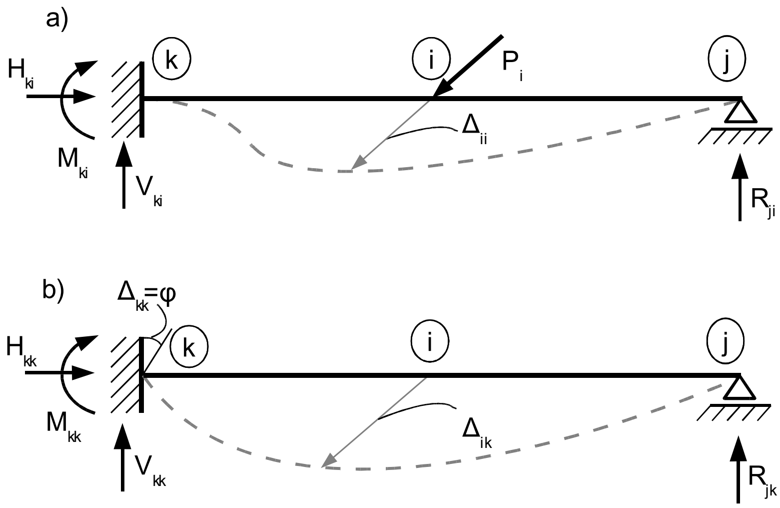
$$R_{ki}=R_{ik}$$
$$r_{ki}=r_{ik} \tag{7.8}$$

Twierdzenie Rayleigha:

Reakcja uogólniona r_{ik} odpowiadająca i-temu przemieszczeniu uogólnionemu a wywołana jednostkowym przemieszczeniem $\Delta_{kk}=1$ *k*-tego więzu równa jest uogólnionej reakcji r_{ki} odpowiadającej k-temu przemieszczeniu uogólnionemu wywołana jednostkowym przemieszczeniem $\Delta_{ii}=1$ *i*-tego więzu.

7.4. Twierdzenie o wzajemności przemieszczeń i reakcji

Niech na dowolny układ ramowy statycznie wyznaczalny lub niewyznaczalny, przy braku naprężeń termicznych, działa najpierw układ sił P_i. Zapiszemy pracę tego układu jako L_I. Następnie załóżmy podatność jednej z podpór np. kąta obrotu φ_k i zapiszmy jego pracę jako L_{II}.



Rys. 7.7. Ugięcie belki pod działaniem: a) uogólnionej siły P_i b) uogólnionego przemieszczenia φ_k

Formułujemy równanie pracy sił układu I na przemieszczeniach układu II:

$$M_{ki}\Delta_{kk}+H_{ki}0+V_{ki}0+P_i\Delta_{ik}+R_{ji}0=L_I \tag{7.9}$$

oraz sił układu II na przemieszczeniach układu I:

$$M_{kk}0+H_{kk}0+V_{kk}0+R_{jk}0=L_{II} \tag{7.10}$$

Po porównaniu obu prac:

$$L_I=L_{II} \tag{7.11}$$

otrzymujemy zależność:

$$M_{ki}\Phi_{kk}+P_i\Delta_{ik}=0 \tag{7.12}$$

Dalej przyjmujemy, że siła i przemieszczenie są jednostkowe:

$$P_i = 1_i = 1$$
$$\Delta_{kk} = \phi_k = 1_k = 1 \tag{7.13}$$

i otrzymujemy związek pomiędzy reakcją i przemieszczeniem:

$$M_{ki}\, 1 + 1\, \Delta_{ik} = 0$$
$$M_{ki} = -\Delta_{ik} \tag{7.14}$$

Na symbolach ogólnych można zapisać:

$$m_{ki} = -\delta_{ik} \tag{7.15}$$

Zgodnie z twierdzeniem Rayleigha możemy posłużyć się uogólnionym symbolem reakcji:

$$r_{ki} = -\delta_{ik} \tag{7.16}$$

Twierdzenie:

Jeżeli na ustrój sprężysty w punkcie *i* działa uogólniona siła jednostkowa $P_i=1$, wywołująca w podporze *k* reakcję r_{ki} i niezależnie od tego jeśli uogólnionemu przemieszczeniu jednostkowemu δ_k podpory *k*-tej towarzyszy pojawienie się w punkcie *i*-tym przemieszczenia Δ_{ik}, to rzut reakcji r_{ki} na kierunek przemieszczenia δ_k jest równy rzutowi przemieszczenia Δ_{ik} na kierunek uogólniony siły P_i z przeciwnym znakiem $(-P_i)$.