

## 1.

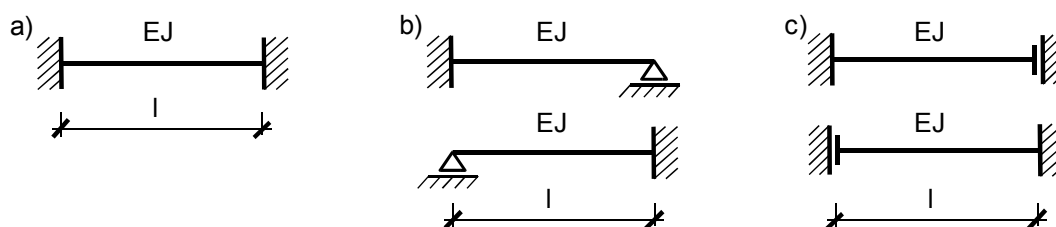


## 1. WZORY TRANSFORMACYJNE METODY PRZEMIESZCZEŃ

## 1.1. Wstęp

Podstawowym narzędziem służącym do rozwiązywania zadań metodą przemieszczeń są wzory transformacyjne. Pozwalają one określić wartości sił przywęzłowych na podstawie parametrów geometrycznych pręta (sztywność  $EJ$ , długość  $l$ ) oraz przemieszczeń węzłów pręta (liniowych i obrotowych).

Jeden ze sposobów wyznaczenia wzorów transformacyjnych polega na określeniu reakcji w podporach belki jednoprzęsłowej. Będą one zależały od typu podpór. Zadanie sprowadza się do rozwiązania belek statycznie niewyznaczalnych (rys. 1.1) metodą sił. Zakładamy wpływy zewnętrzne w postaci klasycznych osiadań podpór (przemieszczenia liniowe prostopadłe do osi belki, przemieszczenia kątowe).



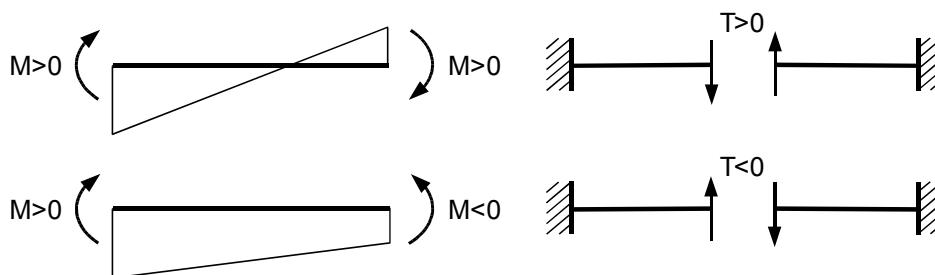
Rys. 1.1. Schematy belek statycznie niewyznaczalnych

Przed przystąpieniem do obliczeń należy przyjąć umowę dotyczącą znaków poszczególnych wielkości. Najwygodniejsza dla metody przemieszczeń będzie taka, która uprości obliczenia i wyeliminuje w jak największym stopniu różnice znaków poszczególnych wyrazów w równaniach.

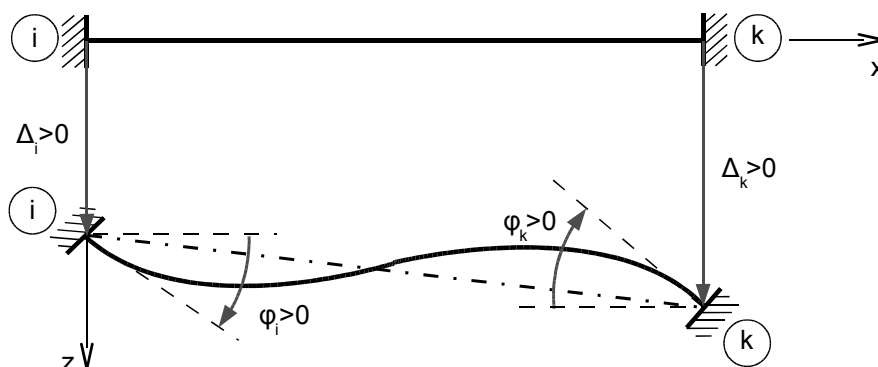
W związku z tym będziemy traktować jako  dodatnie :

- momenty działające przy węzłach prętów zgodnie z ruchem wskazówek zegara (układ prawoskrętny) (rys. 1.2),
- siły poprzeczne obracające odciętą część pręta zgodnie z ruchem wskazówek zegara (rys. 1.2),
- kąty obrotu przekrojów węzłowych  $\varphi$  zgodne z ruchem wskazówek zegara (rys. 1.3),
- przemieszczenia  $\Delta$  zgodne z kierunkiem i zwrotem przyjętego układu współrzędnych (rys. 1.3).

Wielkości ujemne będą miały zwroty przeciwne w stosunku do wymienionych. Ponadto tak jak dotychczas wykresy momentów zginających będziemy odkładać po stronie włókien rozciąganych, czyli od wypukłej strony osi odkształconej.



Rys. 1.2. Znakowanie momentów zginających i sił poprzecznych

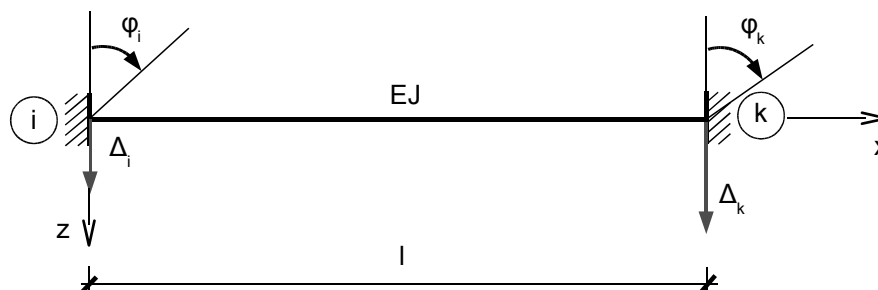


Rys. 1.3. Znakowanie kątów obrotu  $\varphi$  i przemieszczeń pionowych  $\Delta$  węzłów podporowych

Procedurę wyprowadzania wzorów transformacyjnych omówimy analizując różne przypadki podparcia pręta.

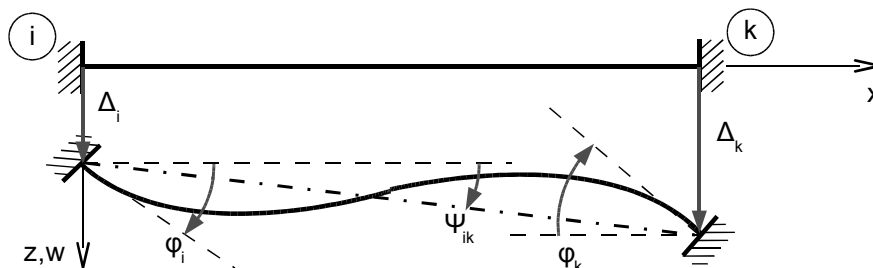
## 1.2. Belka utwierdzona

Rozpatrzmy belkę obustronnie utwierdzoną o długości  $l$  i sztywności  $EJ$  (rys. 1.4), której podpory doznają przemieszczeń  $\varphi_i$ ,  $\varphi_k$ ,  $\Delta_i$ ,  $\Delta_k$ .



Rys. 1.4. Schemat belki obustronnie utwierdzonej poddanej przemieszczeniom podpór

Narysujmy stan po przemieszczeniu podpór  $i$ ,  $k$  o zadane wartości (rys. 1.5). W rozważaniach przemieszczenia podpór będą dowolne, lecz z uwagi na czynione uproszczenia przyjmujemy, że ich wartości są niewielkie (małe w stosunku do wymiarów pręta).



Rys. 1.5. Stan po przemieszczeniu belki

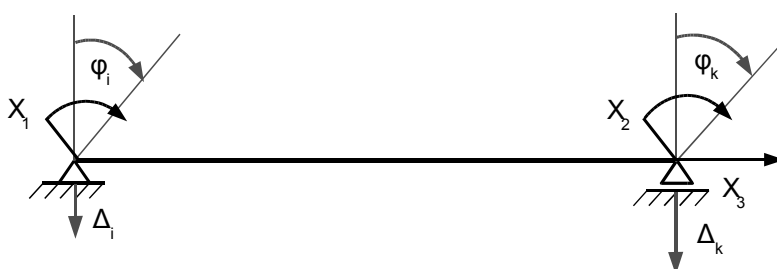
Na rys. 1.5 symbol  $\psi_{ik}$  oznacza obrót cięciwy wynikający z pionowych przemieszczeń podpór  $\Delta$ :

$$\operatorname{tg} \psi_{ik} = \frac{\Delta_k - \Delta_i}{l} = \frac{\Delta_k}{l} - \frac{\Delta_i}{l} \quad (1.1)$$

ponieważ dla małych kątów  $\operatorname{tg} \psi_{ik} \approx \psi_{ik}$ , to możemy zapisać:

$$\psi_{ik} = \frac{\Delta_k}{l} - \frac{\Delta_i}{l} = \frac{\Delta_k - \Delta_i}{l} \quad (1.2)$$

Aby rozwiązać zadanie metodą sił trzeba przyjąć układ podstawowy oraz odpowiadające mu warunki przemieszczeniowe.



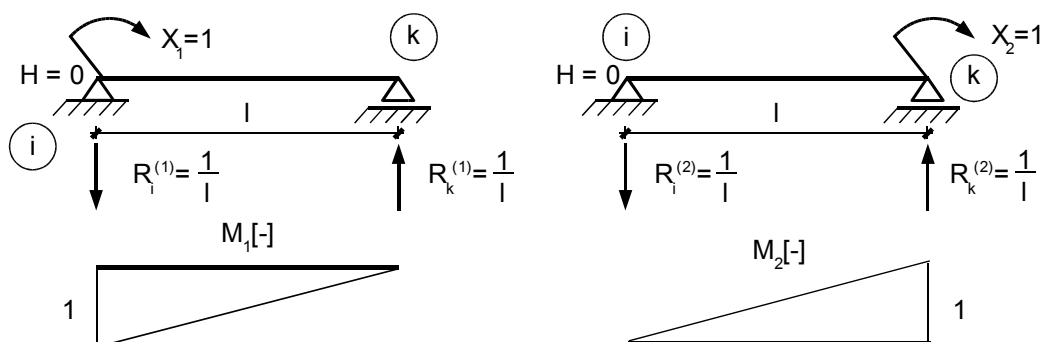
Rys. 1.6. Układ podstawowy

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0 \\ \delta_2 &= 0 \\ \delta_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ponieważ pomijamy w obliczeniach wpływ sił normalnych współczynniki  $\delta_{3i}$  (siła  $X_3$  wywołuje tylko siłę normalną) będą równe zero, a układ równań kanonicznych ograniczy się do dwóch równań:

$$\begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1\Delta} &= 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2\Delta} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

W celu obliczenia przemieszczeń z układu (1.3) narysujemy wykresy momentów w stanach  $X_1 = 1$  i  $X_2 = 1$ .



Rys. 1.7. Reakcje i momenty zginające w stanach  $X_1 = 1$  i  $X_2 = 1$

Obliczamy współczynniki macierzy podatności metodą Wiereszczagina-Mohra:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l \right) = \frac{l}{3EJ}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l \right) = \frac{l}{3EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot l \right) = -\frac{l}{6EJ}$$

A wyrazy wolne  $\Delta_{i\Delta}$  według wzoru:

$$\Delta_{i\Delta} = -\delta_i - \sum_j R_j^{(i)} \cdot \delta_j \quad (1.4)$$

gdzie:

$\delta_i$  - rzeczywiste, narzucone przemieszczenie zgodne z kierunkiem niewiadomej  $X_i$ ,

$R_j^{(i)}$  - reakcja w podporze j, w stanie  $X_i = l$ ,

$\delta_j$  - przemieszczenie narzucone po kierunku reakcji  $R_j^{(i)}$ .

$$\Delta_{1\Delta} = -\varphi_i - \frac{l}{l} \cdot \Delta_i + \frac{l}{l} \cdot \Delta_k = -\varphi_i + \psi_{ik}$$

$$\Delta_{2\Delta} = -\varphi_k - \frac{l}{l} \cdot \Delta_i + \frac{l}{l} \cdot \Delta_k = -\varphi_k + \psi_{ik}$$

Po podstawieniu otrzymanych wartości równanie kanoniczne (1.3) uzyskuje postać

$$\frac{l}{3EJ} \cdot X_1 - \frac{l}{6EJ} \cdot X_2 + (\psi_{ik} - \varphi_i) = 0$$

$$-\frac{l}{6EJ} \cdot X_1 + \frac{l}{3EJ} \cdot X_2 + (\psi_{ik} - \varphi_k) = 0 \quad (1.5)$$

Rozwiązanie układu (1.5) prowadzi do wartości sił nadliczbowych:

$$X_1 = \frac{2EJ}{l} \cdot (2\varphi_i + \varphi_k - 3\psi_{ik}) \quad (1.6)$$

$$X_2 = \frac{2EJ}{l} \cdot (\varphi_i + 2\varphi_k - 3\psi_{ik}) \quad (1.7)$$

W przyjętym układzie podstawowym siły nadliczbowe  $X_i$  oznaczają reakcje podporowe, a zarazem równoważne im wewnętrzne siły przypodorowe (rys. 1.8). Można zapisać:

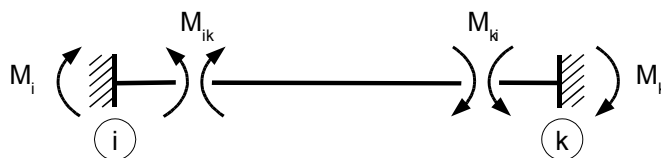
$$X_1 = M_{ik}$$

$$X_2 = M_{ki}$$

gdzie:

$M_{ik}$  to przesłowy, przywęzłowy moment zginający w przekroju  $i$ ,

$M_{ki}$  to przesłowy, przywęzłowy moment zginający w przekroju  $k$ .



Rys. 1.8. Momenty podporowe i przywęzłowe momenty zginające

Obliczmy jeszcze reakcje  $R_i$  i  $R_k$ .

$$\sum M_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2EJ}{l} \cdot (2\varphi_i + \varphi_k - 3\psi_{ik}) + \frac{2EJ}{l} \cdot (\varphi_i + 2\varphi_k - 3\psi_{ik}) + R_k \cdot l = 0 \quad (1.8)$$

$$R_k = -\frac{6EJ}{l^2} \cdot (\varphi_i + \varphi_k - 2\psi_{ik}) \quad (1.9)$$

$$R_i = -\frac{6EJ}{l^2} \cdot (\varphi_i + \varphi_k - 2\psi_{ik}) \quad (1.10)$$

Ponieważ reakcje węzłowe są równoważne wewnętrznym siłom przywęzłowym (rys. 1.9)

$$R_k = T_{ki} \quad R_i = T_{ik}$$

to siła tnąca wynosi:

$$T_{ik} = T_{ki} = -\frac{6EJ}{l^2} \cdot (\varphi_i + \varphi_k - 2\psi_{ik}) \quad (1.11)$$

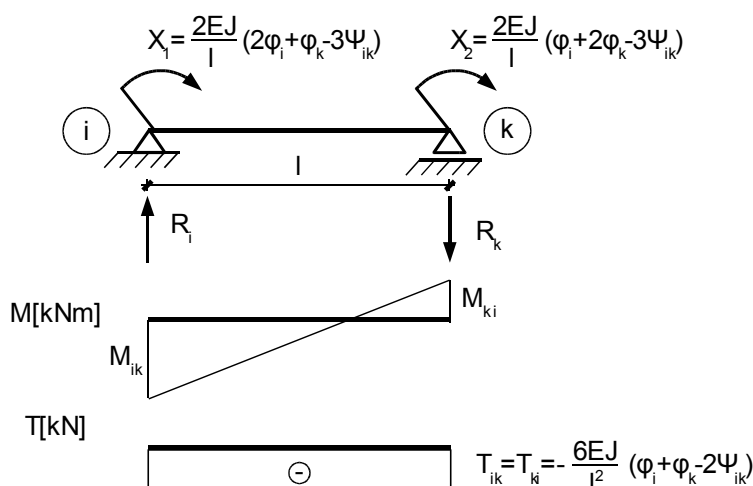
gdzie:

$T_{ik}$ ,  $T_{ki}$  oznaczają przesłowe, przywęzłowe siły poprzeczne.



Rys. 1.9. Reakcje podporowe i przywęzłowe siły poprzeczne

Gdy znamy już wartości wszystkich sił, to możemy narysować wykresy rzeczywistych sił wewnętrznych.



Rys. 1.10. Wykresy rzeczywistych sił wewnętrznych dla belki obustronnie utwierdzonej, obciążonej przemieszczeniami  $\varphi_i, \varphi_k, \Delta_i, \Delta_k$

Ostatecznie dla belki obustronnie utwierdzonej (rys. 1.4) otrzymaliśmy komplet wzorów transformacyjnych:

$$M_{ik} = \frac{2EJ}{l} \cdot (2\varphi_i + \varphi_k - 3\psi_{ik}) \quad (1.12)$$

$$M_{ki} = \frac{2EJ}{l} \cdot (\varphi_i + 2\varphi_k - 3\psi_{ik})$$

$$T_{ik} = -\frac{6EJ}{l^2} \cdot (\varphi_i + \varphi_k - 2\psi_{ik}) \quad (1.13)$$

$$T_{ki} = -\frac{6EJ}{l^2} \cdot (\varphi_i + \varphi_k - 2\psi_{ik})$$

Należy przypomnieć, że wzory transformacyjne metody przemieszczeń zależą od warunków brzegowych belki i przedstawiają relacje między przesłowymi, przywęzłowymi siłami wewnętrznymi, a uogólnionymi przemieszczeniami jej podpór.

### 1.3. Równanie osi odkształconej

Napiżemy równanie osi odkształconego, obustronnie utwierdzonego pręta (rys. 1.5) poddanego wpływom osiadań podpór  $\varphi_i, \varphi_k, \Delta_i, \Delta_k$  (nie obciążonego siłami zewnętrznymi).

Aby rozwiązać to zadanie korzystamy z równania różniczkowego linii ugięcia.

$$[EJ w''(x)]'' = q(x)$$

Ponieważ nie ma obciążeń zewnętrznych ( $q(x)=0$ ) otrzymujemy równanie jednorodne

$$[EJ w''(x)]''=0$$

które następnie całkujemy

$$\begin{aligned} [EJ w''(x)]' &= c \\ EJ w''(x) &= cx + d \\ EJ w'(x) &= c \cdot \frac{x^2}{2} + dx + e \end{aligned} \quad (1.14)$$

Ostatecznie funkcja osi odkształconej jest wielomianem trzeciego stopnia

$$EJ w(x) = c \cdot \frac{x^3}{6} + d \cdot \frac{x^2}{2} + ex + f \quad (1.15)$$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków brzegowych, które dla belki przedstawionej na rys. 1.4 wyrazimy przez wielkości kinematyczne (przemieszczenia):

$$\begin{cases} w(x=0) = \Delta_i \\ w'(x=0) = \varphi_i \\ w(x=l) = \Delta_k \\ w'(x=l) = \varphi_k \end{cases} \quad (1.16)$$

Po podstawieniu warunków brzegowych (1.16) do równań (1.14) i (1.15) uzyskujemy układ równań:

$$\begin{cases} EJ \Delta_i = f \\ EJ \varphi_i = e \\ EJ \Delta_k = \frac{cl^3}{6} + \frac{dl^2}{2} + el + f \\ EJ \varphi_k = \frac{cl^2}{2} + dl + e \end{cases}$$

Podstawienie dwóch pierwszych związków do dwóch ostatnich równań

$$\begin{cases} EJ \Delta_k = \frac{cl^3}{6} + \frac{dl^2}{2} + EJ \varphi_i \cdot l + EJ \Delta_i \\ EJ \varphi_k = \frac{cl^2}{2} + d \cdot l + EJ \varphi_i \end{cases}$$

po przekształceniach

$$d \cdot l = EJ \varphi_k - \frac{cl^2}{2} - EJ \varphi_i$$

$$d = \frac{EJ}{l} \varphi_k - \frac{cl}{2} - \frac{EJ}{l} \varphi_i$$

$$EJ \Delta_k = \frac{cl^3}{6} + \left( \frac{EJ}{l} \varphi_k - \frac{cl}{2} - \frac{EJ}{l} \varphi_i \right) \cdot \frac{l^2}{2} + EJ \varphi_i \cdot l + EJ \Delta_i$$

$$\frac{cl^3}{6} - \frac{cl^3}{4} = EJ \Delta_k - EJ \Delta_i - EJ \varphi_i \cdot l - \frac{EJ}{2} \varphi_k \cdot l + \frac{EJ}{2} \varphi_i \cdot l$$

prowadzi do wartości stałych  $c$  i  $d$ :

$$c = \frac{6 EJ}{l^2} \cdot (\varphi_i + \varphi_k) + \frac{12 EJ}{l^3} \cdot (\Delta_i - \Delta_k)$$

$$d = \frac{EJ}{l} \varphi_k - \frac{EJ}{l} \varphi_i - \frac{l}{2} \cdot \left[ \frac{6 EJ}{l^2} \cdot (\varphi_i + \varphi_k) + \frac{12 EJ}{l^3} \cdot (\Delta_i - \Delta_k) \right]$$

$$d = -\frac{2 EJ}{l} \varphi_k - \frac{4 EJ}{l} \varphi_i - \frac{6 EJ}{l^2} \cdot (\Delta_i - \Delta_k)$$

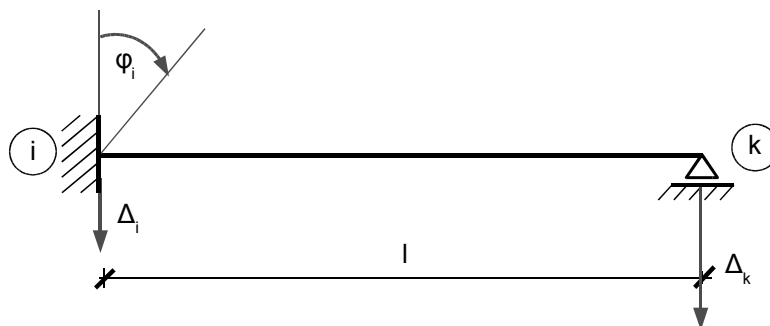
Równanie osi odkształconej pręta obustronnie utwierdzonego poddanego przemieszczeniu węzłów podporowych wyraża się funkcją:

$$EJ w(x) = \left[ \frac{6 EJ}{l^2} \cdot (\varphi_i + \varphi_k) + \frac{12 EJ}{l^3} \cdot (\Delta_i - \Delta_k) \right] \cdot \frac{x^3}{6} + \left[ -\frac{2 EJ}{l} (\varphi_k + 2 \varphi_i) - \frac{6 EJ}{l^2} \cdot (\Delta_i - \Delta_k) \right] \cdot \frac{x^2}{2} + EJ \varphi_i \cdot x + EJ \Delta_i$$

$$w(x) = \left[ (\varphi_i + \varphi_k) + \frac{2}{l} \cdot (\Delta_i - \Delta_k) \right] \cdot \frac{x^3}{l^2} + \left[ -(\varphi_k + 2 \varphi_i) - \frac{3}{l} \cdot (\Delta_i - \Delta_k) \right] \cdot \frac{x^2}{l} + \varphi_i \cdot x + \Delta_i$$

#### 1.4. Belka utwierdzona jednostronnie

Rozpatrzmy belkę utwierdzoną z jednej strony (rys. 1.11), której podpory ulegają przemieszczeniom  $\varphi_i$ ,  $\Delta_i$ ,  $\Delta_k$ . Poniższy przykład rozwiążemy dwoma metodami: metodą sił (analogicznie do punktu 1.2) oraz korzystając z gotowych wyników otrzymanych w punkcie 1.2 (przyjmując odpowiednie warunki brzegowe).

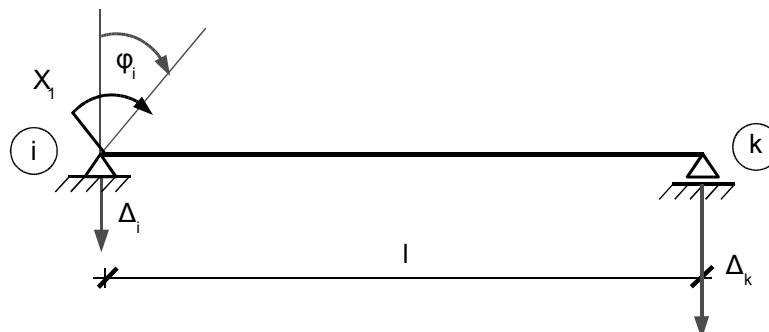


Rys. 1.11. Schemat belki jednostronnie utwierdzonej



## Metoda I – metoda sił

Zgodnie z zasadami metody sił przyjmujemy układ podstawowy

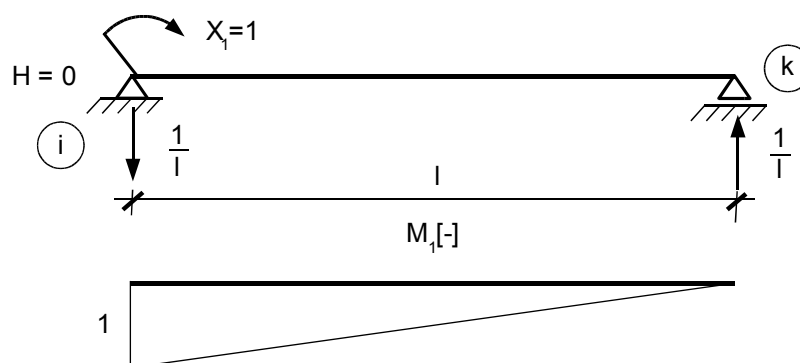


Rys. 1.12. Układ podstawowy

w którym przemieszczenie po kierunku zwolnionego więzu musi być równe zero ( $\delta_l = 0$ ). Wynikające z tego warunku równanie kanoniczne będzie miało następującą postać:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1\Delta} = 0 \quad (1.17)$$

Aby obliczyć współczynniki równania narysujemy wykresy momentów w stanie  $X_1 = 1$  (analogicznie jak na rys. 1.7).



Rys. 1.13. Reakcje i momenty zginające w stanie  $X_1 = 1$

i wyznaczamy wartości przemieszczeń:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{l}{3EJ}$$

$$\Delta_{1\Delta} = -\varphi_i - \frac{1}{l} \cdot \Delta_i + \frac{1}{l} \cdot \Delta_k = -\varphi_i + \psi_{ik}$$

Po podstawieniu otrzymanych wyników do równania kanonicznego (1.17)

$$\frac{l}{3EJ} \cdot X_1 + (\psi_{ik} - \varphi_i) = 0$$

uzyskujemy wartość nadliczbowej siły

$$X_l = \frac{3EJ}{l} \cdot (\varphi_i - \psi_{ik}) \quad (1.18)$$

Niewiadoma  $X_l$  jest reakcją podporową, której wartość odpowiada wewnętrznej sile przywęzłowej

$$X_l = M_{ik}$$

$M_{ik}$  to przęsłowy, przywęzłowy moment zginający w przekroju  $i$ . Natomiast przęsłowy, przywęzłowy moment zginający w przekroju  $k$  jest równy zero (przegub).

$$M_{ki} = 0$$

Obliczmy wartości reakcji  $R_i$  i  $R_k$ .

$$\sum M_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3EJ}{l} \cdot (\varphi_i - \psi_{ik}) + R_i \cdot l = 0$$

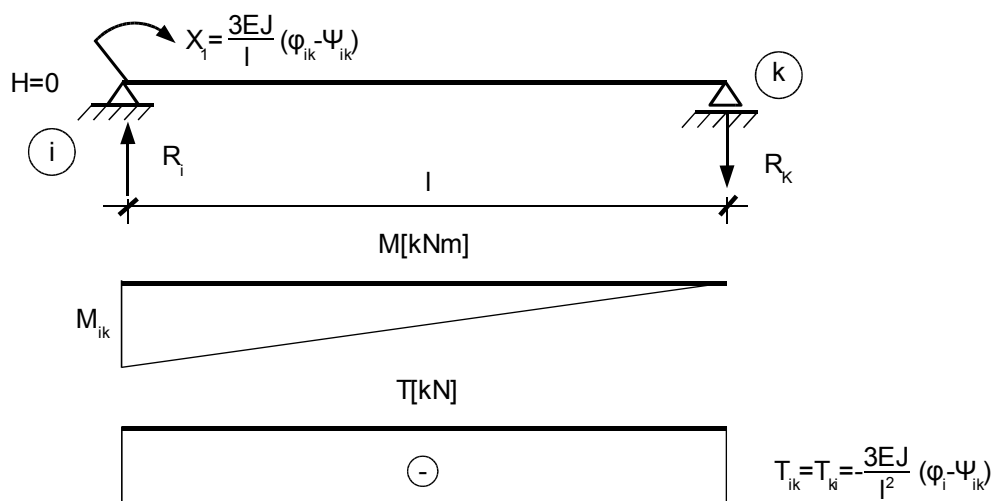
$$R_i = -\frac{3EJ}{l^2} \cdot (\varphi_i - \psi_{ik}) \quad (1.19)$$

$$R_k = -\frac{3EJ}{l^2} \cdot (\varphi_i - \psi_{ik}) \quad (1.20)$$

które pokrywają się z wartościami sił tnących (przęsłowych, przywęzłowych)

$$T_{ik} = T_{ki} = -\frac{3EJ}{l^2} \cdot (\varphi_i - \psi_{ik}) \quad (1.21)$$

Znając wartość nadliczbowej  $X_l$  możemy narysować wykres rzeczywistych sił wewnętrznych.



Rys. 1.14. Wykresy rzeczywistych sił wewnętrznych dla belki utwierdzonej z jednej strony, obciążonej przemieszczeniami  $\varphi_i$ ,  $\Delta_i$ ,  $\Delta_k$

## Metoda II

W tej metodzie wzory (1.12), (1.13) potraktujemy jako uniwersalne i po podstawieniu odpowiednich warunków brzegowych wyprowadzimy wzory transformacyjne dla rozpatrywanego przypadku.

Wiemy, że dla belki (rys. 1.11) utwierdzonej z lewej strony i podpartej prętem ze strony prawej moment przęsłowy, przywęzłowy  $M_{ki} = 0$ , a zatem na podstawie równania (1.12) możemy zapisać:

$$M_{ki} = \frac{2EJ}{l} \cdot (\varphi_i + 2\varphi_k - 3\psi_{ik}) = 0 \quad (1.22)$$

Z równania tego wyznaczamy funkcję kąta obrotu  $\varphi_k$

$$\begin{aligned} \varphi_i + 2\varphi_k - 3\psi_{ik} &= 0 \\ \varphi_k &= \frac{3\psi_{ik} - \varphi_i}{2} \end{aligned} \quad (1.23)$$

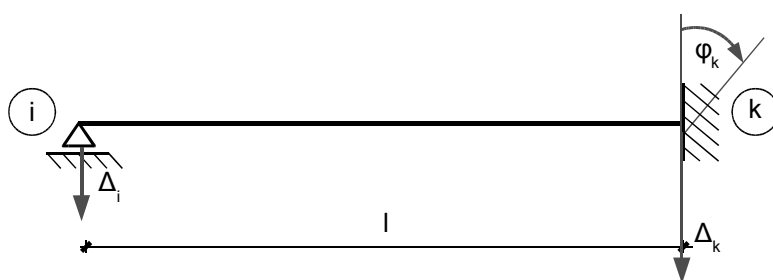
Po podstawieniu funkcji  $\varphi_k$  do równań (1.12), (1.13) otrzymujemy komplet wzorów transformacyjnych dla belki jednostronnie utwierdzonej (utwierdzenie z lewej strony):

$$M_{ik} = \frac{2EJ}{l} \cdot \left( 2\varphi_i + \frac{3\psi_{ik} - \varphi_i}{2} - 3\psi_{ik} \right) = \frac{3EJ}{l} \cdot (\varphi_i - \psi_{ik}) \quad (1.24)$$

$$M_{ki} = 0 \quad (1.25)$$

$$T_{ki} = T_{ik} = -\frac{6EJ}{l^2} \cdot \left( \varphi_i + \frac{3\psi_{ik} - \varphi_i}{2} - 2\psi_{ik} \right) = -\frac{3EJ}{l^2} \cdot (\varphi_i - \psi_{ik}) \quad (1.26)$$

Dla belki o podobnych podporach (rys.1.15) jednak ułożonych przeciwnie, czyli będącej lustrzanym odbiciem układu z rys. 1.11 można zapisać gotowe wzory transformacyjne.



Rys. 1.15. Schemat belki utwierdzonej z prawej strony

$$M_{ik} = 0 \quad (1.27)$$

$$M_{ki} = \frac{3EJ}{l} \cdot (\varphi_k - \psi_{ik}) \quad (1.28)$$

$$T_{ki} = T_{ik} = -\frac{3EJ}{l^2} \cdot (\varphi_k - \psi_{ik}) \quad (1.29)$$

### 1.5. Belka obustronnie utwierdzona z przesuwem

Rozpatrzmy belkę o schemacie przedstawionym na rys. 1.16, której podpory doznają przemieszczeń  $\varphi_i$ ,  $\varphi_k$ . Przesunięcie pionowe podpory  $i$  o  $\Delta_i$  spowoduje ruch całej belki i nie wywoła sił wewnętrznych, dlatego ten wpływ pomijamy. Poniższy przykład tak jak poprzednio rozwiążemy dwoma metodami.



Rys. 1.16. Schemat belki utwierdzonej z przesuwem

#### Metoda I – metoda sił

Przyjmujemy układ podstawowy.

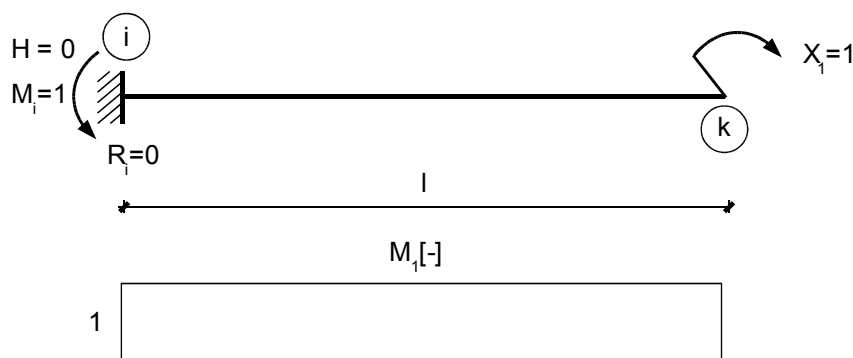


Rys. 1.17. Układ podstawowy

i zapisujemy równanie kanoniczne (nie uwzględniamy sił normalnych):

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1\Delta} = 0 \quad (1.30)$$

Aby obliczyć współczynniki równania rysujemy wykres momentów w stanie  $X_1 = 1$ .



Rys. 1.18. Reakcje i momenty zginające w stanie  $X_1 = 1$

Obliczamy współczynniki równania kanonicznego.

$$\delta_{11} = \frac{l}{EJ} \cdot (l \cdot l \cdot l) = \frac{l^3}{EJ}$$

$$\Delta_{1\Delta} = -\varphi_k + \varphi_i$$

Po podstawieniu otrzymanych wyników do równania (1.30)

$$\frac{l}{EJ} \cdot X_1 + (\varphi_i - \varphi_k) = 0 \quad (1.31)$$

Otrzymujemy wartości nadliczbowej siły:

$$X_1 = \frac{EJ}{l} \cdot (-\varphi_i + \varphi_k) \quad (1.32)$$

Reakcja w podporze odpowiada momentowi zginającemu w przekroju podporowym:

$$M_{ki} = X_1 = \frac{EJ}{l} \cdot (-\varphi_i + \varphi_k)$$

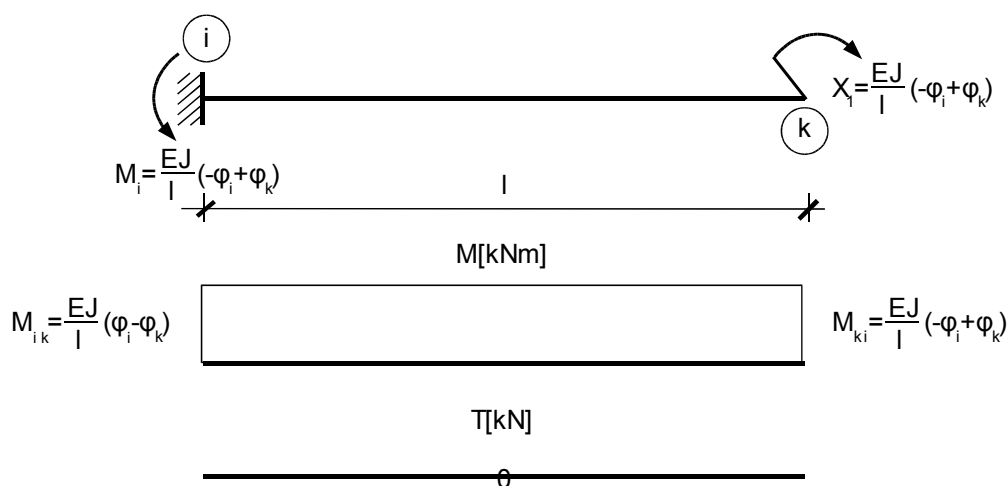
$M_{ki}$  to przesłowy, przywęzłowy moment zginający w przekroju  $k$ . Natomiast przesłowy, przywęzłowy moment zginający w przekroju  $i$  wynosi

$$M_{ik} = -X_1 = \frac{EJ}{l} \cdot (\varphi_i - \varphi_k)$$

Siła tnąca przy braku obciążeń zewnętrznych jest równa reakcji

$$T_{ik} = T_{ki} = R_i = 0 \quad (1.33)$$

Na koniec rysujemy wykresy rzeczywistych sił wewnętrznych.



Rys. 1.19. Wykresy rzeczywistych sił wewnętrznych dla belki obustronnie utwierdzonej, obciążonej przemieszczeniami  $\varphi_i$ ,  $\varphi_k$

## Metoda II

Wykorzystujemy wzory (1.12), (1.13) (traktujemy je jako uniwersalne) i podstawiamy odpowiednie warunki brzegowe. W ten sposób otrzymujemy wzory transformacyjne dla rozpatrywanego przypadku.

Wiemy, że dla belki przedstawionej na rys. 1.16 siły tnące  $T_{ki} = T_{ik} = 0$ , a zatem na podstawie równania (1.13) możemy zapisać:

$$T_{ik} = -\frac{6EJ}{l^2} \cdot (\varphi_i + \varphi_k - 2\psi_{ik}) = 0 \quad (1.34)$$

Z równania (1.34) wyliczamy  $\psi_{ik}$

$$\varphi_i + \varphi_k - 2\psi_{ik} = 0 \quad (1.35)$$

$$\psi_{ik} = \frac{\varphi_i + \varphi_k}{2} \quad (1.36)$$

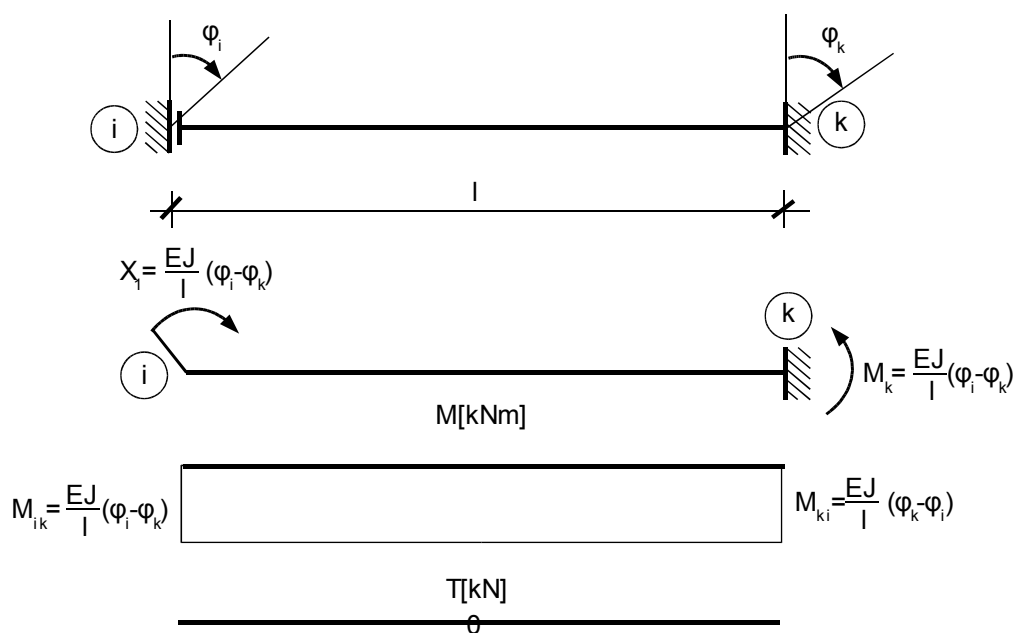
Jeśli podstawimy  $\psi_{ik}$  do równań (1.12), to otrzymamy komplet wzorów transformacyjnych:

$$M_{ik} = \frac{2EJ}{l} \cdot \left( 2\varphi_i + \varphi_k - 3 \cdot \frac{\varphi_i + \varphi_k}{2} \right) = \frac{EJ}{l} \cdot (\varphi_i - \varphi_k) \quad (1.37)$$

$$M_{ki} = \frac{2EJ}{l} \cdot \left( \varphi_i + 2\varphi_k - \frac{3 \cdot \varphi_i + \varphi_k}{2} \right) = \frac{EJ}{l} \cdot (-\varphi_i + \varphi_k) \quad (1.38)$$

$$T_{ik} = T_{ki} = 0 \quad (1.39)$$

Dla belki o schemacie podanym na rys. 1.20 (lustrzane odbicie do rys. 1.16) wzory transformacyjne są takie same jak w powyższym przykładzie.

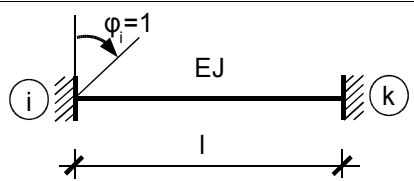
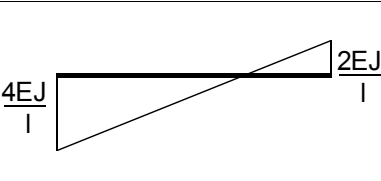
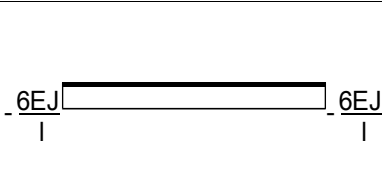

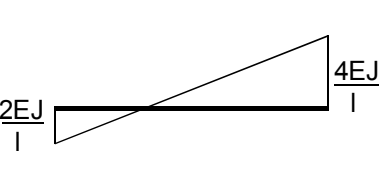
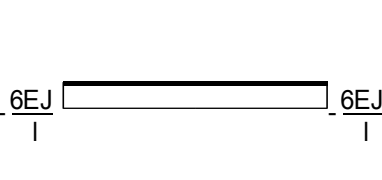
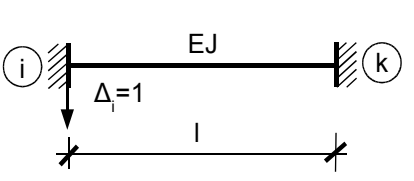
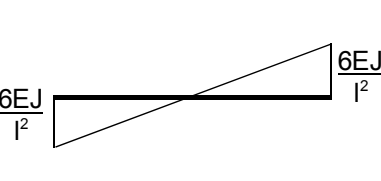
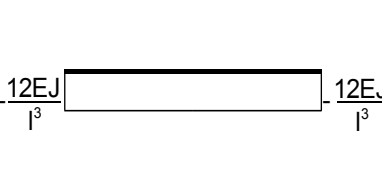

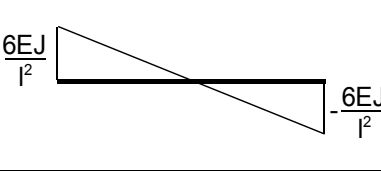
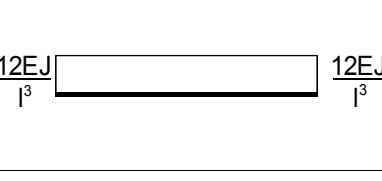
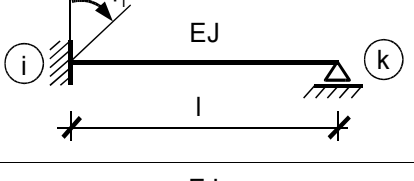
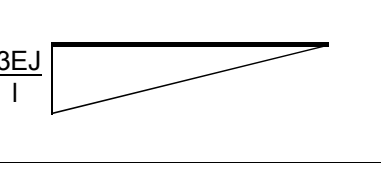
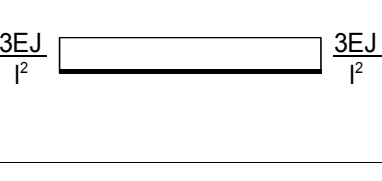
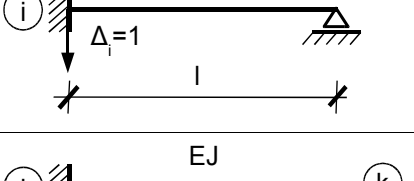
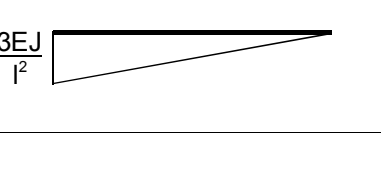
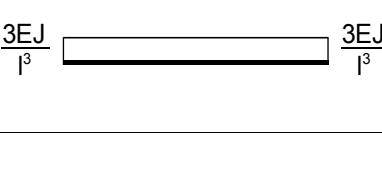
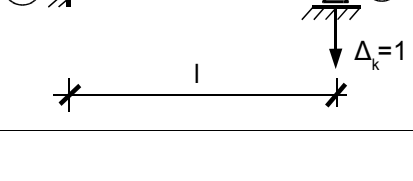
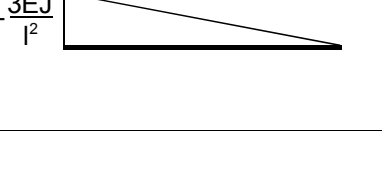
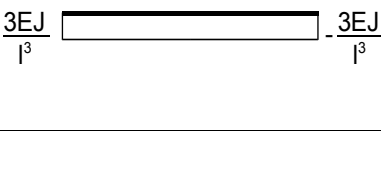


Rys. 1.20. Schemat belki

Wyniki rozważań zestawiono w tabeli 1.1. Podano wartości przywęzłowych sił wewnętrznych w zależności od sposobu podparcia belki wywołane jednostkowymi przemieszczeniami węzłów podporowych. Natomiast w tabeli 1.2 zestawiono wykresy sił wewnętrznych (przywęzłowych) dla trzech schematów belek od obciążeń zewnętrznych (prześlowych).

Uwaga: w tabelach narysowane są wykresy momentów zginających “po inżyniersku”, tzn. wykres po stronie włókien rozciąganych. Natomiast ich wartości podano zgodnie z zasadami metody przemieszczeń, tzn. momenty dodatnie działają zgodnie z ruchem wskazówek zegara (prawoskrętnie).

Tabela 1.1. Wykresy momentów zginających i sił poprzecznych od jednostkowych przemieszczeń podporowych

Schemat belki	$M$	$T$
		
		
		
		
		
		
		

Schemat belki	$M$	$T$

Tabela 1.2. Wykresy momentów zginających i sił poprzecznych od przeszłowych obciążeń

Schemat belki	$M$	$T$



Schemat belki	$M$	$T$
