

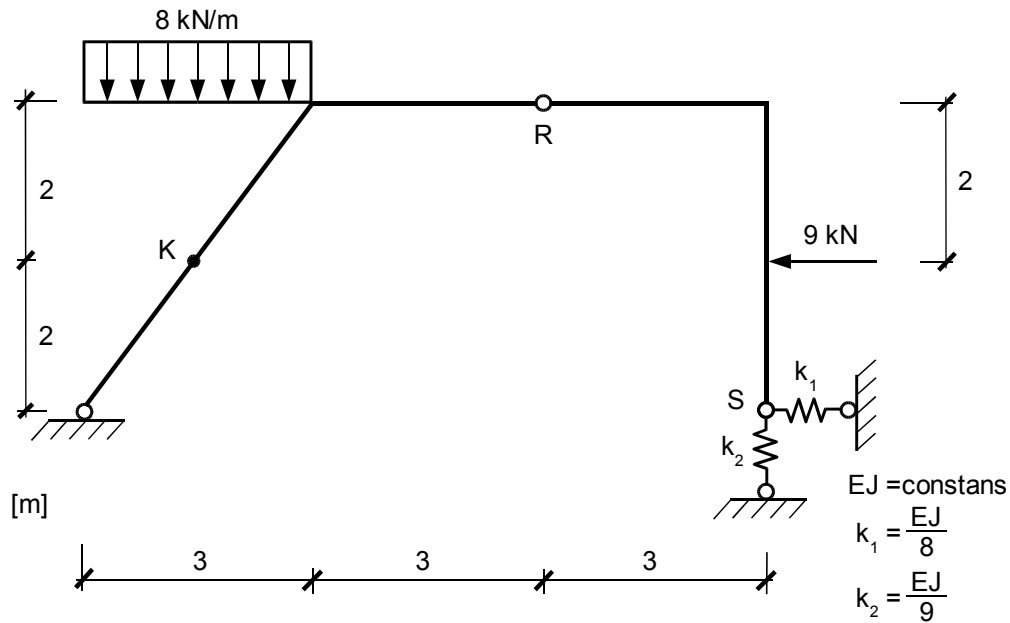
15.



15. ZADANIA - POWTÓRKA

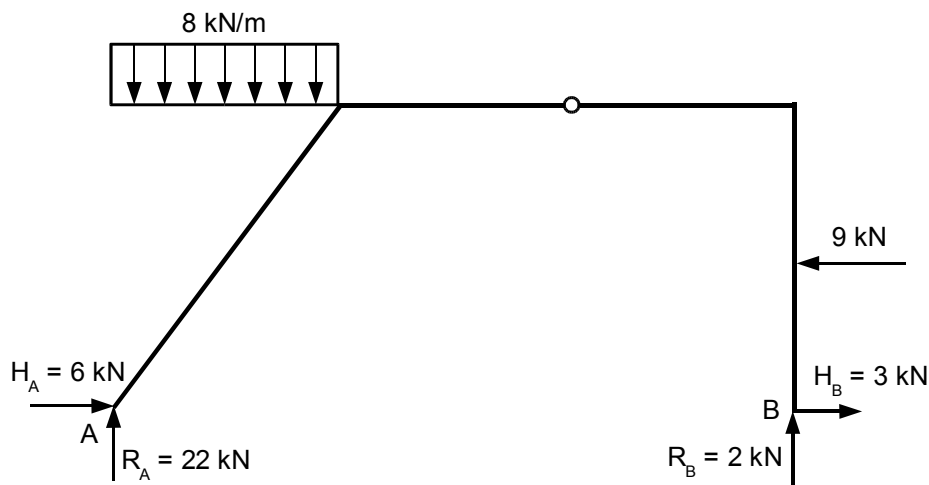
Zadanie 1

W ramie przedstawionej na rys 15.1 obliczyć kąt obrotu przekroju w punkcie K oraz obrót cięgiwy RS . W obliczeniach można pominąć wpływ sił normalnych i tnących.



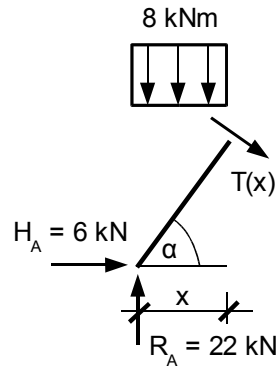
Rys. 15.1. Schemat układu – rama statycznie wyznaczalna

Aby wyznaczyć wykres momentów dla obciążenia zewnętrznego należy określić wartości reakcji.



Wykres momentów od obciążenia zewnętrznego na słupie pochyłym ma kształt paraboliczny.

Ekstremum momentu jest w punkcie, gdzie siłą tnącą jest równa zero. Układamy równanie tnącej:



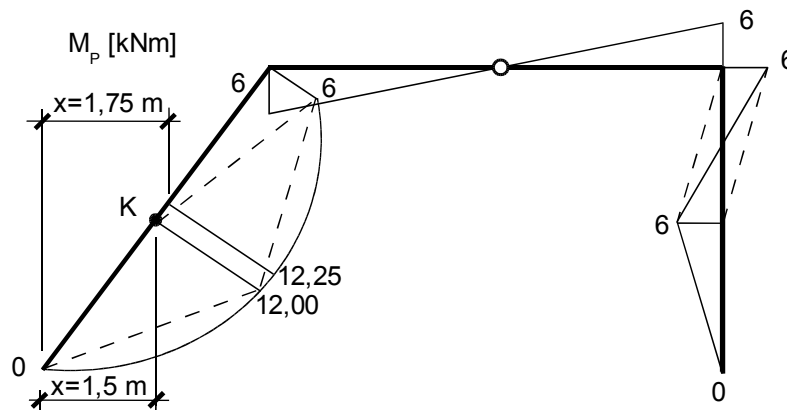
$$T(x) = 22 \cdot \cos \alpha - 6 \cdot \sin \alpha - 8x \cdot \cos \alpha$$

a następnie określamy współrzędną ekstremum

$$T(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,75 \text{ [m]}$$

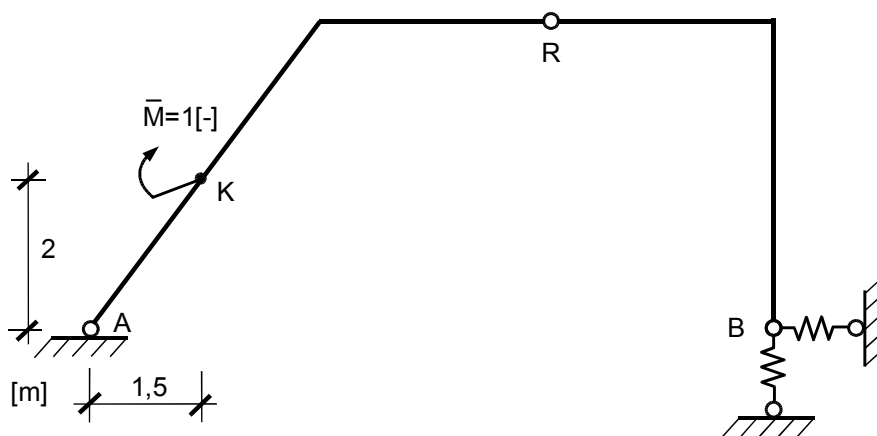
wartość momentu w tym punkcie wynosi

$$M(x = 1,75) = 12,25 \text{ [kNm]}$$

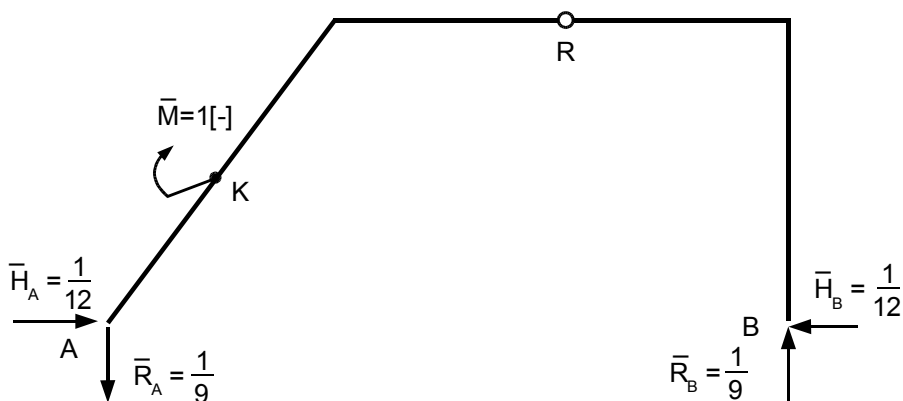


a) Obrót przekroju w punkcie *K*

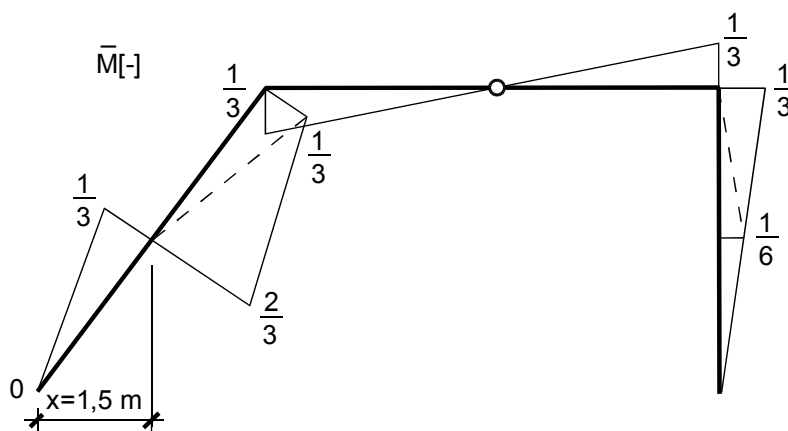
Aby znaleźć kąt obrotu przekroju obciążamy ramę momentem wirtualnym $M = 1$ [-] w punkcie *K*



Reakcje wirtualne mają wartość:



Znając reakcje tworzymy wykres momentu zginającego wywołanego działaniem momentu wirtualnego w punkcie K:



Obrót przekroju obliczymy z równania pracy wirtualnej:

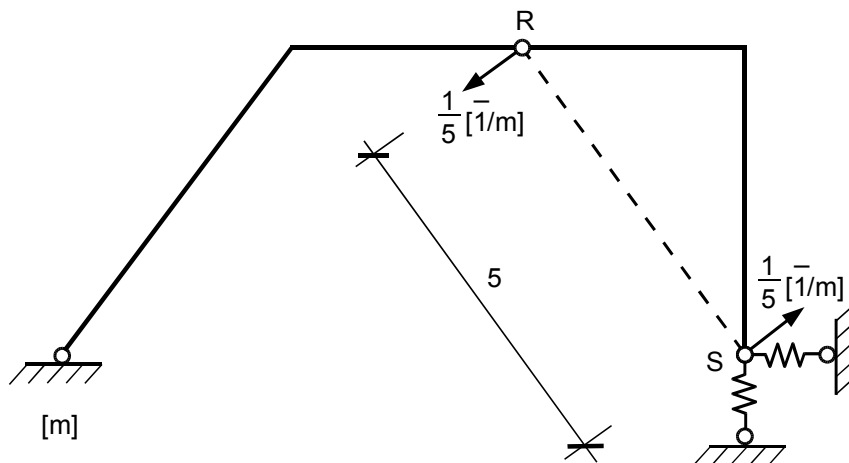
$$\bar{I} \cdot \varphi_K = \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EJ} ds + \sum R \cdot \bar{R} \cdot \frac{1}{k} \quad \left[\frac{kNm \cdot l}{kNm^2} \cdot m + kN \cdot \frac{l}{m} \cdot \frac{m^3}{kNm^2} = l = rad \right] \quad (15.1)$$

korzystając z metody Wereszczagina-Mohra:

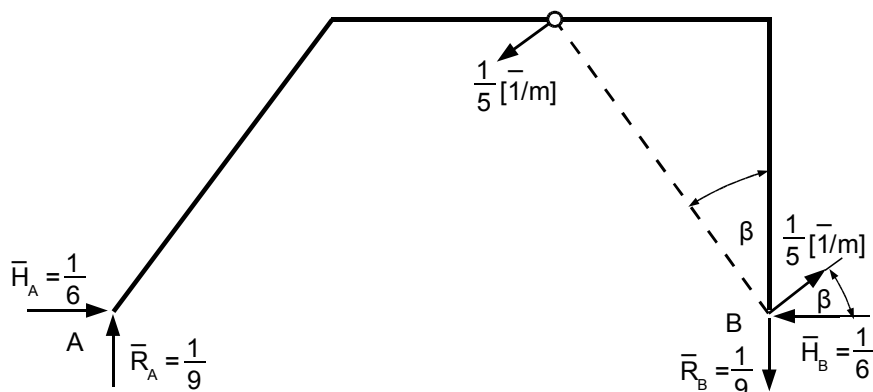
$$\begin{aligned} EJ \varphi_K &= \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 12 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{8 \cdot 1,5^2}{8} \cdot 2,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 6 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\right) + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 12 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{8 \cdot 1,5^2}{8} \cdot 2,5 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot 9 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) \cdot 8 \\ EJ \varphi_K &= -\frac{10}{3} - \frac{5}{8} + \frac{10}{3} + \frac{25}{3} + \frac{15}{8} + 4 + \frac{7}{3} - \frac{4}{3} - \frac{2}{3} + 2 - 2 \\ \varphi_K &= \frac{167}{12 EJ} \end{aligned}$$

b) Obrót cięgiwy RS

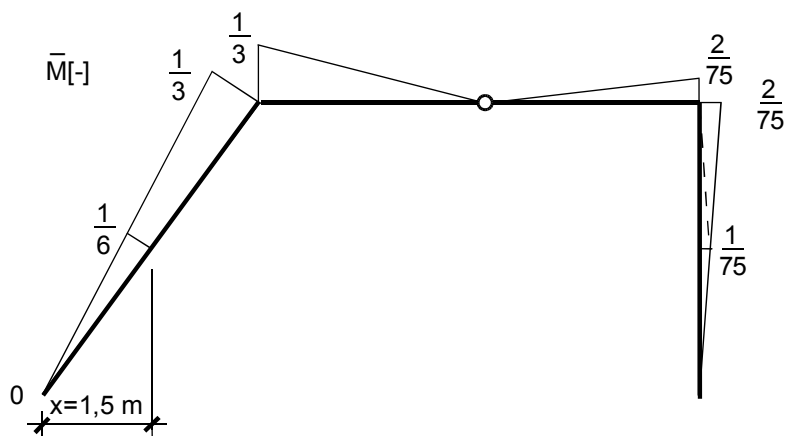
Obciążamy układ wirtualnymi siłami skierowanymi prostopadle do cięgiwy RS o wartościach jeden przez odległość pomiędzy punktami R i S.



Najpierw wyznaczamy reakcje:



a potem wykres momentów gnących:



Zgodnie z zasadą pracy wirtualnej:

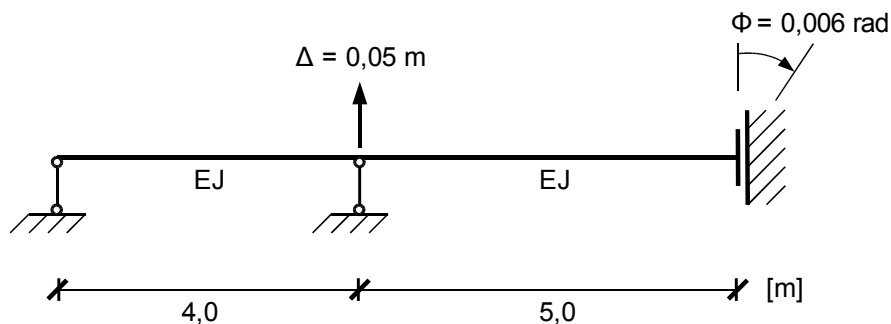
$$\bar{1} \cdot \varphi_{RS} = \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EJ} ds + \sum R \cdot \bar{R} \cdot \frac{1}{k} \quad \left[\frac{kNm \cdot l}{kNm^2} \cdot m + kN \cdot \frac{l}{m} \cdot \frac{m^3}{kNm^2} = l = rad \right] \quad (15.2)$$

Obrót cięciwy RS (korzystając z metody Wereszczagina-Mohra) wynosi:

$$\begin{aligned} EJ \varphi_{RS} &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{8 \cdot 3^2}{8} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{75} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{75} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{75}\right) + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{75}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{75}\right)\right] + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{75}\right) + 3 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot 8 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot 9 \\ EJ \varphi_{RS} &= -\frac{10}{3} - 5 - 2 + \frac{4}{25} + \frac{2}{15} - \frac{8}{75} - \frac{4}{75} - 4 - 2 \\ \varphi_{RS} &= -\frac{8l}{5EJ} \end{aligned}$$

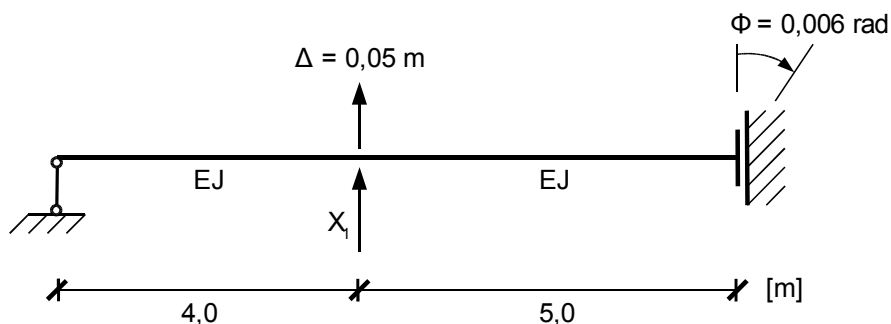
Zadanie 2

Znaleźć wykres momentów $M_{\Delta}^{(n)}$ dla belki (rys. 15.2), której podpory doznają przemieszczenia.



Rys. 15.2. Schemat zadanej belki

Belka jest jeden raz statycznie niewyznaczalna. Przyjmujemy następujący układ podstawowy:



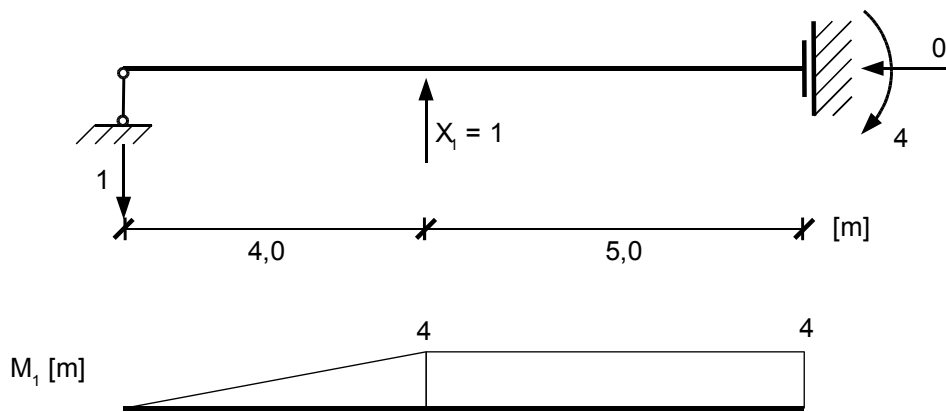
Rys. 15.3. Układ podstawowy

Równanie kanoniczne ma postać:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1\Delta} = 0$$

Tworzymy wykresy momentów od:

- stanu $X_1 = 1$



Rys. 15.4. Stan od siły $X_1 = 1$ oraz wykres momentów M_1

Korzystając ze wzoru:

$$\delta_{ik} = \int_S \frac{M_i M_k}{EJ} ds$$

I stosując metodę numerycznego całkowania Wereszczagina Mohra otrzymujemy:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \right) \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 5 \right] = \frac{101,33}{EJ}$$

Natomiast ze wzoru:

$$\Delta_{i\Delta} = - \sum_i R_i \cdot \Delta_i - \sum_i M_i \cdot \varphi_i$$

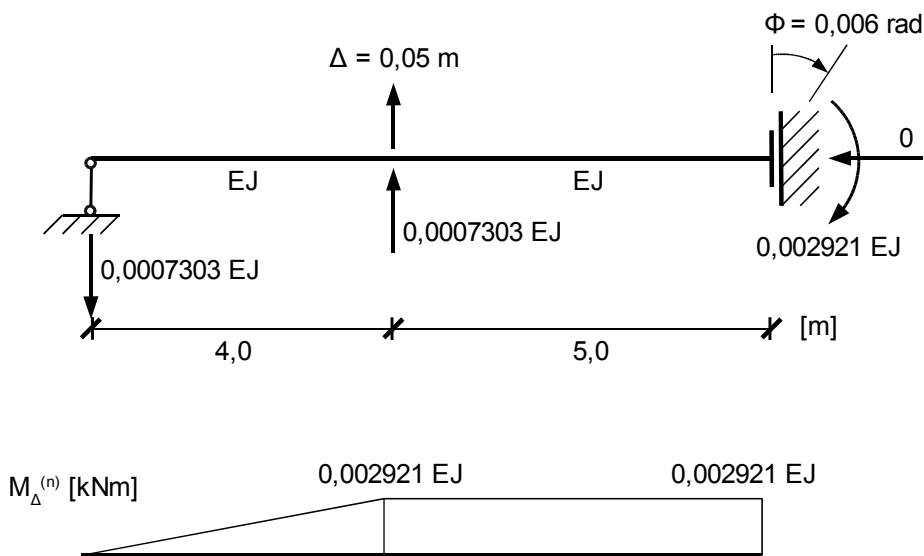
obliczamy

$$\Delta_{1\Delta} = -[1 \cdot 0,05 + 4 \cdot 0,006] = -0,074$$

Podstawiając powyższe wyniki do równania kanonicznego możemy obliczyć X_1

$$X_1 = - \frac{\Delta_{1\Delta}}{\delta_{11}} = \frac{0,074}{\frac{101,33}{EJ}} = 0,0007303 EJ [m^2]$$

Znając już wartość X_1 możemy narysować wykres momentów w stanie niewyznaczalnym

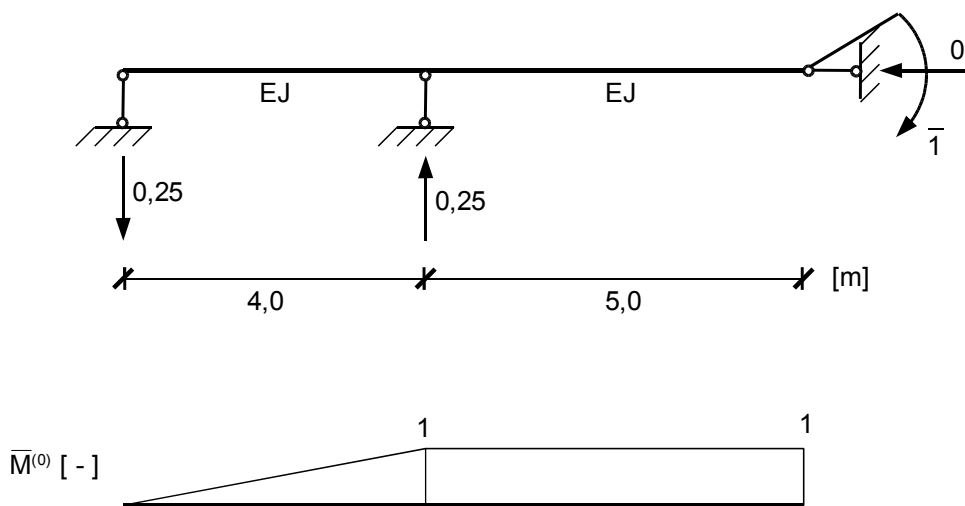


Rys. 15.5. Schemat belki i wykres momentów w stanie niewyznaczalnym

Przy sprawdzeniu kinematycznym posłużymy się wzorem:

$$\bar{I} \cdot \delta_j = \int \frac{M_{\Delta}^{(n)} \cdot \bar{M}^{(0)}}{EJ} \cdot dx - \sum \bar{R}_i \Delta_i \tag{15.3}$$

Przyjmujemy nowy układ podstawowy obciążony siłą wirtualną (rys. 15.6) i dla niego tworzymy wykres momentów:



Rys. 15.6. Nowy układ podstawowy i wykres momentów $\bar{M}^{(0)}$

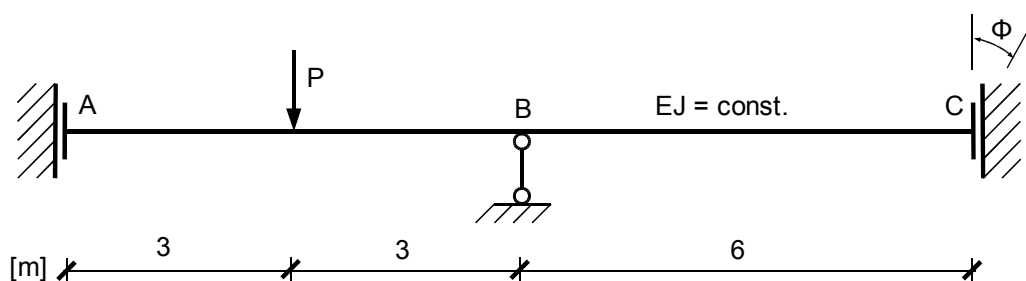
$$\bar{I} \cdot \varphi = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,00291 EJ + 1 \cdot 5 \cdot 0,00291 EJ \right) - (1 \cdot 0,006 + 0,25 \cdot 0,05)$$

$$\bar{I} \cdot \varphi = 0,0000003 \text{ rad} \approx 0$$

Okazało się, że rzeczywiście uzyskaliśmy wartość bliską zeru co daje nam gwarancję poprawności rozwiązania.

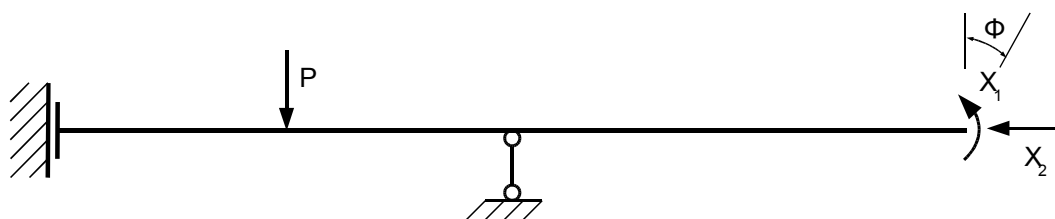
Zadanie 3

Wyznaczyć reakcje oraz wykresy momentów zginających i sił poprzecznych w belce obciążonej siłą P i doznającej obrotu w podporze C o kąt Φ (można skorzystać z zasady superpozycji skutków). Na podstawie uzyskanych wyników wykazać prawdziwość twierdzenia o wzajemności przemieszczeń i reakcji.



Rys. 15.7. Belka statycznie niewyznaczalna

Aby rozwiązać zadanie metodą sił przyjęto następujący układ podstawowy:



Rys. 15.8. Układ podstawowy

Równania kanoniczne dla belki dwukrotnie statycznie niewyznaczalnej przyjmuje postać:

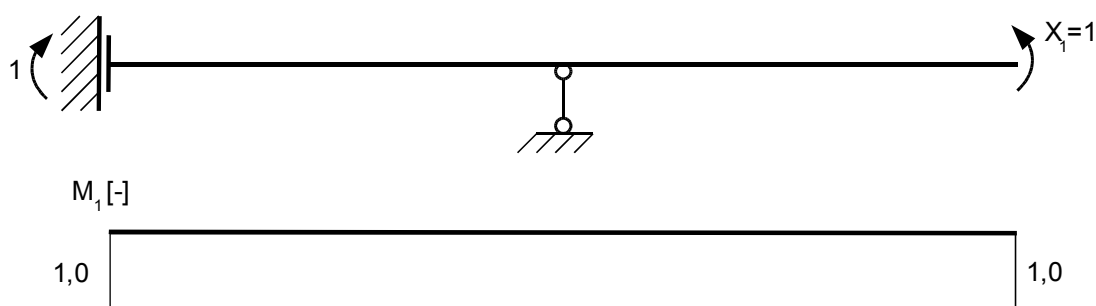
$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1S} = 0$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2S} = 0$$

gdzie $\Delta_{iS} = \Delta_{iP} + \Delta_{i\Delta}$.

Aby obliczyć współczynniki równania kanonicznego δ_{11} i Δ_{1S} tworzymy wykres momentów M_1 od stanu $X_1 = 1$. Wykres momentów M_2 od stanu $X_2 = 1$ jest na całej belce równy zero, a zatem współczynniki równania kanonicznego δ_{22} , δ_{12} , Δ_{2S} są równe zero (ponieważ nie uwzględniamy wpływu sił normalnych i tnących). Równanie drugie będzie tożsamościowo równe zero (nie można z niego wyliczyć niewiadomej X_2), zatem pominiemy je w dalszych rachunkach. Rozwiązanie tego zadania sprowadzi się do rozwiązania układu:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1S} = 0$$



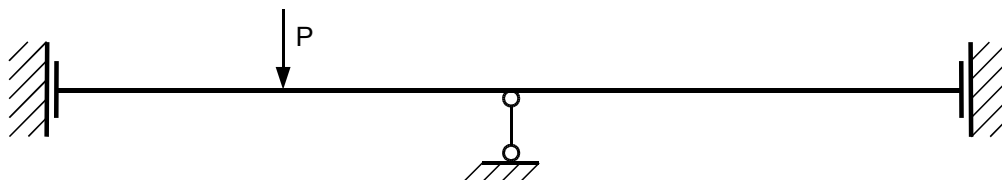
Rys. 15.9. Wykres momentu zginającego - stan $X_1 = 1$

Współczynnik δ_{11} jest równy:

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 M_1}{EJ} \cdot ds = \frac{1}{EJ} (1 \cdot 12 \cdot 1) = \frac{12}{EJ} \quad (15.4)$$

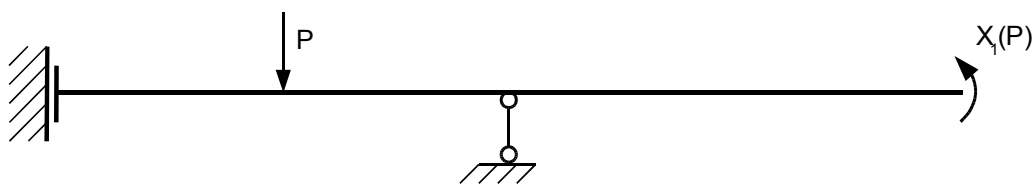
Korzystamy z zasady superpozycji skutków, dlatego najpierw rozpatrzmy układ, na który działa tylko siła P . Następnie zajmiemy się układem, który doznaje wyłącznie obrotu podpory C o kąt Φ . Pozwoli to nam wykazać prawdziwość twierdzenia o wzajemności przemieszczeń i reakcji.

W pierwszym etapie rozwiążemy zadanie przedstawione na rys. 15.10. Wyznamy reakcje i wykres momentów zginających od obciążenia P .



Rys. 15.10. Belka statycznie niewyznaczalna obciążona siłą P

W analogiczny sposób jak poprzednio (rys. 15.8) przyjmujemy układ podstawowy:



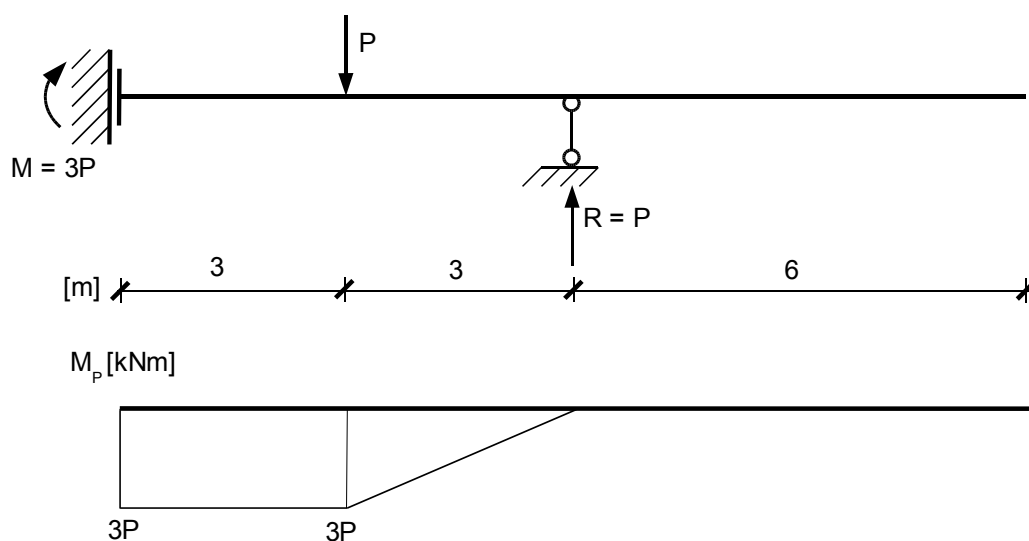
Rys. 15.11. Układ podstawowy – belka podlega tylko działaniu obciążenia w postaci siły P

Równanie kanoniczne w tym przypadku, choć identyczne w zapisie ma inny sens fizyczny niż poprzednio. Wielkości X_I i Δ_{IP} zależą tylko od obciążenia siłą P .

$$\delta_{11} \cdot X_I(P) + \Delta_{IP} = 0 \quad (15.5)$$

Współczynnik $\delta_{11} = \frac{12}{EJ}$ został obliczony wcześniej (nie zależy on od rodzaju obciążenia zewnętrznego).

Tworzymy wykres momentów M_P od obciążenia zewnętrznego, w tym przypadku od siły P :



Rys. 15.12. Wykres momentu zginającego - stan od obciążenia siłą P

Na podstawie wykresów M_I i M_P obliczamy współczynnik Δ_{IP} :

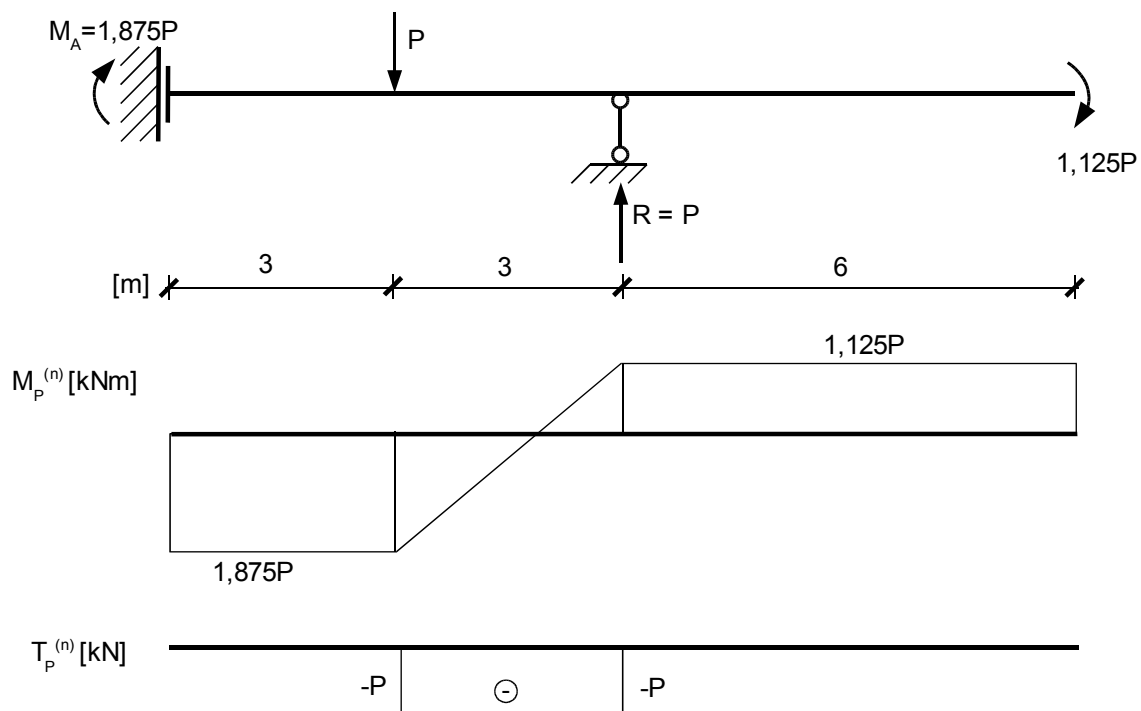
$$\Delta_{IP} = \int \frac{M_I M_P}{EJ} \cdot ds = \frac{1}{EJ} \cdot \left(3P \cdot 3 \cdot l + \frac{1}{2} \cdot 3P \cdot 3 \cdot l \right) = \frac{27}{2} \cdot \frac{P}{EJ} \quad (15.6)$$

Podstawiając obliczone powyżej przemieszczenia do równania kanonicznego otrzymujemy wartość nadliczbowej $X_I(P)$ w przyjętym układzie podstawowym:

$$\frac{12}{EJ} \cdot X_1 + \frac{27}{2} \cdot \frac{P}{EJ} = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1(P) = -1,125 P \quad (15.7)$$

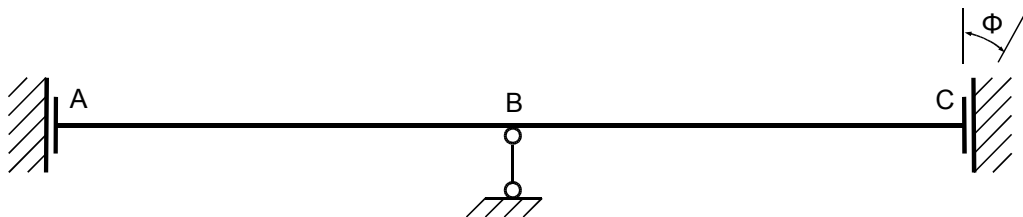
Na podstawie uzyskanych wyników rysujemy wykres momentów zginających i sił poprzecznych w układzie statycznie niewyznaczalnym:

$$\sum M_B = 0 \quad M_A - 3P + 1,125P = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = 1,875P \quad (15.8)$$



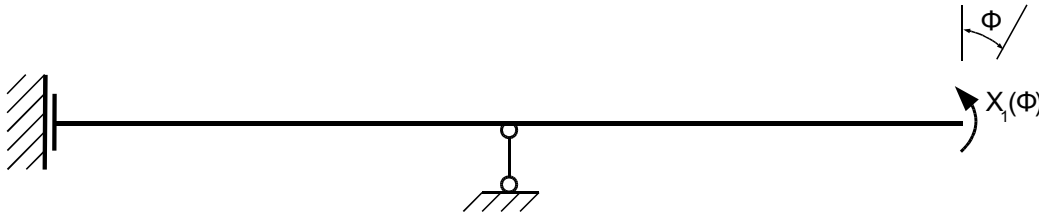
Rys. 15.13. Wykres momentu zginającego i siły poprzecznej w układzie statycznie niewyznaczalnym od obciążenia siłą P

Drugim etapem jest wyznaczenie reakcji i wykresów sił wewnętrznych od obrotu podpory C o kąt Φ (rys. 15.14).



Rys. 15.14. Belka statycznie niewyznaczalna poddana obrotowi w punkcie C

Przyjęcie tego samego układu podstawowego pozwala na wykorzystanie wcześniej obliczonego współczynnika δ_{11} .



Rys. 15.15. Układ podstawowy – podpora C ulega obrotowi o kąt Φ

Równanie kanoniczne w tym przypadku zapiszemy następująco:

$$\delta_{11} \cdot X_1(\Phi) + \Delta_{1\Phi} = 0 \quad (15.9)$$

Ze wzoru (15.4) $\delta_{11} = \frac{12}{EJ}$.

Obliczamy $\Delta_{1\Phi}$ jako pracę reakcji na rzeczywistych przemieszczeniach:

$$\Delta_{j\Phi} = -\sum R_{ij} \cdot \delta_i \quad (15.10)$$

Wykorzystując reakcje z rys. 15.9 otrzymujemy:

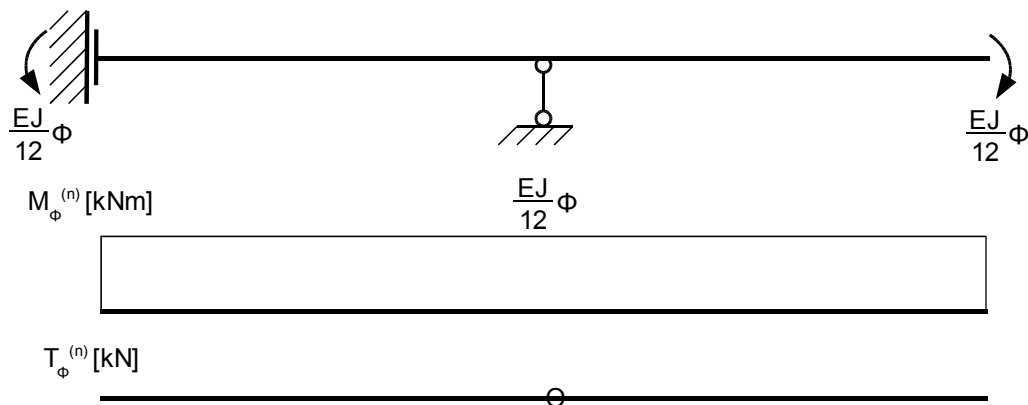
$$\Delta_{1\Phi} = -(-1 \cdot \Phi) = \Phi \quad (15.11)$$

Podstawiając wyliczone współczynniki do równania kanonicznego wyznaczamy $X_1(\Phi)$:

$$\frac{12}{EJ} \cdot X_1 + \Phi = 0 \quad (15.12)$$

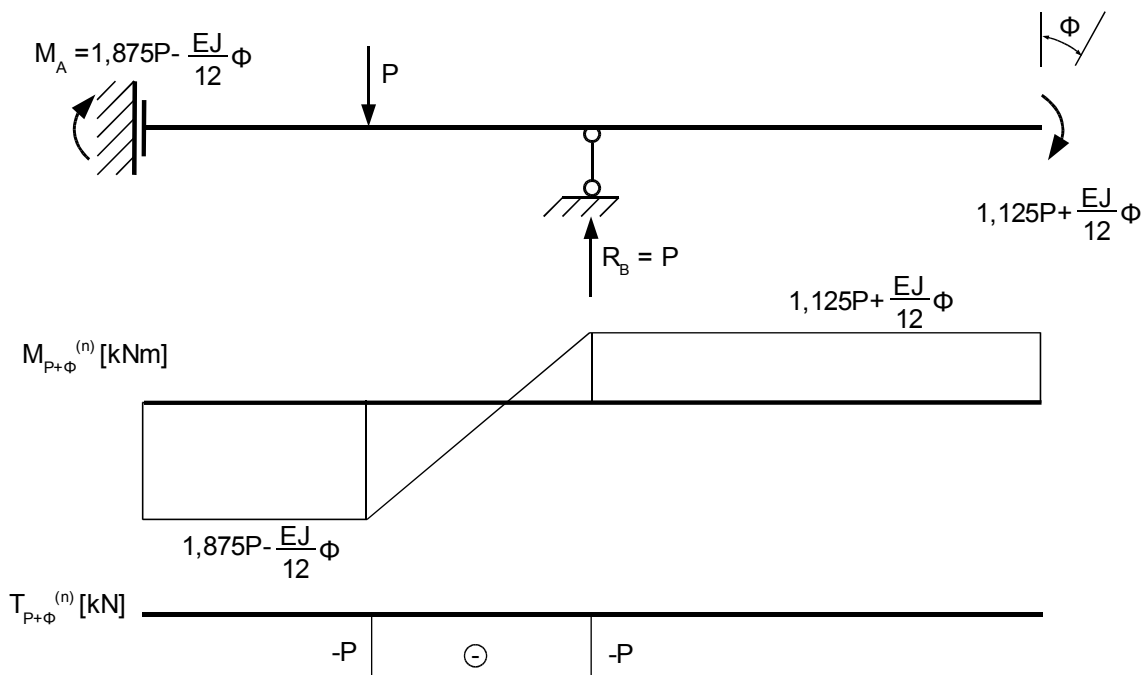
$$X_1(\Phi) = -\frac{EJ}{12} \cdot \Phi \quad (15.13)$$

Obciążając układ podstawowy tylko wyznaczoną siłą nadliczbową $X_1(\Phi)$ tworzymy wykres momentów i sił poprzecznych (od obrotu podpory C):

Rys. 15.16. Wykres momentu zginającego i sił poprzecznych od Φ

Korzystając z zasady superpozycji skutków tworzymy wykresy momentów zginających i sił poprzecznych łącząc wcześniej uzyskane funkcje (rys. 15.13 i rys. 15.16):

$$\sum M_B = 0 \quad M_A - 3P + 1,125P + \frac{EJ}{12} \cdot \Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = 1,875P - \frac{EJ}{12} \cdot \Phi \quad (15.14)$$

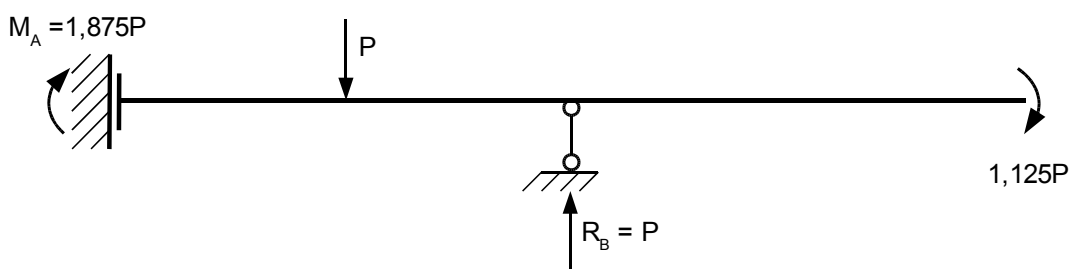
Rys. 15.17. Wykres momentu zginającego i siły poprzecznej w układzie statycznie niewyznaczalnym od obciążenia siłą P i od obrotu przekroju C

Przypomnijmy twierdzenie o wzajemności przemieszczeń i reakcji.

Jeżeli na ustrój sprężysty w punkcie i działa siła uogólniona $P_i=1$ wywołująca w podporze k reakcję r_{ki} i niezależnie od tego, jeśli uogólnionemu przemieszczeniu jednostkowemu podpory k towarzyszy pojawienie się w punkcie i – tym przemieszczenia δ_{ik} , to rzut reakcji r_{ki} na kierunek przemieszczenia podpory k jest równy rzutowi przemieszczenia δ_{ik} na kierunek uogólnionej siły (z przeciwnym znakiem).

$$r_{ki} = -\delta_{ik} \quad (15.15)$$

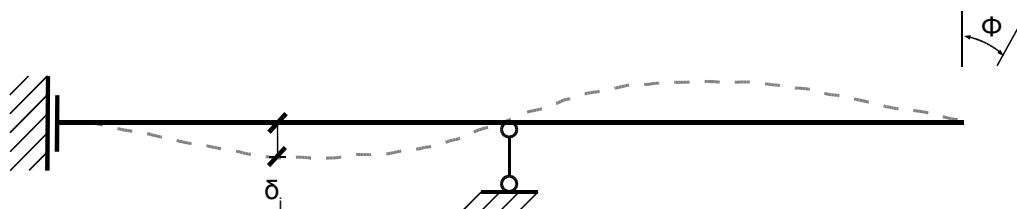
Najpierw wyznaczamy reakcje w układzie statycznie niewyznaczalnym obciążonym siłą P (rys. 15.18).



Rys. 15.18. Reakcje w układzie niewyznaczalnym od siły P

Jednostkowa siła P wywołuje w podporze C moment $M_C=1,125$.

Obliczamy przemieszczenie punktu i znajdującego się pod siłą P od jednostkowego obrotu podpory C .



Rys. 15.19. Przesunięcie punktu i od obrotu podpory C o kąt Φ

Korzystając z twierdzenia redukcyjnego mnożymy wykresy $M_{\Phi}^{(n)}$ i $\bar{M}=M_p$ (rys. 15.12 i rys. 15.16)

$$\delta_i^{\downarrow}(\Phi) = \frac{1}{EJ} \left[3 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{EJ\Phi}{12} \right) + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{EJ\Phi}{12} \right) \right] = -1,125\Phi \quad (15.16)$$

Dla $\Phi=1$ $\delta_i^{\downarrow}(\Phi) = -1,125$

Na podstawie powyższych wyników można wykazać prawdziwość twierdzenia o wzajemności reakcji i przemieszczeń:

$$M_c(P) = -\delta_i^{\downarrow}(\Phi)$$

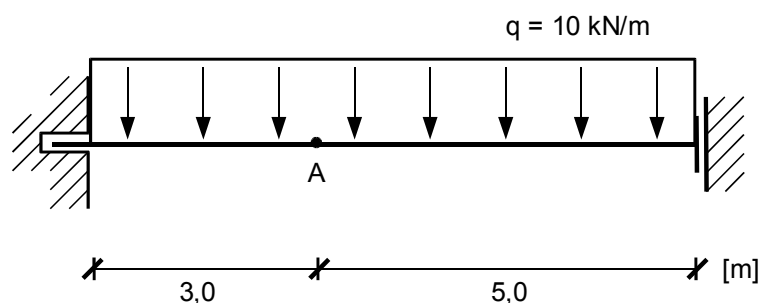
$$1,125 \cdot P = -(-1,125 \cdot \Phi) \quad (15.17)$$

Dla $\Phi=1$ i $P=1$:

$$1,125 = 1,125$$

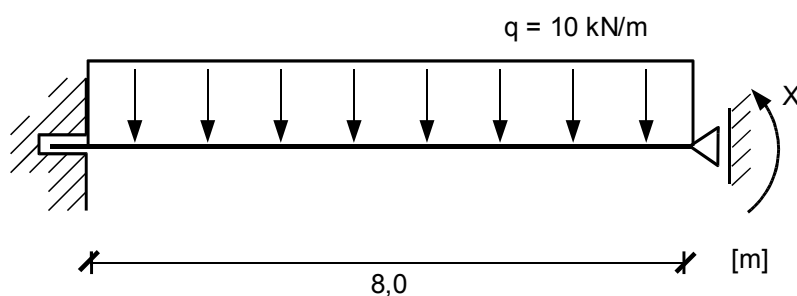
Zadanie 4

Obliczyć pionowe przemieszczenie punktu A belki przedstawionej na rys. 15.20.



Rys. 15.20. Schemat belki statycznie niewyznaczalnej

Belka jest jeden raz statycznie niewyznaczalna. Przyjmujemy następujący układ podstawowy:



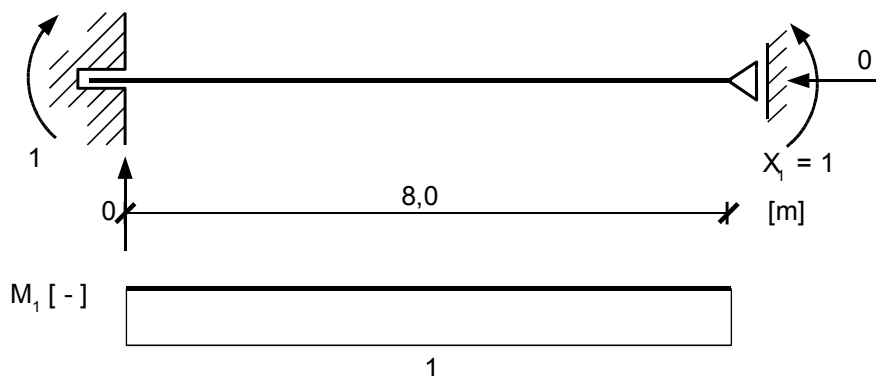
Rys. 15.21. Układ podstawowy

Równanie kanoniczne ma postać:

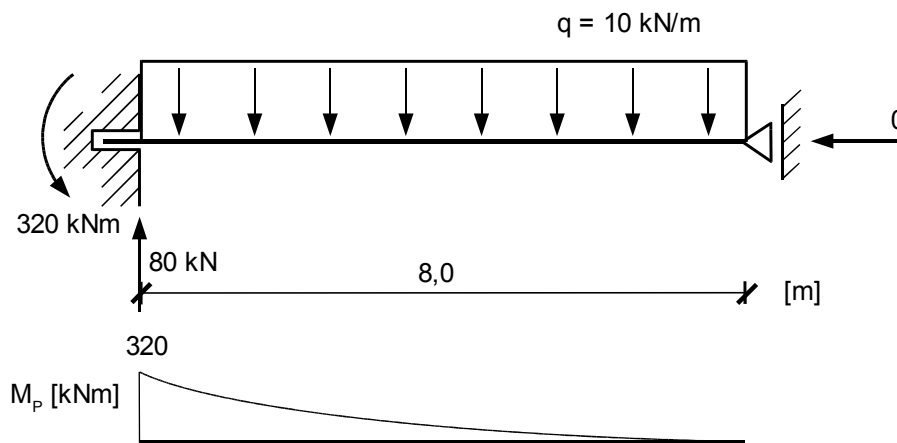
$$\delta_{11} X_1 + \delta_{1P} = 0$$

Tworzymy wykresy momentów od :

- stanu $X_1 = 1$

Rys. 15.22. Stan od siły $X_1 = 1$ oraz wykres momentów zginających

- stanu P

Rys. 15.23. Stan od siły P oraz wykres momentów zginających

Korzystając ze wzoru:

$$\delta_{ik} = \int_S \frac{M_i M_k}{EJ} ds$$

Otrzymujemy:

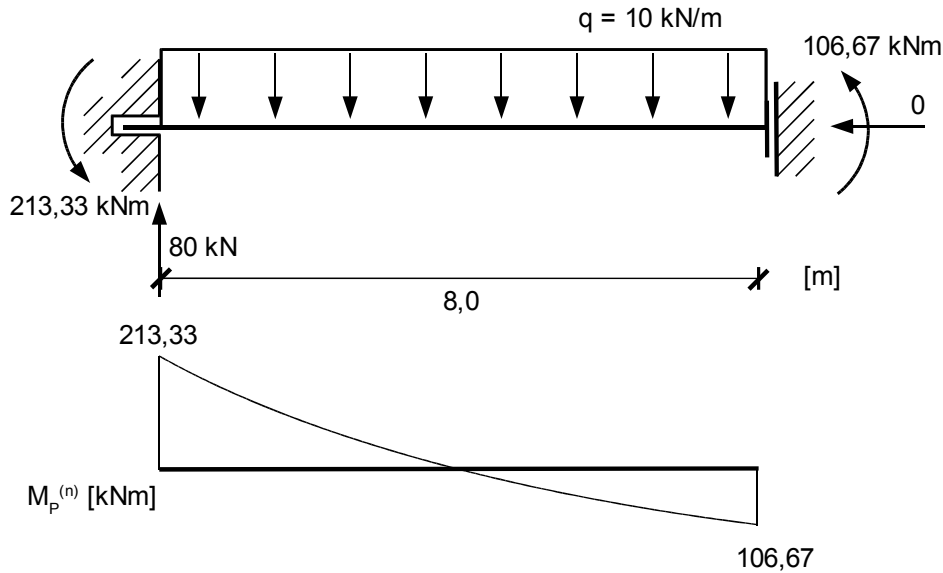
$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} (1 \cdot 8 \cdot 1) = \frac{8}{EJ}$$

$$\delta_{1P} = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{1}{2} \cdot 320 \cdot 8 \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 8^2}{8} \cdot 8 \cdot 1 \right) = -\frac{853,33}{EJ}$$

Podstawiając powyższe wyniki do równania kanonicznego możemy obliczyć X_1

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{\frac{853,33}{EJ}}{\frac{8}{EJ}} = 106,67 \text{ [kNm]}$$

Znając już wartość X_1 możemy narysować wykres momentów w stanie niewyznaczalnym:

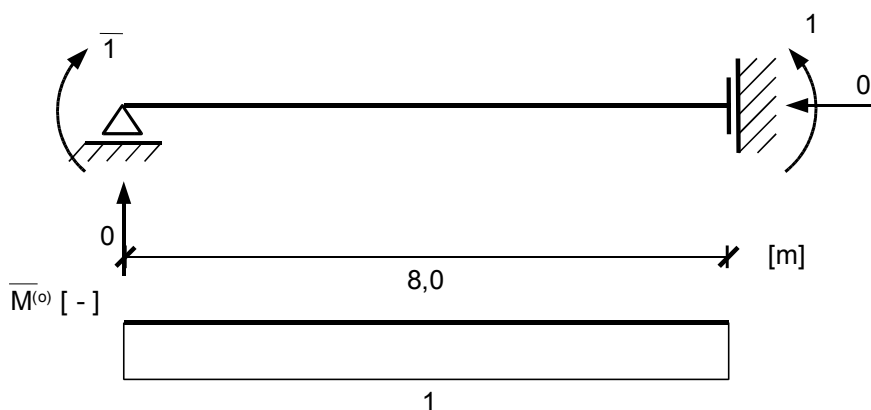


Rys. 15.24. Schemat belki i wykres momentów w stanie niewyznaczalnym

Do sprawdzenia kinematycznego posłużymy się wzorem

$$\bar{I} \cdot \delta_j = \int_s \frac{M_p^{(n)} \cdot \bar{M}^{(0)}}{EJ} \cdot ds \quad (15.18)$$

Przyjmujemy nowy układ podstawowy obciążony siłą wirtualną (rys. 15.25) i dla niego tworzymy wykres momentów $\bar{M}^{(0)}$

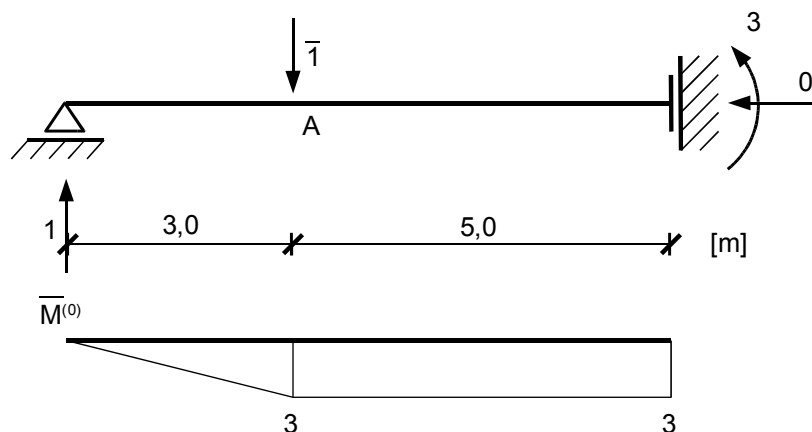


Rys. 15.25. Nowy układ podstawowy i wykres momentów

$$\bar{I} \cdot \varphi = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 213,33 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 106,67 \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 8^2}{8} \cdot 8 \cdot 1 \right) = 0$$

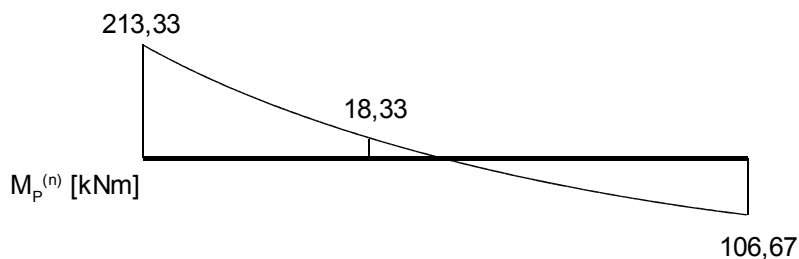
Okazało się, że rzeczywiście uzyskaliśmy zero to oznacza, że wykres $M_p^{(n)}$ jest poprawny.

Aby obliczyć przemieszczenie w punkcie A posłużymy się twierdzeniem redukcyjnym (15.18). Przykładamy w tym punkcie pionowo siłę wirtualną i wyznaczamy dla niej wykres momentów (rys. 15.26), w układzie statycznie wyznaczalnym.



Rys. 15.26. Belka obciążona pionową siłą $\bar{1}$ oraz wykres momentów od tej siły

Dla ułatwienia przypominamy wykres $M_p^{(n)}$



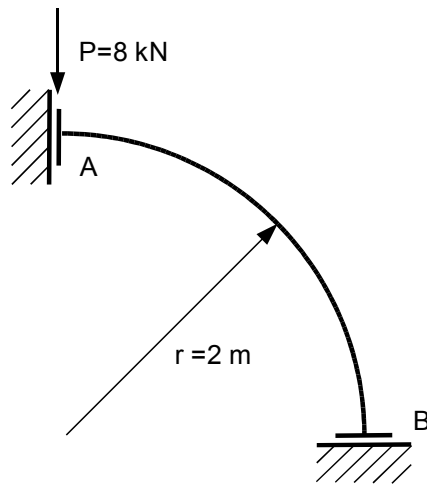
Rys. 15.27. Wykres momentów $M_p^{(n)}$

Szukane przemieszczenie ma wartość:

$$\begin{aligned} \bar{1} \cdot v_A = \frac{I}{EJ} \left[-\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \left(\frac{1}{3} \cdot 213,33 + \frac{2}{3} \cdot 18,33 \right) \right] + \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 3^2}{8} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 18,33 \cdot 5 \cdot 3 + \\ + \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 106,67 \cdot 5 \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 5^2}{8} \cdot 5 \cdot 3 \right] = \frac{633,75}{EJ} \text{ [kNm]} \end{aligned}$$

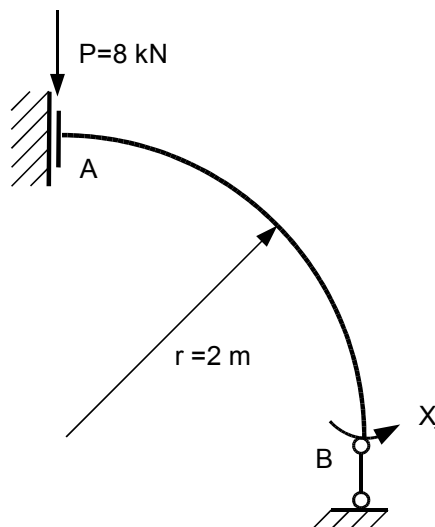
Zadanie 5

Dla łuku w kształcie ćwiartki okręgu ($EJ = \text{const}$) wyznaczyć przemieszczenie pionowe podpory A wywołane działaniem siły P (rys. 15.28).



Rys. 15.28. Łuk kołowy statycznie niewyznaczalny

Układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny, zatem przyjmujemy układ podstawowy zwalniając jeden więz (rys. 15.29).

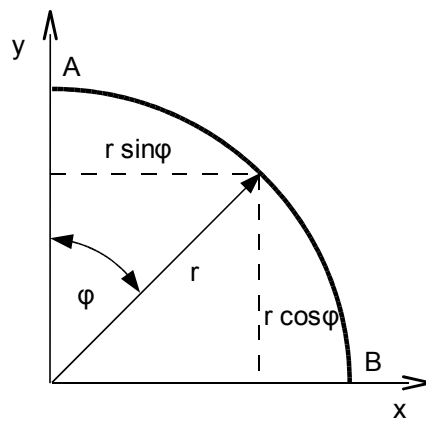


Rys. 15.29. Układ podstawowy

Układ podstawowy będzie zgodny z rzeczywistym, jeśli obrót podpory B będzie zerowy. Warunek ten wyraża równanie kanoniczne:

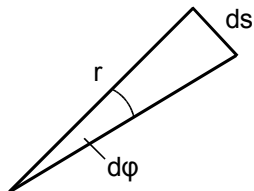
$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0 \quad (15.19)$$

Obliczenia przeprowadzimy dla współrzędnych biegunowych:



Rys. 15.30. Związki pomiędzy współrzędnymi biegunowymi i kartezjańskimi

Przy tak przyjętym układzie obowiązują zależności:



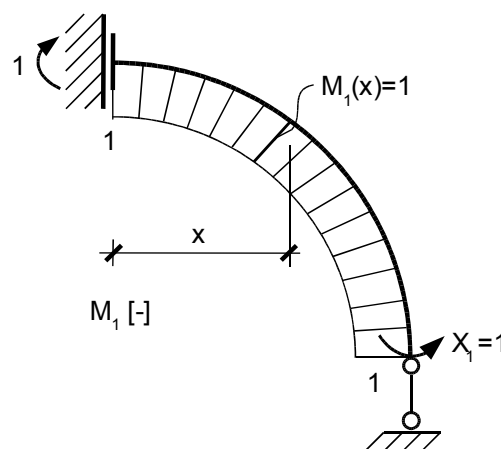
$$\frac{ds}{r} = \operatorname{tg} d\varphi \Rightarrow ds = r \cdot \operatorname{tg} d\varphi$$

dla małych kątów

$$ds = r \cdot d\varphi \quad (15.20)$$

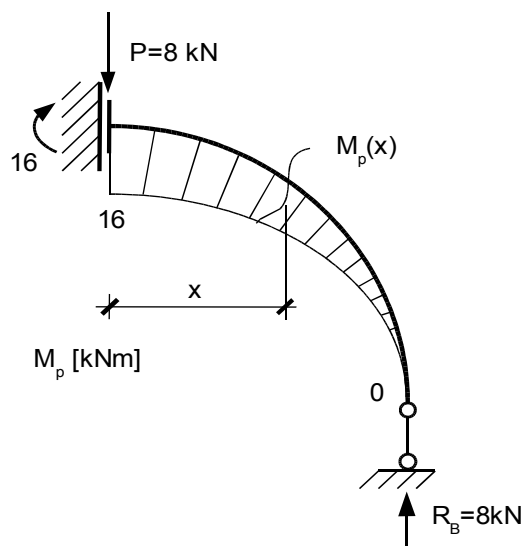
$$x = r \cdot \sin \varphi \quad (15.21)$$

Tworzymy wykres momentów M_I w układzie podstawowym od stanu $X_I=I$:



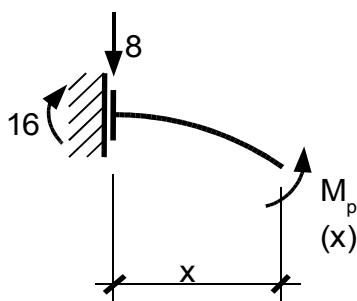
Rys. 15.31. Wykres momentu zginającego w układzie podstawowym - stan $X_I=I$

Następnie tworzymy wykres M_P w układzie podstawowym od obciążenia zewnętrznego:



Rys. 15.32. Wykres momentu zginającego w układzie podstawowym – stan od obciążenia zewnętrznego

Równanie momentu $M_P(x)$ w przekroju o współrzędnej x :



$$M_p(x) = 16 - 8x$$

a po podstawieniu współrzędnych biegunowych

$$M_p(x) = 16 - 8r \sin \varphi \quad (15.22)$$

Obliczamy współczynniki równania kanonicznego:

$$\delta_{11} = \int_s \frac{M_1 M_1}{EJ} \cdot ds = \frac{1}{EJ} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r d\varphi = \frac{r}{EJ} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{EJ} \quad (15.23)$$

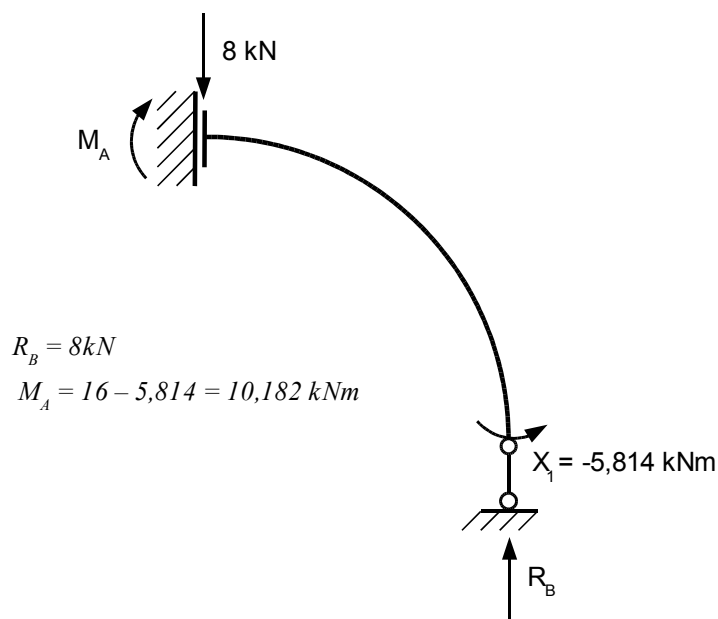
$$\Delta_{1P} = \int_s \frac{M_1 M_P}{EJ} \cdot ds = \frac{1}{EJ} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (16 - 8r \sin\varphi) \cdot l r d\varphi = \frac{1}{EJ} \cdot \left(16 \cdot r \cdot \frac{\pi}{2} - 8 r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \right) = \frac{1}{EJ} (16\pi - 32) \quad (15.24)$$

Podstawiając otrzymane wartości do równania (15.19) otrzymujemy:

$$\frac{\pi}{EJ} \cdot X_1 + \frac{16\pi - 32}{EJ} = 0 \quad (15.25)$$

$$X_1 = \frac{32}{\pi} - 16 \approx -5,814 \quad (15.26)$$

Na podstawie uzyskanych wyników wyznaczamy wykres momentów zginających w układzie statycznie niewyznaczalnym $M_P^{(n)}$:



Rys. 15.33. Układ podstawowy – rzeczywiste reakcje podporowe

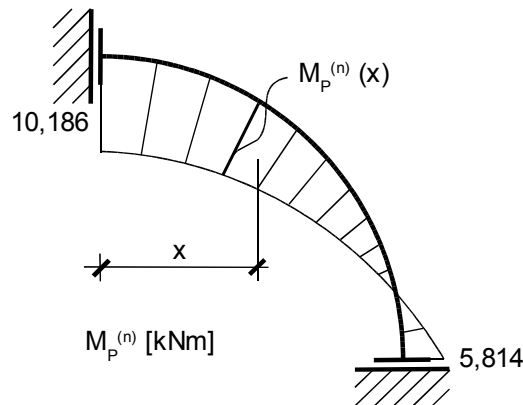
Moment rzeczywisty w układzie statycznie niewyznaczalnym opisuje zależność:

$$M_p^{(n)} = M_p(x) + X_1 \cdot M_1(x)$$

$$M_p^{(n)} = 16 - 8 \cdot x + \left(\frac{32}{\pi} - 16 \right) \cdot I$$

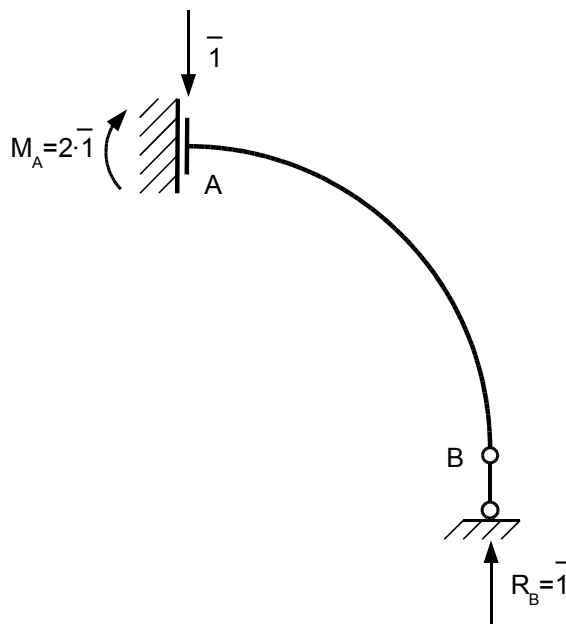
$$M_p^{(n)} = \frac{32}{\pi} - 8x \tag{15.27}$$

$$M_p^{(n)} = \frac{32}{\pi} - 8r \sin \varphi$$



Rys. 15.34. Wykres momentu zginającego w układzie statycznie niewyznaczalnym

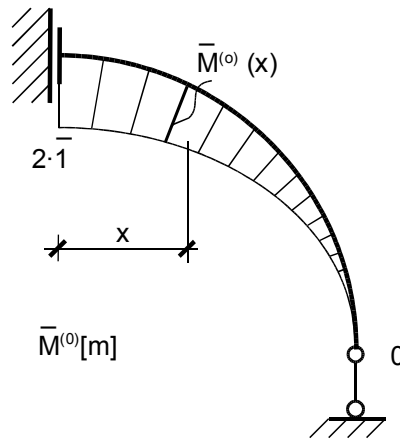
Aby wyznaczyć przemieszczenie podpory A przykładamy w tym punkcie (w układzie podstawowym) pionową siłę wirtualną i wyznaczamy dla niej wykres momentów (rys. 15.35):



Rys. 15.35. Układ podstawowy obciążony siłą wirtualną - reakcje

Zależność opisująca moment zginający w układzie podstawowym od jednostkowej siły wirtualnej przyłożonej w punkcie A ma postać:

$$\begin{aligned}\bar{M}^{(o)}(x) &= 2 - x \\ \bar{M}^{(o)}(\varphi) &= 2 - r \sin \varphi\end{aligned}\quad (15.28)$$



Rys. 15.36. Wykres momentu zginającego w układzie podstawowym – stan od obciążenia wirtualnego

Przemieszczenie pionowe punktu A obliczamy po podstawieniu (15.27) i (15.28) do wzoru:

$$\bar{I} \delta_A^\downarrow = \int_s \frac{M_P^{(n)} \bar{M}^{(o)}}{EJ} \cdot ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_P^{(n)}(\varphi) \bar{M}^{(o)}(\varphi)}{EJ} \cdot r d\varphi \quad (15.29)$$

$$\delta_A^\downarrow = \frac{1}{EJ} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{32}{\pi} - 8r \sin \varphi \right) \cdot (2 - r \sin \varphi) r d\varphi \quad (15.30)$$

całkę z wyrażenia (15.30)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{32}{\pi} - 8r \sin \varphi \right) \cdot (2 - r \sin \varphi) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{64}{\pi} - \frac{32}{\pi} \cdot r \sin \varphi - 16r \sin \varphi + 8r^2 \sin^2 \varphi \right) d\varphi \quad (15.31)$$

obliczymy wykonując następujące podstawienia

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi = \left| -\cos \varphi \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = -(0 - 1) = 1 \quad (15.32)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi = \left| \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \quad (15.33)$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\delta_A^\perp = \frac{2}{EJ} \left(\frac{64}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{32}{\pi} \cdot 2 \cdot 1 - 16 \cdot 2 \cdot 1 + 8 \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{128}{\pi} + 16\pi \right) \quad (15.34)$$

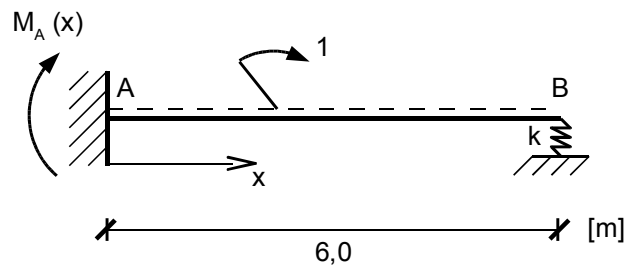
$$\delta_A^\perp = \frac{9,522}{EJ} \quad [kNm^3]$$

Dla przykładu w łuku wykonanym z I100 ($J_x = 171 \text{ cm}^4$, $E = 205 \text{ GPa}$) przemieszczenie pionowe podpory A wynosi:

$$\delta_A^\perp = \frac{9,522}{350,55} = 0,0272 \quad [m]$$

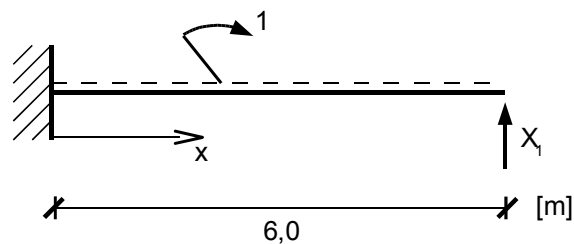
Zadanie 6

Wyznaczyć linię wpływu reakcji podporowej $M_A(x)$ dla belki z (rys. 15.37), dla której $EJ - \text{const.}$, oraz $k = \frac{1}{2} EJ$.



Rys. 15.37. Schemat zadanej belki

Belka jest jeden raz statycznie niewyznaczalna. Przyjmujemy następujący układ podstawowy



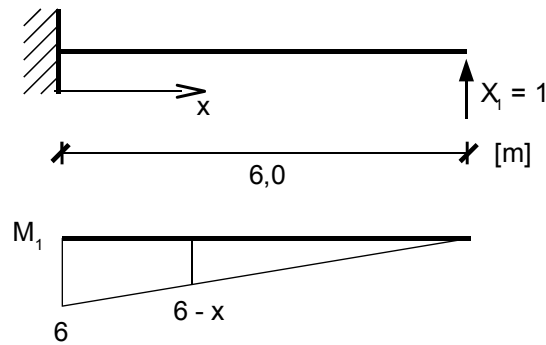
Rys. 15.38. Układ podstawowy

Równanie kanoniczne ma postać:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{1P} = 0$$

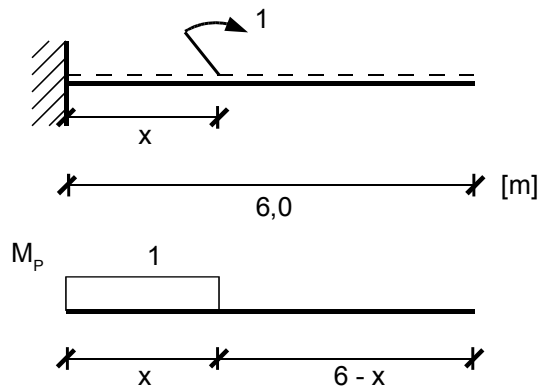
Tworzymy wykresy momentów dla:

- stanu $X_1 = 1$



Rys. 15.39. Stan od siły $X_1 = 1$ oraz wykres momentów

- stanu P (pamiętając, że obciążenie w postaci momentu porusza się po belce (w zależności od x))



Rys. 15.40. Stan od siły P oraz wykres momentów

Korzystając ze wzoru

$$\delta_{ik} = \sum_j \int_S \frac{M_i M_k}{EJ} ds + \sum \frac{R_i \cdot R_k}{k} \quad (15.35)$$

Otrzymujemy:

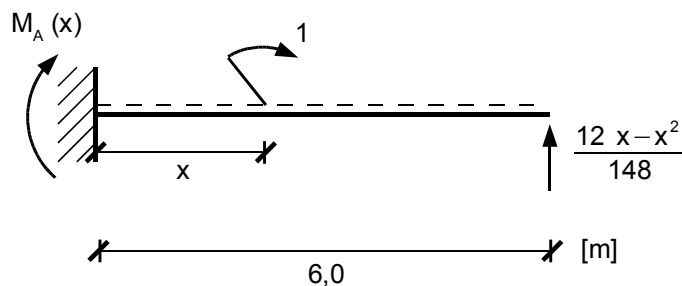
$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \right) + \frac{1 \cdot 1}{\frac{1}{2} EJ} = \frac{74}{EJ}$$

$$\delta_{1P} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{6+6-x}{2} \cdot x \cdot (-1) \right) = -\frac{x(12-x)}{2 EJ} = -\frac{1}{EJ} \left(6x - \frac{x^2}{2} \right)$$

Podstawiając powyższe wyniki do równania kanonicznego możemy obliczyć X_1

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{\left(6x - \frac{x^2}{2} \right)}{EJ} \cdot \frac{EJ}{74} = \frac{12x - x^2}{148}$$

Znając już wartość X_1 możemy napisać równanie linii wpływu momentu M_A dla belki w stanie niewyznaczalnym obciążając znanymi siłami układ podstawowy (rys. 15.41).



Rys. 15.41. Schemat belki w stanie niewyznaczalnym

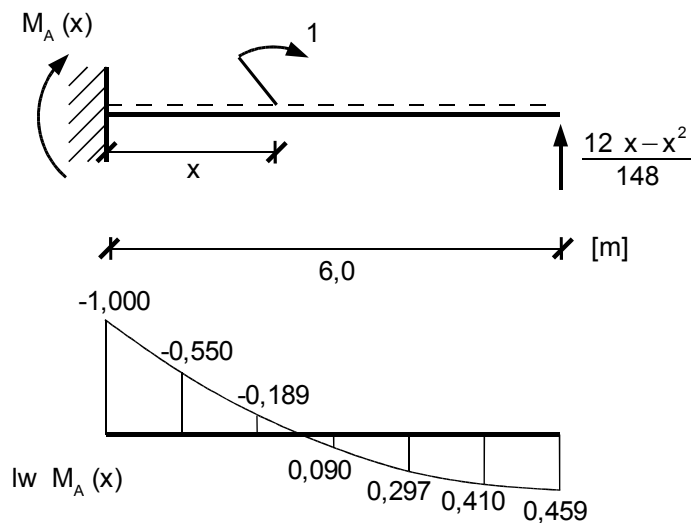
Równanie przyjmie postać :

$$M_A(x) = -6 \cdot \frac{x^2 - 12x}{148} - 1 = -\frac{3(x^2 - 12x)}{74} - 1 \quad (15.36)$$

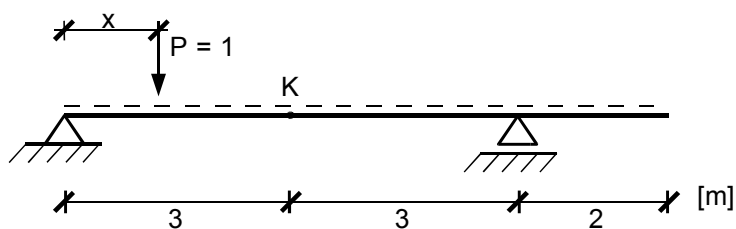
Do narysowania wykresu potrzebne będą nam wartości M_A dla poszczególnych położen obciążenia. Podstawiając wartości x do równania (15.36) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} x=0 &\rightarrow M_A = -1 \\ x=2 &\rightarrow M_A = -0,189 \\ x=4 &\rightarrow M_A = 0,297 \\ x=6 &\rightarrow M_A = 0,459 \end{aligned}$$

Wykres linii wpływu $M_A(x)$ wygląda następująco:

Rys. 15.42. Wykres linii wpływu $M_A(x)$ **Zadanie 7**

Obliczyć linię wpływową ugięcia belki w punkcie K.

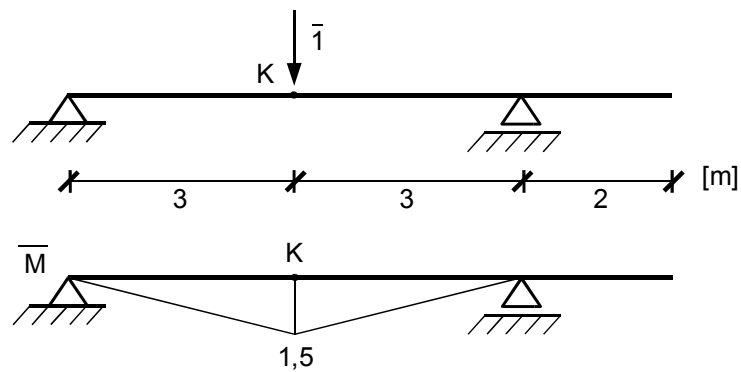


Rys. 15.43. Belka statycznie niewyznaczalna

Belkę dzielimy na trzy przedziały dlatego, że kształt wykresu momentu rzeczywistego zależy od położenia siły $P=1$ (rys. 15.45, rys. 15.46, rys. 15.47)

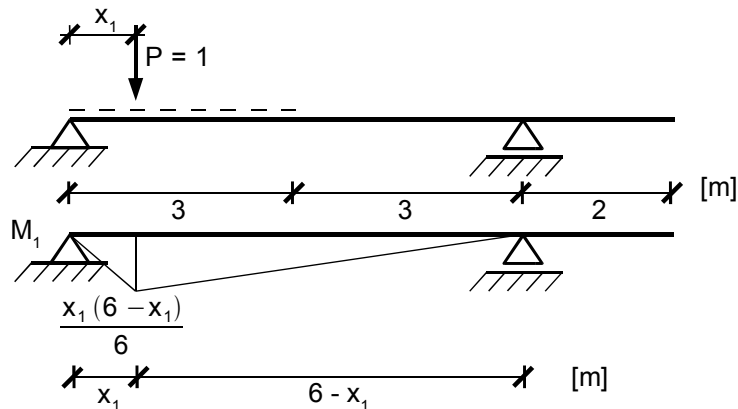
Natomiast moment wirtualny od siły jedynekowej jest niezmienny.

Wykres momentu od siły wirtualnej przyłożonej w miejscu szukanego przemieszczenia jest funkcją liniową.

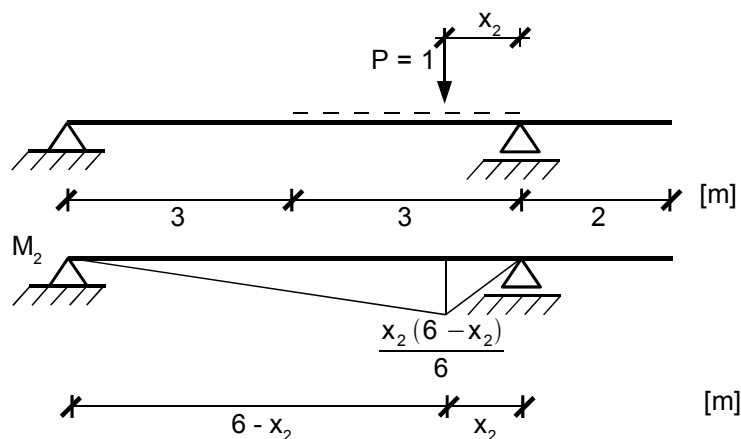
Rys. 15.44. Wykres momentu od siły wirtualnej przyłożonej w punkcie K

Wykresy momentów od siły P przyłożonej w poszczególnych przedziałach przedstawiają poniższe rysunki:

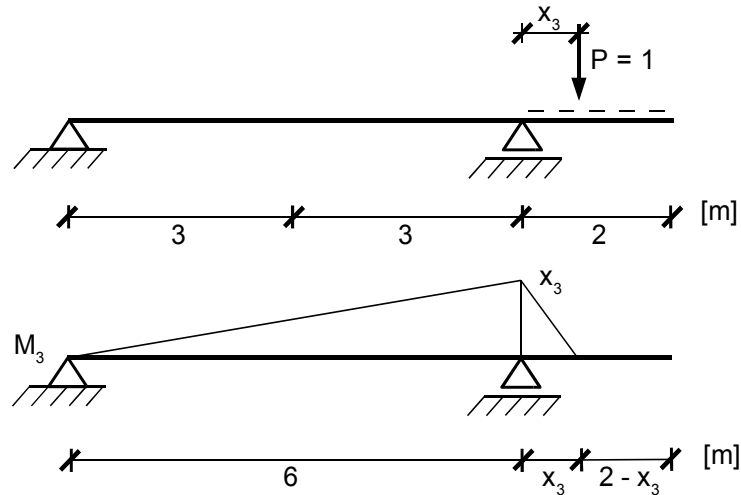
- dla $x_1 \in \langle 0, 3 \rangle$

Rys. 15.45. Wykres momentów od siły P przyłożonej w przedziale $x_1 \in \langle 0, 3 \rangle$

- dla $x_1 \in \langle 3, 6 \rangle$ $x_2 \in \langle 0, 3 \rangle$

Rys. 15.46. Wykres momentów od siły P przyłożonej w przedziale $x_2 \in \langle 0, 3 \rangle$

- dla $x_3 \in \langle 0, 2 \rangle$



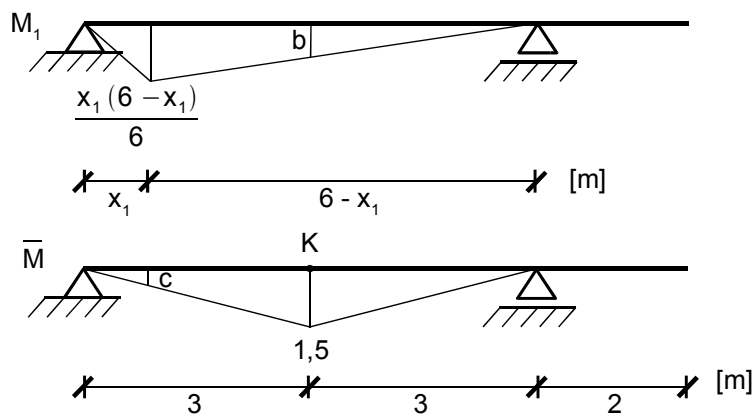
Rys. 15.47. Wykres momentów od siły P przyłożonej w przedziale $x_3 \in \langle 0, 2 \rangle$

Ugięcie belki w poszczególnych przedziałach obliczać będziemy na podstawie wzoru:

$$v_k(x_i) = \sum_j \int \frac{\bar{M} \cdot M_j}{EJ} dx \quad (15.37)$$

Funkcja przemieszczenia będzie różna dla kolejnych przedziałów:

- dla $x_1 \in \langle 0, 3 \rangle$



Rys. 15.48. Zestawienie wykresów M_1 oraz \bar{M}

Obliczenie wartości b oraz c

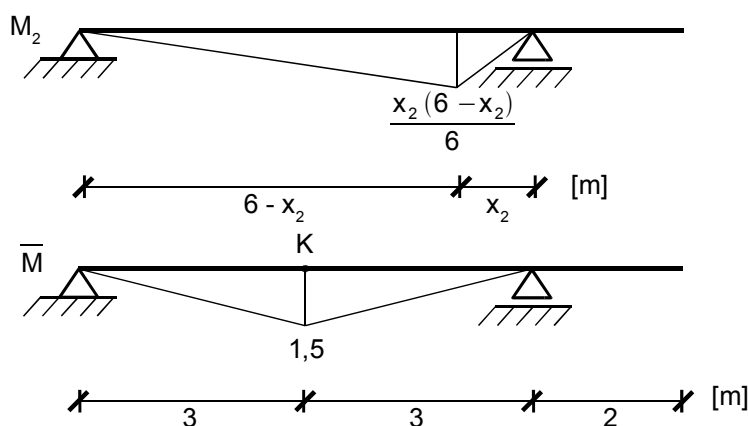
$$\frac{b}{\frac{x_1(6-x_1)}{6}} = \frac{3}{6-x_1} \Rightarrow b = \frac{x_1}{2}$$

$$\frac{c}{\frac{3}{2}} = \frac{x_1}{3} \Rightarrow c = \frac{x_1}{2}$$

Przy wykorzystaniu wzoru (15.37) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} EJ \cdot v_k(x_1) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x_1}{2} \cdot x_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{x_1 \cdot (6-x_1)}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x_1}{2} \cdot (3-x_1) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{x_1 \cdot (6-x_1)}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x_1}{2} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} \right) \cdot (3-x_1) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{x_1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x_1 \cdot (6-x_1)}{6} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{x_1}{2} = \\ &= \frac{x_1 \cdot (6-x_1)}{36} + \frac{x_1(3-x_1)}{4} \cdot \left(\frac{x_1 \cdot (6-x_1)}{9} + \frac{x_1}{6} \right) + \frac{3(3-x_1)}{4} \cdot \left(\frac{x_1}{3} + \frac{x_1(6-x_1)}{18} \right) + 3 \frac{x_1}{3} = \\ &= \frac{x_1^3(6-x_1)}{36} + \frac{x_1^2(3-x_1)(6-x_1)}{36} + \frac{x_1^2(3-x_1)}{24} + \frac{3x_1(3-x_1)(6-x_1)}{4 \cdot 18} + \frac{3x_1}{4} = \\ &= \frac{6x_1^3 - x_1^4 + x_1^2(18 - 9x_1 + x_1^2)}{36} + \frac{x_1^2(3-x_1) + x_1(18 - 9x_1 + x_1^2)}{24} + \frac{x_1(3-x_1) + 3x_1}{4} = \\ &= \frac{6x_1^3 - x_1^4 + 18x_1^2 - 9x_1^3 + x_1^4}{36} + \frac{3x_1^2 - x_1^3 + 18x_1 - 9x_1^2 + x_1^3}{24} + \frac{3x_1 - x_1^2 + 3x_1}{4} = \\ &= \frac{18x_1^2 - 3x_1^3}{36} + \frac{18x_1 - 6x_1^2}{24} + \frac{6x_1 - x_1^2}{4} = \frac{3(6x_1^2 - x_1^3)}{36} + \frac{2(9x_1 - 3x_1^2)}{24} + \frac{6x_1 - x_1^2}{4} = \\ &= \frac{6x_1^2 - x_1^3 + 9x_1 - x_1^2 + 18x_1 - 3x_1^2}{12} = \frac{27x_1 - x_1^3}{12} = \frac{x_1(27-x_1^2)}{12} \end{aligned}$$

- dla $x_2 \in \langle 0, 3 \rangle$

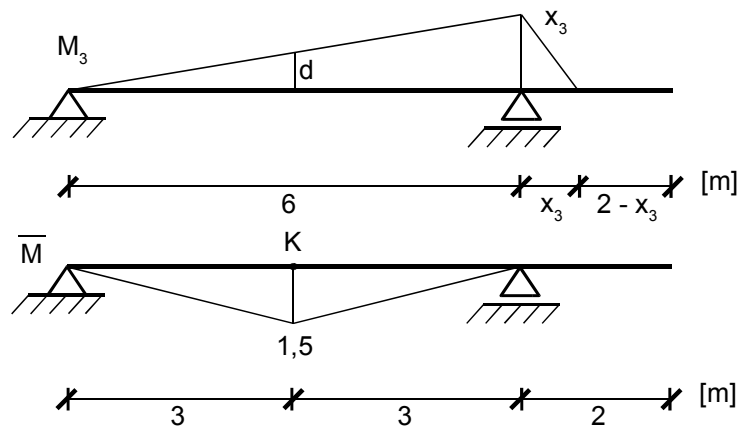


Rys. 15.49. Zestawienie wykresów M_2 oraz \bar{M}

Wykresy momentów, a co za tym idzie rozwiązania dla części pierwszej i drugiej są symetryczne (rys. 15.48 i rys. 15.49). Wykorzystując wzór wyprowadzony dla części pierwszej podstawiamy w miejsce x_1 wartość $(6 - x_1)$

$$\begin{aligned}
 EJ \cdot v_k(x_2) &= \frac{(6-x_1)[27-(6-x_1)^2]}{12} = \frac{(6-x_1)[27-(36-12x_1+x_1^2)]}{12} = \\
 &= \frac{(6-x_1)(-9+12x_1-x_1^2)}{12} = \frac{-54+72x_1-6x_1^2+9x_1-12x_1^2+x_1^3}{12} = \\
 &= \frac{x_1^3-18x_1^2+81x_1-54}{12}
 \end{aligned}$$

- dla $x_3 \in \langle 0, 2 \rangle$



Rys. 15.50. Zestawienie wykresów M_3 oraz \bar{M}

Obliczenie wartości d :

$$\frac{d}{x_3} = \frac{3}{6} \Rightarrow d = \frac{x_3}{2}$$

Przy wykorzystaniu wzoru (15.37) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 EJ \cdot v_k(x_3) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{x_3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{x_3}{2} + \frac{1}{3} \cdot x_3 \right) = \\
 &= -\frac{3x_3}{4} - \frac{9}{4} \left(\frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_3 \right) = -\frac{3x_3}{4} - \frac{6x_3}{4} = -9 \frac{x_3}{4}
 \end{aligned}$$

Zestawienie wyników:

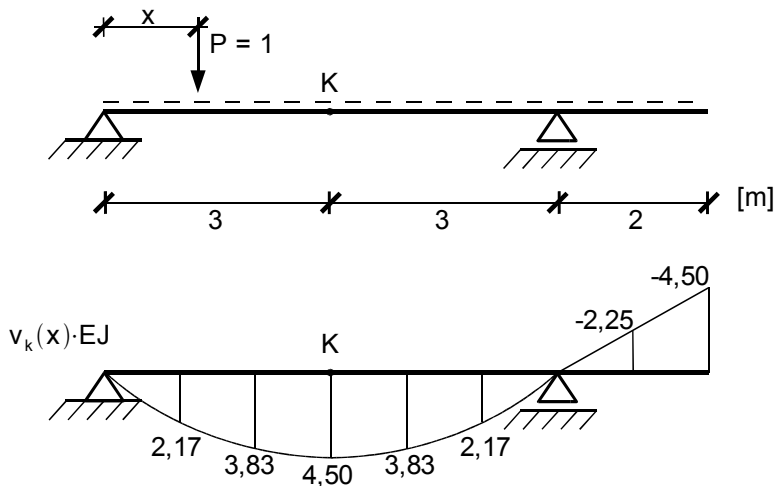
dla $x_1 \in \langle 0, 3 \rangle$ $EJ \cdot v_k(x_1) = \frac{x_1(27-x_1^2)}{12}$

dla $x_1 \in \langle 3, 6 \rangle$ $EJ \cdot v_k(x_1) = \frac{x_1^3 - 18x_1^2 + 81x_1 - 54}{12}$

dla $x_3 \in \langle 0, 2 \rangle$ $EJ \cdot v_k(x_3) = -9 \frac{x_3}{4}$

Otrzymane funkcje są prawdziwe tylko w obrębie przedziału, którego dotyczą. Funkcje w poszczególnych przedziałach nie są identyczne (dwie pierwsze to funkcje trzeciego stopnia, trzecia jest funkcją liniową).

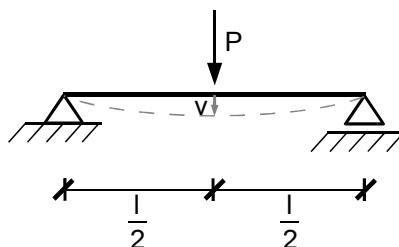
Linie wpływową ugięcia belki w punkcie K wygląda jak na poniższym rysunku:



Rys. 15.51. Linia wpływowa ugięcia belki w punkcie K

- Sprawdzenie wartości ugięcia dla $x=3$

Wartość normowa (znana z tablic) dla układu jak na rys. 15.52:



Rys. 15.52. Schemat belki wolnopodpartej obciążonej siłą P w środku rozpiętości

wynosi:

$$v = \frac{Pl^3}{48 EJ}$$

Dla naszego przypadku ($P=1$, $l=6$):

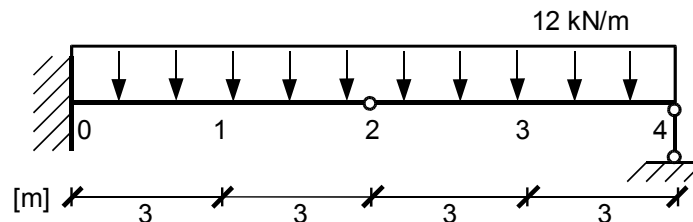
$$v_K \cdot EJ = \frac{Pl^3}{48} = \frac{1 \cdot 6^3}{48} = 4,5$$

co pokrywa się z wartością przez nas otrzymaną.

$$EJ v_K(x=3) = \frac{3(27 - 3^2)}{12} = 4,5$$

Zadanie 8

- a) Wyznaczyć wartości ciężarów sprężystych dla punktów 0 i 2 belki przy podziale na cztery elementy ($EJ=const.$) (rys. 15.53).
 b) Podać schemat belki zastępczej spełniającej warunki brzegowe zadanego układu.



Rys. 15.53. Zadana belka

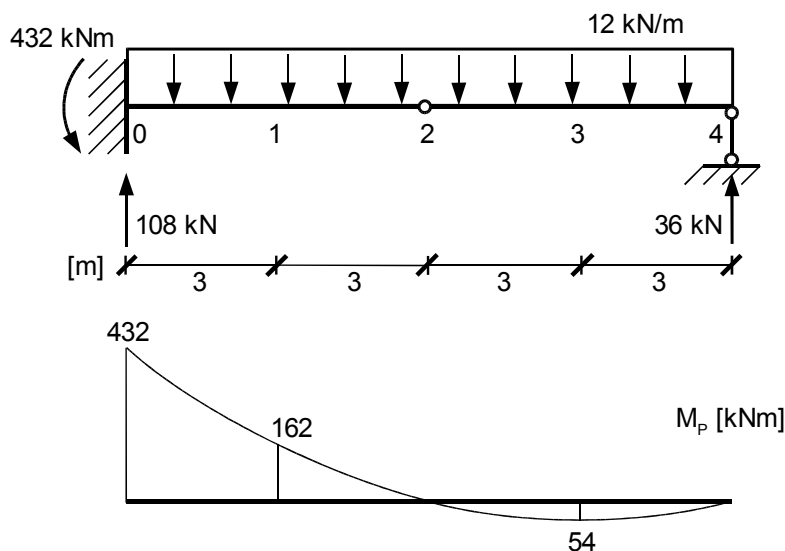
ad a) Obliczenie wartości ciężarów sprężystych

Wartości ciężarów sprężystych określa się na podstawie wzoru:

$$w_i = \int \frac{M_p \bar{M}_i}{EJ} dx \quad (15.38)$$

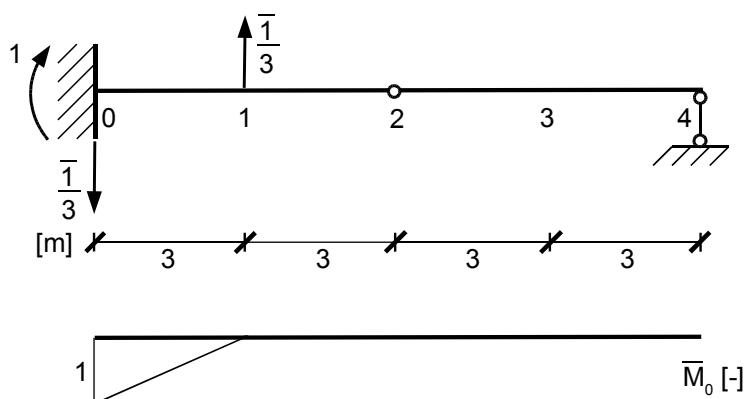
Do wyznaczenia ciężarów sprężystych potrzebne będą nam wykresy momentów od zadanego obciążenia oraz od sił wirtualnych. Obciążenie wirtualne dla danego punktu musi być przyłożone w postaci par sił zastępujących jednostkowe momenty.

Najpierw tworzymy wykres od obciążenia zewnętrznego (rys. 15.54).

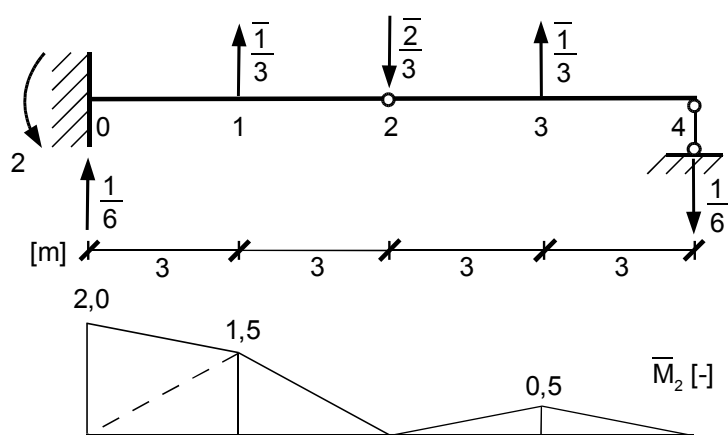


Rys. 15.54. Wykres momentów od zadanego obciążenia

Następnie wykres momentów od obciążenia wirtualnego dla poszczególnych punktów (rys. 15.55, rys. 15.56).



Rys. 15.55. Wykres momentów od obciążenia wirtualnego dla punktu 0



Rys. 15.56. Wykres momentów od obciążenia wirtualnego dla punktu 2

Należy zauważyć, że obciążenie wirtualne w postaci samorównoważących się momentów daje przeważnie wykres w okolicy rozpatrywanego punktu. Jednak dla punktu 2 uzyskaliśmy wykres na całej długości belki.

Podstawiając wartości z powyższych wykresów do wzoru (15.38), otrzymujemy:

$$w_0 = \int \frac{M_p \bar{M}_0}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 432 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 162 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{12 \cdot 3^2}{8} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right]$$

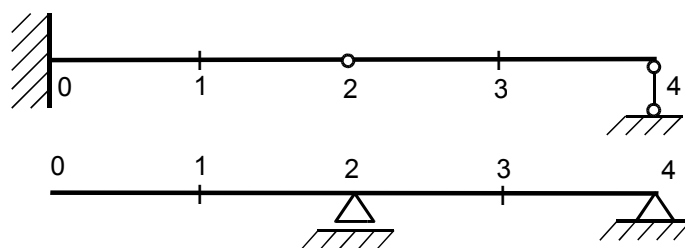
$$w_0 = \frac{-499,5}{EJ}$$

$$w_2 = \int \frac{M_p \bar{M}_2}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 432 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{12 \cdot 3^2}{8} \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 162 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \right) \right] +$$

$$+ \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 162 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{12 \cdot 3^2}{8} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 54 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot 2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{12 \cdot 3^2}{8} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot 2 \right]$$

$$w_2 = \frac{1701}{EJ}$$

ad b) Schemat zastępczy dla belki z rys. 15.53 wygląda następująco:

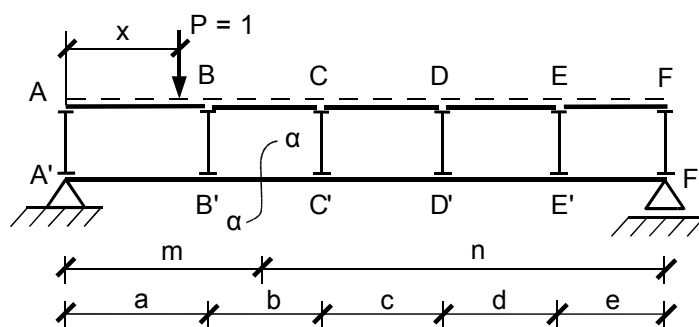


Rys. 15.57. Schemat belki zastępczej

Zadanie 9

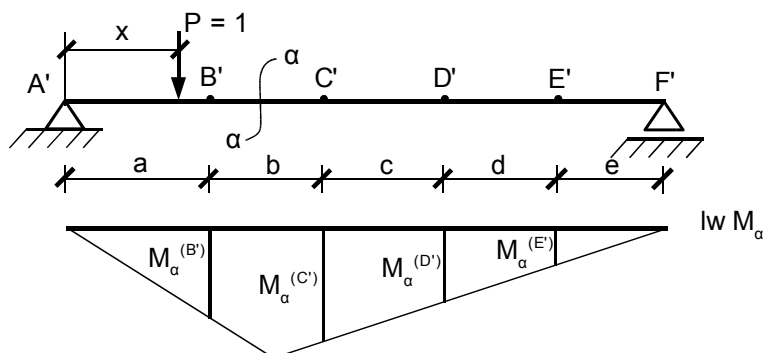
Udowodnić, że w przypadku pośredniego obciążenia, funkcje linii wpływu wywołane działaniem ruchomej siły skupionej są odcinkami liniowe.

Rozpatrzmy belkę wolnopodpartą obciążoną w sposób pośredni. Na belce głównej spoczywa pomost złożony z jednoprzęsłowych belek, ułożonych na podporach, przekazujących obciążenie od poruszającej się siły $P=1$ na belkę dolną.

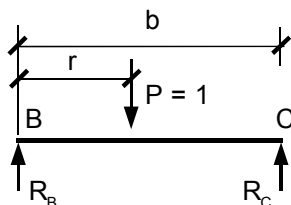


Rys. 15.58. Schemat belki obciążonej pośrednio

Zauważmy, że gdy dowolna siła będzie przyłożona w punktach A, B, C, D, E lub F to cała wartość obciążenia zostanie przekazana bezpośrednio na belkę główną. Dla takich położen siły rzędne linii wpływu dowolnej wielkości statycznej będą takie same jak w przypadku obciążenia bezpośredniego belki $A'F'$. Na rys. 15.59 dla przykładu pokazano linię wpływu momentu zginającego w przekroju α od siły jedynkowej poruszającej się po belce $A'F'$. Rzędne wykresu w punktach A', B', C', D', E' i F' są identyczne w przypadku obciążenia bezpośredniego z wartościami otrzymanymi dla obciążenia pośredniego.

Rys. 15.59. Linia wpływu momentu w przekroju α od poruszającej się siły jedynkowej

Gdy siła $P = 1$ znajdzie się w obrębie pojedynczego przęsła, np. przęsła BC to obciążenie od siły P będzie przekazane na belkę główną przez podpory BB' i CC' – belka główna będzie obciążona tylko reakcjami R_B, R_C . Wartości tych reakcji zależne będą od położenia siły P na danym przęśle, czyli od odciętej r .

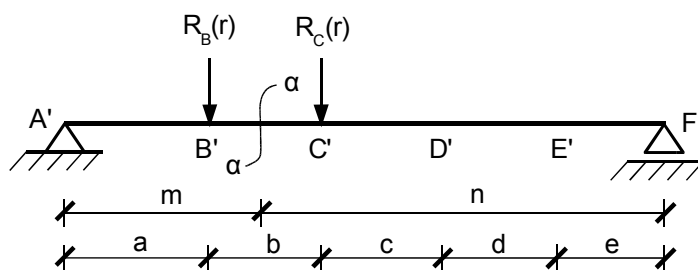


Rys. 15.60. Siła P działająca w obrębie przęsła BC

Wartości sił reakcji w podporach przęsła BC wywołanych poruszającą się siłą P po przęśle BC i jednocześnie wartości sił działających na belkę główną $A'F'$ zapiszemy w następujący sposób:

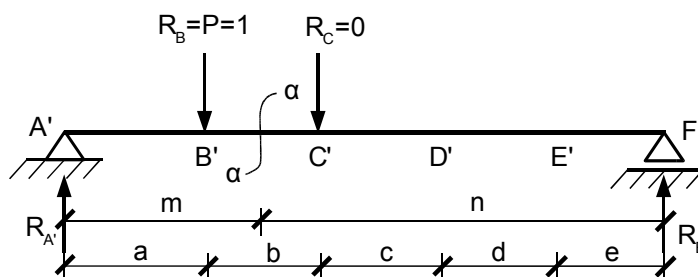
$$R_B = 1 - \frac{r}{b} \quad R_C = \frac{r}{b} \quad (15.39)$$

Pozostałe przęsła pomostu nie są obciążone i nie będą przekazywać żadnych sił na belkę główną (czyli gdy siła znajduje się na przęśle BC reakcje $R_A = R_D = R_E = R_F = 0$). W związku z powyższym można przyjąć schemat z rys 15.61.



Rys. 15.61. Siła P zatrzymana myślowo na jednym z przęseł

Wyznamy teraz linię wpływu momentu zginającego w przekroju $\alpha - \alpha$ odległego o m od podpory A' i o n od podpory F' przy założeniu, że siła $P = 1$ stoi dokładnie w punkcie B ($r = 0$).



Rys. 15.62. Siła P przyłożona dokładnie w punkcie B

Zgodnie z równaniem statyki:

$$\sum M_{(\alpha-\alpha)} = 0 \quad (15.40)$$

$$\sum M_{(\alpha-\alpha)} = R_{A'}m - R_B(m-a) - M_\alpha \quad (15.40)$$

czyli:

$$M_\alpha = R_{A'}m - R_B(m-a) \quad (15.41)$$

wartość reakcji $R_{A'}$ (gdy siła $P = 1$ stoi w punkcie B) wyliczamy z sumy momentów wszystkich sił działających na belkę $A'F'$ względem punktu F' .

$$\sum M_{F'} = R_{A'}(m+n) - R_B(b+c+d+e) \quad (15.42)$$

Belka pozostanie w stanie równowagi gdy:

$$\sum M_{F'} = 0 \quad (15.43)$$

czyli:

$$R_{A'} = \frac{R_B(b+c+d+e)}{(m+n)} \quad (15.44)$$

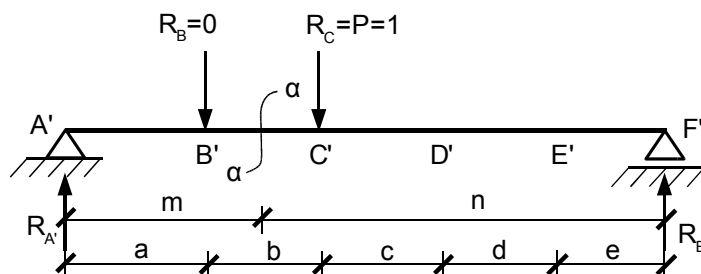
Podstawiając do równania (15.41) otrzymujemy wartość momentu w przekroju $\alpha - \alpha$ dla przypadku, gdy siła P przyłożona jest w punkcie B .

$$M_\alpha = \frac{R_B(b+c+d+e)}{(m+n)}m - R_B(m-a) \quad (15.45)$$

Ponieważ założyliśmy, że $P = 1$ to dla sytuacji $R_B = P = 1$, czyli:

$$M_\alpha^{(B)} = \frac{(b+c+d+e)}{(m+n)}m - (m-a) \quad (15.46)$$

Rozpatrzmy teraz sytuację gdy siła $P = 1$ stanie w punkcie C ($r = b$)



Rys. 15.63. Siła P przyłożona dokładnie w punkcie C

Obliczając moment względem przekroju $\alpha-\alpha$ otrzymujemy:

$$M_{\alpha}^{(C)} = R_{A'} m \quad (15.47)$$

Przy czym reakcja $R_{A'}$ gdy siła P stoi w punkcie C wynosi:

$$R_{A'} = \frac{(c+d+e)}{(m+n)} R_C \quad (15.48)$$

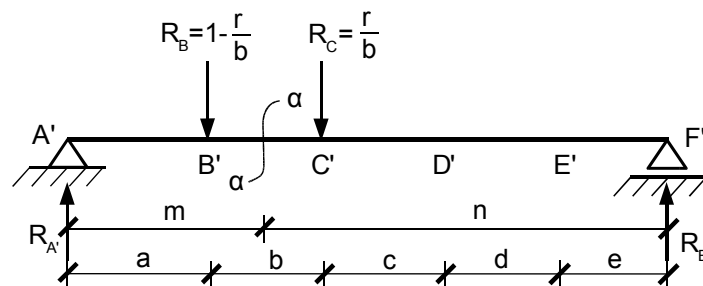
Podstawiając (15.48) do wzoru (15.47) otrzymujemy równanie ogólne:

$$M_{\alpha}^{(C)} = \frac{(c+d+e)}{(m+n)} m R_C$$

a dla rozważanego przypadku dla $P = I$ mamy $R_C = P = I$ i dalej:

$$M_{\alpha}^{(C)} = \frac{(c+d+e)}{(m+n)} m \quad (15.49)$$

Obliczmy teraz M_{α} dla dowolnego położenia siły P na przęśle BC .



Rys. 15.64. Siła P położona w dowolnym punkcie przęsła BC

Korzystamy z równania (15.41):

$$M_{\alpha} = R_{A'} m - R_B (m - a) \quad (15.50)$$

Aby obliczyć $R_{A'}$ układamy sumę momentów wszystkich sił względem punktu F' .

Po przekształceniu otrzymujemy:
$$R_{A'} = \frac{R_B (b+c+d+e) + R_C (c+d+e)}{(m+n)}$$

Podstawiamy do równania (15.50):

$$M_{\alpha} = \frac{R_B (b+c+d+e)}{(m+n)} m + \frac{R_C (c+d+e)}{(m+n)} m - R_B (m-a) \quad (15.51)$$

a po uszeregowaniu i wyłączeniu R_B z pierwszego i ostatniego wyrazu równania otrzymujemy

$$M_{\alpha} = R_B \left[\frac{(b+c+d+e)}{(m+n)} m - (m-a) \right] + R_C \left[\frac{(c+d+e)}{(m+n)} m \right]$$

Zauważmy, że wyrażenia w nawiasach kwadratowych to odpowiednio wartość momentu w przekroju α - α dla położenia siły P w punkcie B (15.46) oraz wartość momentu dla położenia siły $P = I$ w punkcie C (15.49),

czyli:

$$M_{(\alpha)} = R_B M_{(\alpha)}^{(B)} + R_C M_{(\alpha)}^{(C)}$$

Podstawmy zgodnie z równaniem (15.39)

$$M_{(\alpha)} = \left(1 - \frac{r}{b}\right) M_{(\alpha)}^{(B)} + \frac{r}{b} M_{(\alpha)}^{(C)}$$

po wymnożeniu:

$$M_{(\alpha)} = M_{(\alpha)}^{(B)} - \frac{r}{b} M_{(\alpha)}^{(B)} + \frac{r}{b} M_{(\alpha)}^{(C)}$$

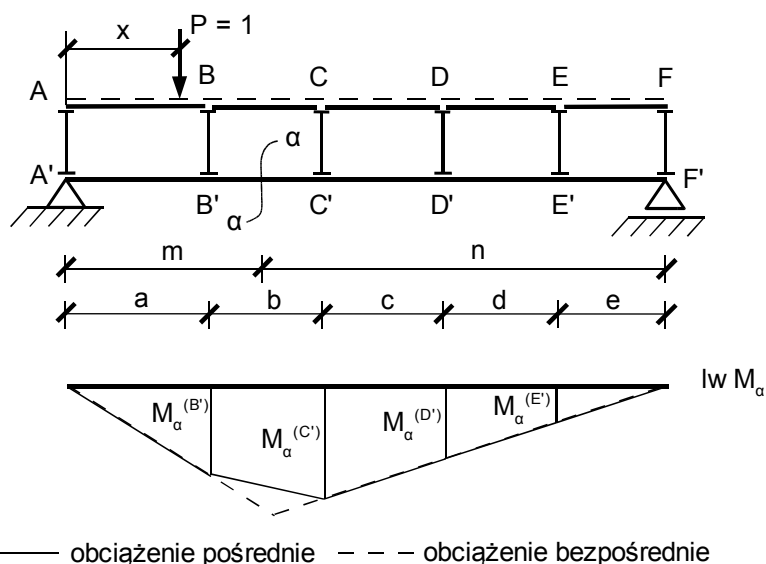
i po wyłączeniu r przed nawias:

$$M_{(\alpha)} = r \left(\frac{M_{(\alpha)}^{(C)}}{b} - \frac{M_{(\alpha)}^{(B)}}{b} \right) + M_{(\alpha)}^{(B)}$$

Zauważmy, że $\frac{M_{(\alpha)}^{(C)}}{b}$, $\frac{M_{(\alpha)}^{(B)}}{b}$, $M_{(\alpha)}^{(B)}$ to konkretne liczby, a r jest zmienną. Otrzymaliśmy więc równanie linii prostej, stąd można przyjąć, że linia wpływowa momentu w przekroju $\alpha - \alpha$ przy obciążeniu pośrednim jest linią prostą.

Wniosek:

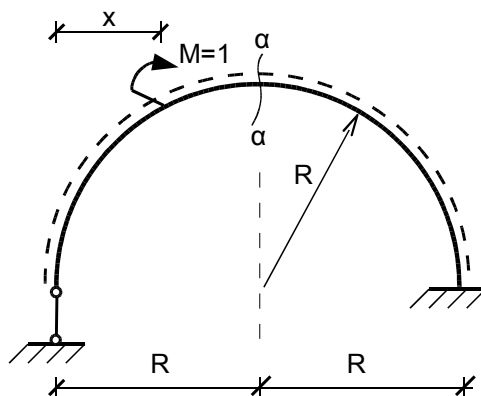
W celu uzyskania linii wpływowej dowolnej wielkości statycznej przy obciążeniu pośrednim, wystarczy sporządzić linię wpływową danej wielkości jak dla belki głównej (obciążenia przekazywanego bezpośrednio), znaleźć wartości wielkości statycznej w węzłach (czyli w miejscach oparcia podpór belek pomostu) i połączyć otrzymane punkty odcinkami linii prostych. Metoda ta jest pokazana na rys. 15.65.



Rys. 15.65. Przebieg linii wpływu momentu zginającego w przekroju $\alpha - \alpha$ dla obciążenia pośredniego

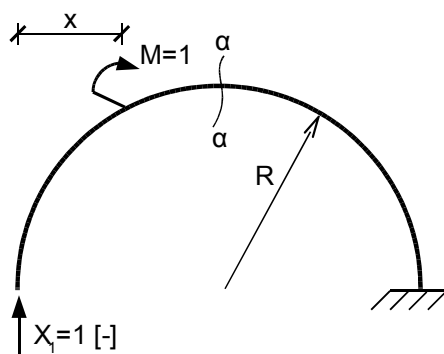
Zadanie 10

Dla łuku w kształcie półokręgu ($EJ = const$), obciążonego poruszającym się jednostkowym momentem skupionym, obliczyć i narysować linię wpływu momentu zginającego w przekroju $\alpha - \alpha$ (rys. 15.66).



Rys. 15.66. Łuk w kształcie półokręgu statycznie niewyznaczalny

Łuk jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny, zatem przyjmujemy układ podstawowy zwalniając jeden więz (rys. 15.67).



Rys. 15.67. Układ podstawowy

Układ podstawowy uzupełnia równanie kanoniczne:

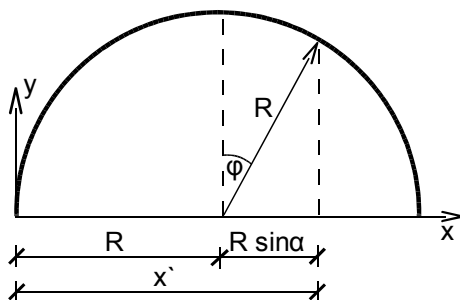
$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0 \quad (15.52)$$

z którego można wyznaczyć wartość nadliczbowej siły:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}$$

Obliczenia przeprowadzimy dla współrzędnych biegunowych. W celu ułatwienia obliczeń funkcję momentu zginającego na długości łuku uzależnimy od zmiennej x' , którą wyrazimy przez zmienną biegunową, kąt φ (rys. 15.68). Podczas całkowania x , które określa położenie momentu skupionego $M = 1$,

będzie traktowane jako wartość stała, a zmienną całkowania będzie x' .



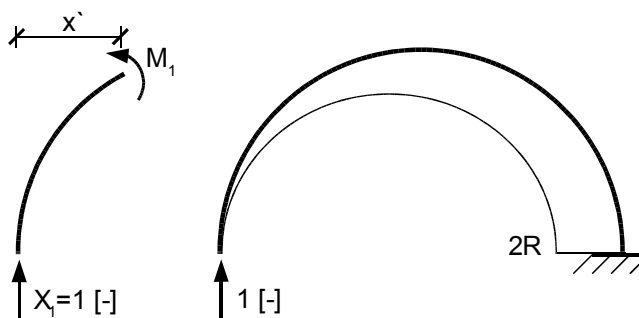
Rys. 15.68. Związki pomiędzy współrzędnymi biegunowymi i kartezjańskimi

$$\varphi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$x' = R + R \sin \varphi = R(1 + \sin \varphi)$$

$$ds = R d\varphi$$

Aby obliczyć współczynniki równania kanonicznego δ_{11} i Δ_{1P} tworzymy wykres momentów od stanu $X_1=1$ (rys. 15.69).



Rys. 15.69. Wykres momentu zginającego - stan $X_1=1$

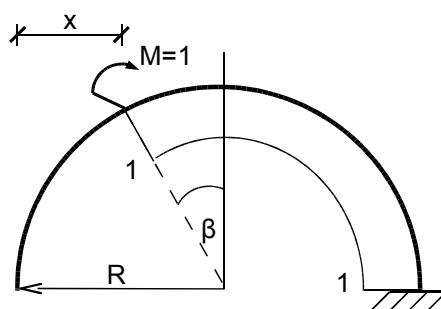
oraz określamy postać funkcji momentu zginającego:

$$M_1(x') = 1 \cdot x' = R(1 + \sin \varphi)$$

W przekroju α - α wartość momentu zginającego w stanie $X_1=1$ równa jest promieniowi okręgu.

$$M_\alpha^{X_1=1} = M_1(x'=R) = R$$

Dalej tworzymy wykres momentów od obciążenia zewnętrznego, w tym przypadku od ruchomego momentu skupionego $M=1$ (rys. 15.70) oraz określamy postać funkcji momentu $M_P(x')$.



Rys. 15.70. Wykres momentu zginającego – stan “P” (od obciążenia ruchomym momentem jednostkowym)

Funkcja momentu przyjmuje różną postać w zależności od badanego przedziału:

- dla $x' \in (0, x)$, $\varphi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \beta \right\rangle$

$$M_p = 0$$

- dla $x' \in (x, 2R)$, $\varphi \in \left\langle \beta, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

$$M_p(x') = 1$$

Znając postacie wszystkich funkcji w poszczególnych przedziałach możemy obliczyć składniki równania kanonicznego:

$$\begin{aligned} \delta_{II} &= \int_s \frac{M_I M_I}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 (1 + \sin \varphi)^2 R d\varphi = \frac{R^3}{EJ} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi \right] = \\ &= \frac{R^3}{EJ} \left[\pi - 2 \cos \varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \cos \varphi \sin \varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \right] = \frac{R^3}{EJ} \left[\pi + \frac{1}{2} \pi \right] = \frac{3}{2} \pi \frac{R^3}{EJ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{IP} &= \int_s \frac{M_I M_P}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\beta} R (1 + \sin \varphi) \cdot 0 R d\varphi + \frac{1}{EJ} \int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} R (1 + \sin \varphi) \cdot 1 R d\varphi = \\ &= \frac{R^2}{EJ} \left[\int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + \int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \right] = \frac{R^2}{EJ} \left[\frac{\pi}{2} - \beta - \cos \varphi \Big|_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} \right] = \frac{R^2}{EJ} \left[\frac{\pi}{2} - \beta + \cos \beta \right] \end{aligned}$$

Korzystając ze wzoru (15.52) wyznaczamy wartość nadliczbowej siły X_1 . Ponieważ przemieszczenia δ_{II} i Δ_{IP} są funkcjami zmiennej x (β we współrzędnych biegunowych), to również siła X_1 jest funkcją zależną od położenia jednostkowego momentu. Czyli linią wpływu jest funkcja:

$$Lw X_1 = - \frac{\left[\frac{\pi}{2} - \beta + \cos \beta \right]}{\frac{3}{2} \pi R}$$

Zgodnie z zasadą superpozycji wartość momentu w układzie niewyznaczalnym wynosi:

$$Lw M_{\alpha}^{(n)} = Lw M_{\alpha}^0 + Lw X_I \cdot M_{\alpha}^{X_I=1}$$

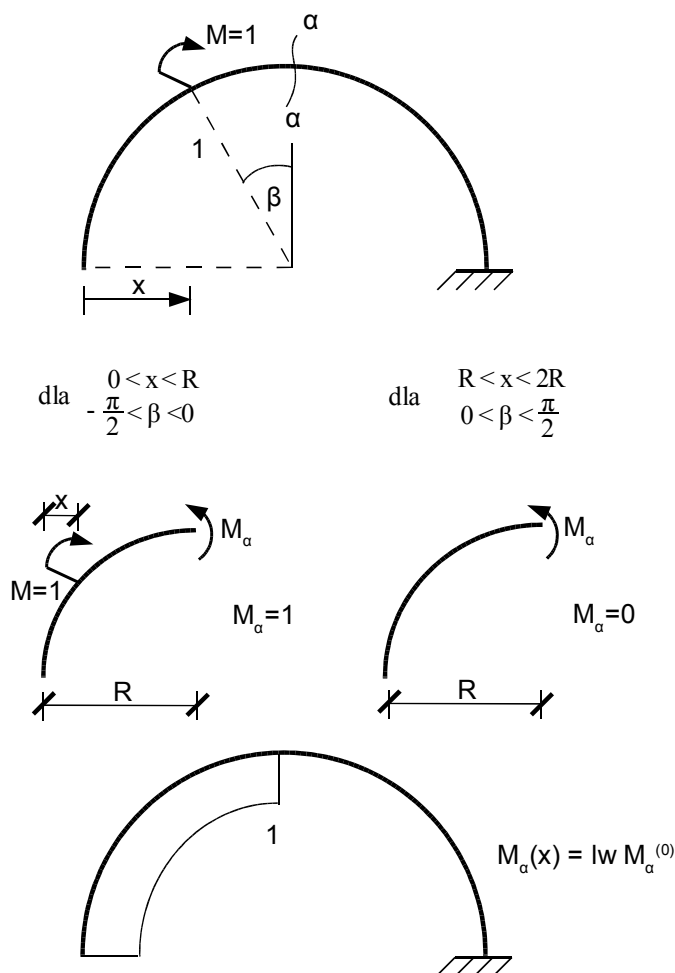
Najpierw wyznaczamy linię wpływu momentu w układzie statycznie wyznaczalnym. Wartość momentu zginającego w przekroju α - α zależy od położenia wędrującego momentu $M=1$ (rys. 15.71) i wynosi:

- dla $x \in (0, R)$, $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$$M_{\alpha}^0 = 1$$

- dla $x \in (R, 2R)$, $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$M_{\alpha}^0 = 0$$



Rys. 15.71. Linia wpływu $M_{\alpha}(x)$ w układzie statycznie wyznaczalnym

Teraz możemy zapisać równanie linii wpływu momentu zginającego w przekroju α - α dla poszczególnych

przedziałów w układzie niewyznaczalnym:

- dla $\beta \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, 0 \right\rangle$

$$Lw M_{\alpha}^{(n)} = I - \frac{2 \left[\frac{\pi}{2} - \beta + \cos \beta \right]}{3 \pi} = \frac{2 \pi + 2 \beta - 2 \cos \beta}{3 \pi} \quad (15.53)$$

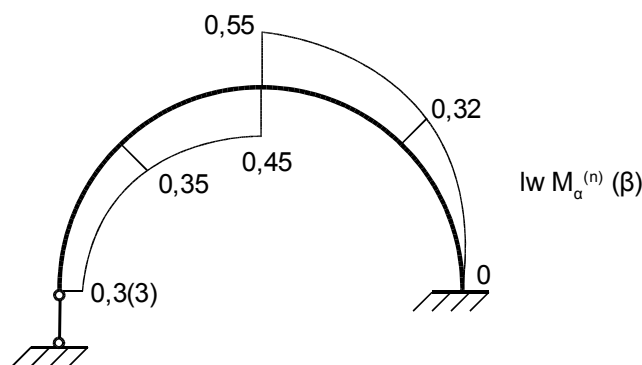
- dla $\beta \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

$$Lw M_{\alpha}^{(n)} = - \frac{2 \left[\frac{\pi}{2} - \beta + \cos \beta \right]}{3 \pi} = \frac{-\pi + 2 \beta - 2 \cos \beta}{3 \pi} \quad (15.54)$$

Do narysowania wykresu potrzebne będą nam wartości $M_{\alpha}^{(n)}$ dla charakterystycznych położenia momentu jednostkowego. Podstawiając wartości β do równań (15.53) i (15.54) otrzymujemy:

dla	$\beta = -\frac{\pi}{2}$	\rightarrow	$M_{\alpha} = \frac{1}{3}$
dla	$\beta = -\frac{\pi}{4}$	\rightarrow	$M_{\alpha} = 0,35$
dla	$\beta = 0^L$	\rightarrow	$M_{\alpha} = 0,45$
dla	$\beta = 0^P$	\rightarrow	$M_{\alpha} = -0,55$
dla	$\beta = \frac{\pi}{4}$	\rightarrow	$M_{\alpha} = -0,32$
dla	$\beta = \frac{\pi}{2}$	\rightarrow	$M_{\alpha} = 0$

Wykres linii wpływu $M_{\alpha}^{(n)}(\beta)$ w układzie statycznie niewyznaczalnym przedstawiono na rys. 15.72



Rys. 15.72. Wykres linii wpływu momentu zginającego w przekroju a-a od jednostkowego momentu