

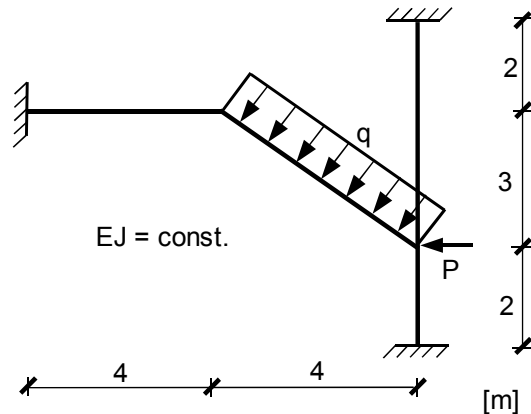
16.



16. ZADANIA - POWTÓRKA

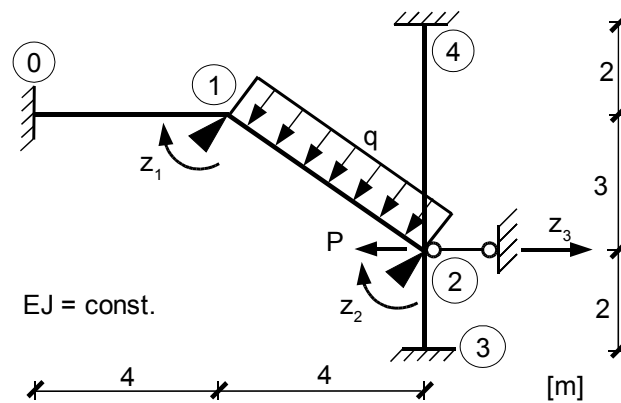
Zadanie 1

Wykorzystując metodę przemieszczeń znaleźć wykres momentów zginających dla ramy z rys. 16.1.



Rys. 16.1. Rama statycznie niewyznaczalna

Do rozwiązania zadania metodą przemieszczeń przyjmujemy układ podstawowy z zablokowanymi przemieszczeniami węzłów

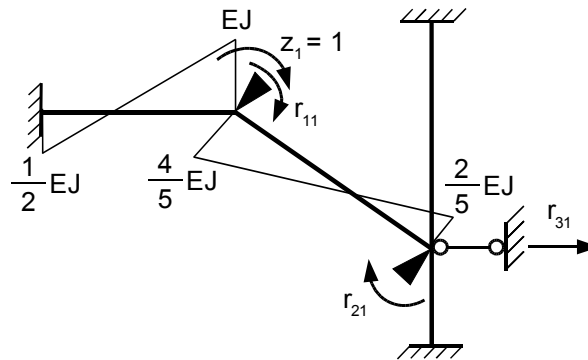


Rys. 16.2. Układ podstawowy

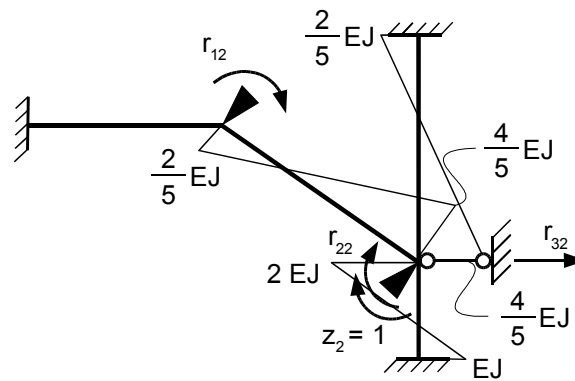
oraz związany z nim układ równań kanonicznych

$$\begin{cases} r_{11}z_1 + r_{12}z_2 + r_{13}z_3 + r_{1P} = 0 \\ r_{21}z_1 + r_{22}z_2 + r_{23}z_3 + r_{2P} = 0 \\ r_{31}z_1 + r_{32}z_2 + r_{33}z_3 + r_{3P} = 0 \end{cases} \quad (16.1)$$

Do wyznaczenia współczynników r_{ik} i r_{iP} potrzebne nam będą wykresy momentów w stanach jednostkowych:

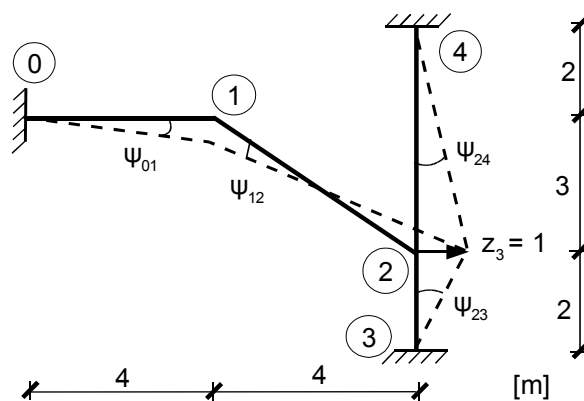


Rys. 16.3. Wykres momentów w układzie podstawowym wywołany obrotem $z_1 = 1$



Rys. 16.4. Wykres momentów w układzie podstawowym wywołany obrotem $z_2 = 1$

W stanie $z_3 = 1$ trzeba najpierw znaleźć kąty obrotu cięciw prętów ψ . W tym celu tworzymy łańcuch kinematyczny.



Rys. 16.5. Kąty obrotu cięciw prętów wywołane jednostkowym przesuwem $z_3 = 1$

Z równań łańcucha wyznaczamy wartości kątów obrotu cięciw prętów:

$$32 \rightarrow \quad \psi_{32} \cdot 2 = 1 \quad \psi_{32} = \frac{1}{2}$$

$$42 \rightarrow \quad -\psi_{42} \cdot 5 = 1 \quad \psi_{42} = -\frac{1}{5}$$

$$012 \rightarrow \quad \psi_{01} \cdot 0 - \psi_{12} \cdot 3 = 1 \quad \psi_{12} = -\frac{1}{3}$$

$$0123 \downarrow \quad \psi_{01} \cdot 4 + \psi_{12} \cdot 4 + \psi_{23} \cdot 0 = 0 \quad \psi_{01} = \frac{1}{3}$$

Korzystając z wyznaczonych kątów obrotu cięciw prętów obliczamy wartości przywęzłowych momentów zginających, powstałych od jednostkowego przesuwu po kierunku z_3

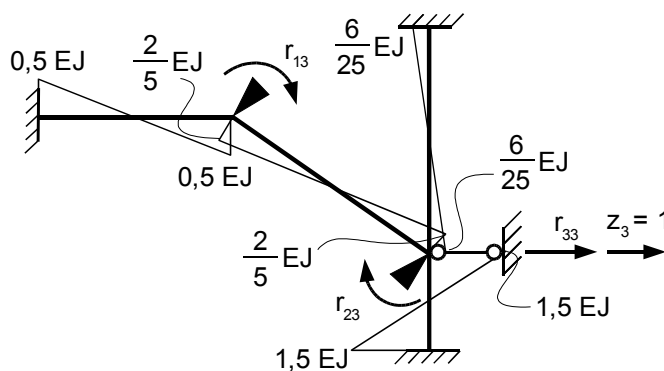
$$M_{01}^{(z_3)} = M_{10}^{(z_3)} = \frac{2}{4} EJ \cdot \left[-3 \cdot \frac{1}{3} \right] = -\frac{1}{2} EJ$$

$$M_{12}^{(z_3)} = M_{21}^{(z_3)} = \frac{2}{5} EJ \cdot \left[-3 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) \right] = \frac{2}{5} EJ$$

$$M_{23}^{(z_3)} = M_{32}^{(z_3)} = \frac{2}{2} EJ \cdot \left[-3 \cdot \frac{1}{2} \right] = -\frac{3}{2} EJ$$

$$M_{24}^{(z_3)} = M_{42}^{(z_3)} = \frac{2}{5} EJ \cdot \left[-3 \cdot \left(-\frac{1}{5} \right) \right] = \frac{6}{25} EJ$$

i nanosimy je na wykres:



Rys. 16.6. Wykres momentów w układzie podstawowym wywołany przesuwem $z_3 = 1$

Na podstawie powyższych wykresów, z równowagi węzłów ramy, możemy wyznaczyć reakcje po kierunkach zmiennych z_1 i z_2 :

$$r_{11} = EJ + \frac{4}{5} EJ = \frac{9}{5} EJ \quad (16.2)$$

$$r_{22} = \frac{4}{5} EJ + \frac{4}{5} EJ + 2 EJ = \frac{18}{5} EJ \quad (16.3)$$

$$r_{12} = r_{21} = \frac{2}{5} EJ \quad (16.4)$$

$$r_{13} = \frac{2}{5} EJ - \frac{1}{2} EJ = -\frac{1}{10} EJ \quad (16.5)$$

$$r_{23} = \frac{2}{5} EJ + \frac{6}{25} EJ - \frac{3}{2} EJ = -\frac{43}{50} EJ \quad (16.6)$$

Korzystając z równania pracy wirtualnej, wyznaczamy wartości pozostałych współczynników macierzy sztywności (reakcje po kierunku z_3):

$$r_{33} \cdot \bar{1} + \left(-\frac{1}{2} EJ - \frac{1}{2} EJ\right) \cdot \frac{\bar{1}}{3} + \left(\frac{2}{5} EJ + \frac{2}{5} EJ\right) \cdot \left(-\frac{\bar{1}}{3}\right) + \left(-\frac{3}{2} EJ - \frac{3}{2} EJ\right) \cdot \frac{\bar{1}}{2} + \left(\frac{6}{25} EJ + \frac{6}{25} EJ\right) \cdot \left(-\frac{\bar{1}}{5}\right) = 0$$

$$r_{33} = \frac{549}{250} EJ \quad (16.7)$$

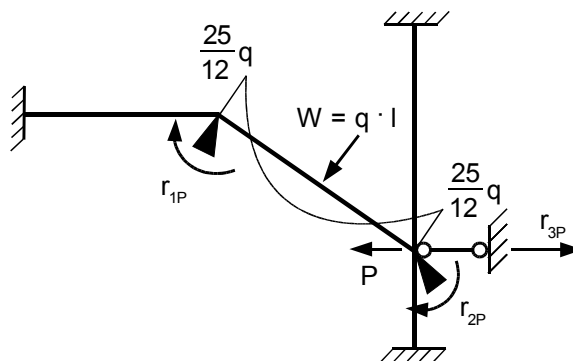
$$r_{31} \cdot \bar{1} + \left(\frac{1}{2} EJ + EJ\right) \cdot \frac{\bar{1}}{3} + \left(\frac{4}{5} EJ + \frac{2}{5} EJ\right) \cdot \left(-\frac{\bar{1}}{3}\right) = 0$$

$$r_{31} = -\frac{1}{10} EJ \quad (16.8)$$

$$r_{32} \cdot \bar{1} + \left(\frac{2}{5} EJ + \frac{4}{5} EJ\right) \cdot \left(-\frac{\bar{1}}{3}\right) + \left(\frac{2}{5} EJ + \frac{4}{5} EJ\right) \cdot \left(-\frac{\bar{1}}{5}\right) + (2 EJ + EJ) \cdot \frac{\bar{1}}{2} = 0$$

$$r_{32} = -\frac{43}{50} EJ \quad (16.9)$$

Następnie wyznaczamy reakcje wywołane obciążeniem zewnętrznym.



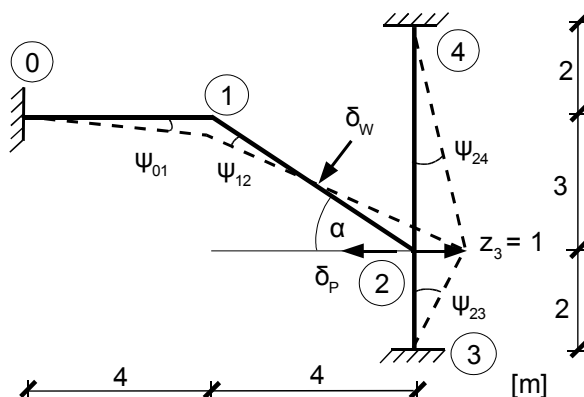
Rys. 16.7. Wykres momentów w układzie podstawowym od obciążenia zewnętrznego

Z równowagi węzłów 1 i 2 otrzymamy wartości współczynników:

$$r_{1P} = -\frac{25}{12} \cdot q \quad (16.10)$$

$$r_{2P} = \frac{25}{12} \cdot q \quad (16.11)$$

Z równań łańcucha kinematycznego wyznaczamy wielkości przemieszczeń pod siłą P i siłą W – wypadkową z obciążenia ciągłego. Wykorzystujemy wartości kątów ψ wyznaczone dla $z_3 = l$.



Rys. 16.8. Przemieszczenia pod siłami skupionymi wywołane jednostkowym przesuwem $z_3 = 1$

$$012 \rightarrow \quad \psi_{01} \cdot 0 - \psi_{12} \cdot 3 = -\delta_P \quad \rightarrow \quad \delta_P = -1$$

$$01W \downarrow \quad \psi_{01} \cdot 4 + \psi_{12} \cdot 2,0 = \delta_W \cdot \cos \alpha \quad \rightarrow \quad \delta_W = \frac{5}{6}$$

Z równania pracy wirtualnej wyznaczamy wartość współczynnika r_{3P} :

$$r_{3P} \cdot \bar{1} + \left(-\frac{25}{12} \cdot q + \frac{25}{12} \cdot q \right) \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) + P \cdot \delta_P + q \cdot l \cdot \delta_W = 0$$

$$r_{3P} = P - \frac{25}{6} \cdot q \quad (16.12)$$

Po wyznaczeniu wartości wszystkich współczynników wstawiamy je do układu równań kanonicznych (16.1).

$$\begin{cases} \frac{9}{5} \cdot EJ \cdot z_1 + \frac{2}{5} \cdot EJ \cdot z_2 - \frac{1}{10} \cdot EJ \cdot z_3 - \frac{25}{12} \cdot q = 0 \\ \frac{2}{5} \cdot EJ \cdot z_1 + \frac{18}{5} \cdot EJ \cdot z_2 - \frac{43}{50} \cdot EJ \cdot z_3 + \frac{25}{12} \cdot q = 0 \\ -\frac{1}{10} \cdot EJ \cdot z_1 - \frac{43}{50} \cdot EJ \cdot z_2 + \frac{549}{250} \cdot EJ \cdot z_3 + \left(P - \frac{25}{6} \cdot q \right) = 0 \end{cases}$$

Przyjmijmy, że działająca siła skupiona $P = 5 \text{ kN}$ i obciążenie ciągłe $q = 8 \text{ kN/m}^2$ i dalsze obliczenia wykonamy na wartościach liczbowych obciążenia. Układ równań kanonicznych po podzieleniu przez EJ , przyjmie wówczas postać:

$$\begin{cases} 1,8 \cdot z_1 + 0,4 \cdot z_2 - 0,1 \cdot z_3 = \frac{16,667}{EJ} \\ 0,4 \cdot z_1 + 3,6 \cdot z_2 - 0,86 \cdot z_3 = -\frac{16,667}{EJ} \\ -0,1 \cdot z_1 - 0,86 \cdot z_2 + 2,196 \cdot z_3 = \frac{28,333}{EJ} \end{cases} \quad (16.13)$$

Po rozwiązaniu układu równań (16.13) otrzymamy:

$$\begin{cases} EJ z_1 = 10,5796 \\ EJ z_2 = -2,8770 \\ EJ z_3 = 12,2573 \end{cases} \quad (16.14)$$

Teraz, korzystając z wzorów transformacyjnych, możemy wyznaczyć rzeczywiste wartości przywęzłowych momentów zginających.

$$M_{01} = \frac{2}{4} \left[2 \cdot 0 + 10,5796 - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 12,2573 \right] = -0,839 \text{ kNm}$$

$$M_{10} = \frac{2}{4} \left[0 + 2 \cdot 10,5796 - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 12,2573 \right] = 4,451 \text{ kNm}$$

$$M_{12} = \frac{2}{5} \left[2 \cdot 10,5796 + (-2,8770) - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 12,2573 \right] - \frac{25}{12} \cdot 8 = -4,451 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = \frac{2}{5} \left[10,5796 + 2 \cdot (-2,8770) - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 12,2573 \right] + \frac{25}{12} \cdot 8 = 23,500 \text{ kNm}$$

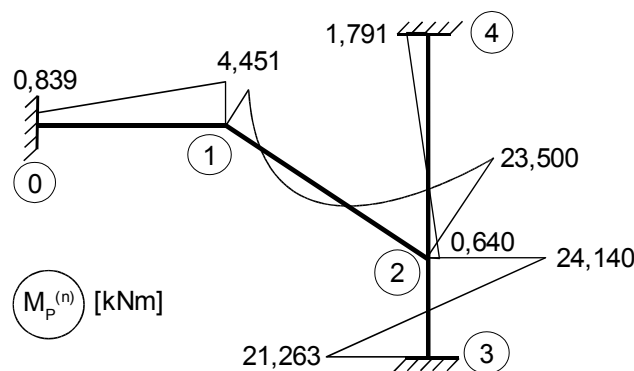
$$M_{23} = \frac{2}{2} \left[2 \cdot (-2,8770) + 0 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12,2573 \right] = -24,140 \text{ kNm}$$

$$M_{32} = \frac{2}{2} \left[2 \cdot 0 + (-2,8770) - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12,2573 \right] = -21,263 \text{ kNm}$$

$$M_{24} = \frac{2}{5} \left[2 \cdot (-2,8770) + 0 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 12,2573 \right] = 0,640 \text{ kNm}$$

$$M_{42} = \frac{2}{5} \left[2 \cdot 0 + (-2,8770) - 3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 12,2573 \right] = 1,791 \text{ kNm}$$

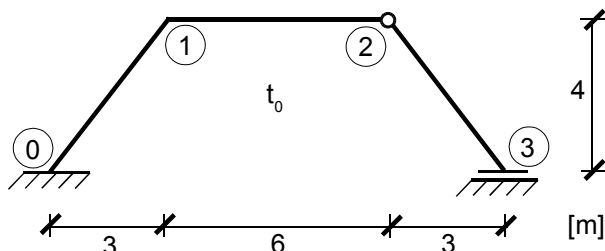
Rzeczywisty wykres momentów będzie wyglądał następująco:



Rys. 16.9. Wykres momentów zginających w układzie statycznie niewyznaczalnym

Zadanie 2

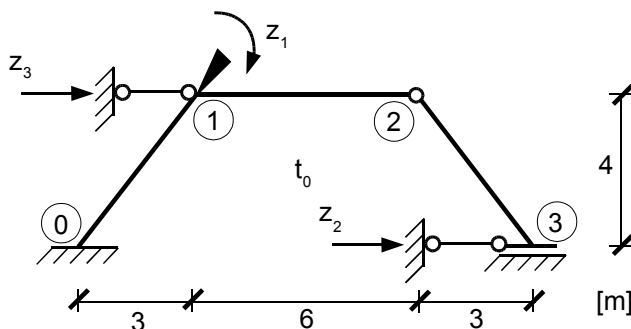
Wyznaczyć wartości współczynników r_{ik} i r_{iT} dla ramy obciążonej równomiernie rozłożoną temperaturą t_0 (rys. 16.10).



Rys. 16.10. Rama obciążona termicznie

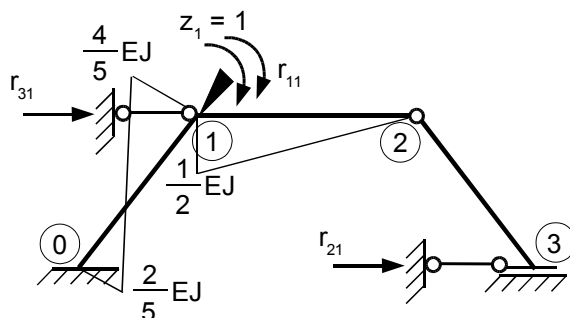
Ponieważ podpora ślizgowa w węźle 3 nie jest pod kątem prostym do osi pręta, nie możemy wykorzystać wzorów transformacyjnych dla pręta z podporą ślizgową. Rama wymaga dodatkowego zablokowania przesuwu w tym węźle.

Do wyznaczenia współczynników r_{ik} macierzy sztywności, oraz współczynników r_{iT} wywołanych działaniem temperatury t_0 , przyjmujemy układ podstawowy – ramę z zablokowanymi przemieszczeniami (rys. 16.11).



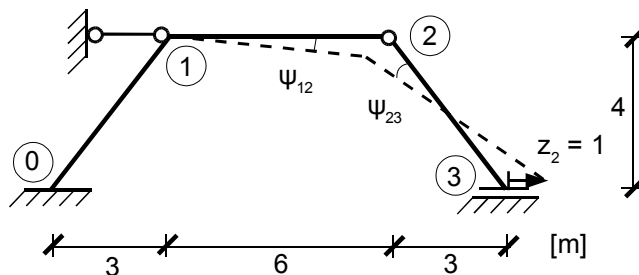
Rys. 16.11. Układ podstawowy

W celu wyznaczenia współczynników r_{ik} tworzymy wykresy momentów w poszczególnych stanach jednostkowych. Najpierw wywołany obrotem $z_1 = 1$:



Rys. 16.12. Stan $z_1 = 1$

Do wyznaczenia współczynników związanych z przesuwami posłużą nam łańcuchy kinematyczne zapisane oddzielnie dla z_2 i z_3 . W układzie z zablokowanym przesuwem z_3 dokonujemy przemieszczenia $z_2 = 1$.



Rys. 16.13. Kąty obrotu cięćw prętów wywołane jednostkowym przesuwem $z_2 = 1$

Z równań łańcucha wyznaczamy wartości kątów obrotu cięćw prętów:

$$01 \rightarrow \quad \psi_{01} \cdot 4 = 0 \quad \psi_{01} = 0$$

Zauważmy, że jeżeli węzeł 1 ma unieruchomiony przesuw poziomy, równanie łańcucha w poziomie możemy rozpocząć od tego węzła:

$$123 \rightarrow \quad \psi_{12} \cdot 0 - \psi_{23} \cdot 4 = 1 \quad \psi_{23} = -\frac{1}{4}$$

Natomiast przemieszczenie pionowe w węźle 1 jest nieznanne, dlatego:

$$0123 \downarrow \quad \psi_{01} \cdot 3 + \psi_{12} \cdot 6 + \psi_{23} \cdot 3 = 0 \quad \psi_{12} = \frac{1}{8}$$

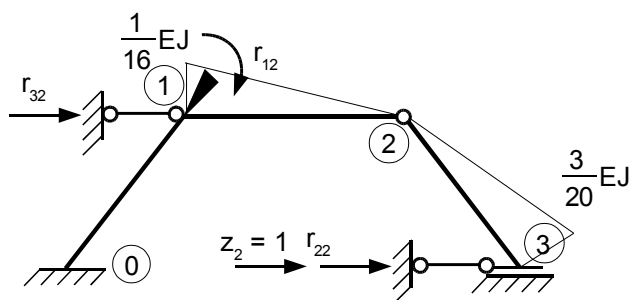
Następnie możemy obliczyć wartości momentów przywęzłowych podstawiając otrzymane wielkości do wzorów transformacyjnych:

$$M_{12}^{(z_2)} = \frac{3}{6} EJ \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{16} EJ$$

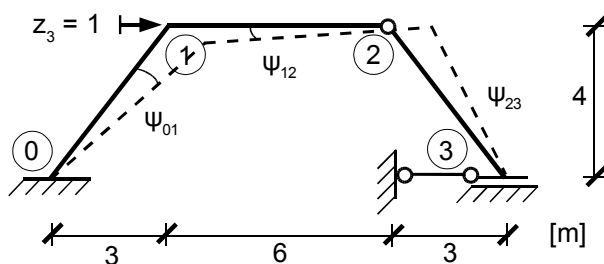
$$M_{32}^{(z_2)} = \frac{3}{5} EJ \cdot \left[-\left(-\frac{1}{4}\right)\right] = \frac{3}{20} EJ$$

$$M_{23}^{(z_2)} = M_{21}^{(z_2)} = M_{10}^{(z_2)} = M_{01}^{(z_2)} = 0$$

Obliczone wartości наносimy na wykres (rys. 16.14). W ten sposób otrzymaliśmy wykres w układzie podstawowym od pierwszego przesuwu ($z_1 = 1$).

Rys. 16.14. Stan $z_2 = 1$

Analogicznie tworzymy łańcuch kinematyczny od przesuwu $z_3 = 1$ (przesuw z_2 jest zablokowany).

Rys. 16.15. Kąty obrotu cięćw prętów wywołane jednostkowym przesuwem $z_3 = 1$

Z równań łańcucha wyznaczamy wartości kątów obrotu cięćw prętów:

$$01 \rightarrow \quad \psi_{01} \cdot 4 = 1 \quad \psi_{01} = \frac{1}{4}$$

Tym razem unieruchomiony jest węzeł 3.

$$0123 \rightarrow \quad \psi_{01} \cdot 4 + \psi_{12} \cdot 0 - \psi_{23} \cdot 4 = 0 \quad \psi_{23} = \frac{1}{4}$$

$$0123 \downarrow \quad \psi_{01} \cdot 3 + \psi_{12} \cdot 6 + \psi_{23} \cdot 3 = 0 \quad \psi_{12} = -\frac{1}{4}$$

Następnie możemy obliczyć wartości momentów przywęzłowych od jednostkowego przesuwu:

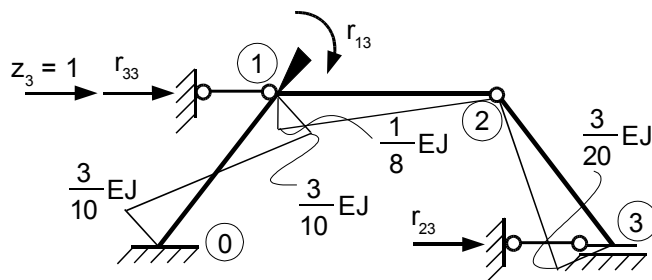
$$M_{01}^{(z_3)} = M_{10}^{(z_3)} = \frac{2}{5} EJ \cdot (-3) \cdot \frac{1}{4} = -\frac{3}{10} EJ$$

$$M_{12}^{(z_3)} = \frac{1}{2} EJ \cdot \left[-\left(-\frac{1}{4}\right) \right] = \frac{1}{8} EJ$$

$$M_{32}^{(z_3)} = \frac{3}{5} EJ \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{20} EJ$$

$$M_{23}^{(z_3)} = M_{21}^{(z_3)} = 0$$

Obliczone wartości tworzą wykres momentów zginających w stanie $z_3 = 1$.

Rys. 16.16. Stan $z_3 = 1$

Teraz wyznaczamy wartości współczynników r_{ik} :

- reakcje związane z obrotem z_1 wyznaczamy z równowagi węzła

$$r_{11} = \frac{4}{5} EJ + \frac{1}{2} EJ = \frac{13}{10} EJ \quad (16.15)$$

$$r_{12} = -\frac{1}{16} EJ \quad (16.16)$$

$$r_{13} = \frac{1}{8} EJ - \frac{3}{10} EJ = -\frac{7}{40} EJ \quad (16.17)$$

- reakcje związane z przesuwarem z_3 obliczamy z równania pracy wirtualnej wykorzystując kąty ψ z rysunku 16.15:

$$r_{33} \cdot \bar{1} + \left(-\frac{3}{10} EJ - \frac{3}{10} EJ \right) \cdot \frac{\bar{1}}{4} + \frac{1}{8} EJ \cdot \left(-\frac{\bar{1}}{4} \right) - \frac{3}{20} EJ \cdot \frac{\bar{1}}{4} = 0$$

$$r_{33} = \frac{7}{32} EJ \quad (16.18)$$

- reakcje związane z przesuwarem z_2 uzyskujemy także z równania pracy wirtualnej, ale po podstawieniu kątów ψ związanych z tym kierunkiem (rys. 16.13):

$$r_{31} \cdot \bar{1} + \left(\frac{2}{5} EJ + \frac{4}{5} EJ \right) \cdot \frac{\bar{1}}{4} + \frac{1}{2} EJ \cdot \left(-\frac{\bar{1}}{4} \right) = 0$$

$$r_{31} = -\frac{7}{40} EJ \quad (16.19)$$

$$r_{32} \cdot \bar{1} - \frac{1}{16} EJ \cdot \left(-\frac{\bar{1}}{4} \right) + \frac{3}{20} EJ \cdot \frac{\bar{1}}{4} = 0$$

$$r_{32} = -\frac{17}{320} EJ \quad (16.20)$$

$$r_{21} \cdot \bar{1} + \left(\frac{2}{5} EJ + \frac{4}{5} EJ \right) \cdot 0 + \frac{1}{2} EJ \cdot \frac{\bar{1}}{8} = 0$$

$$r_{21} = -\frac{1}{16} EJ \quad (16.21)$$

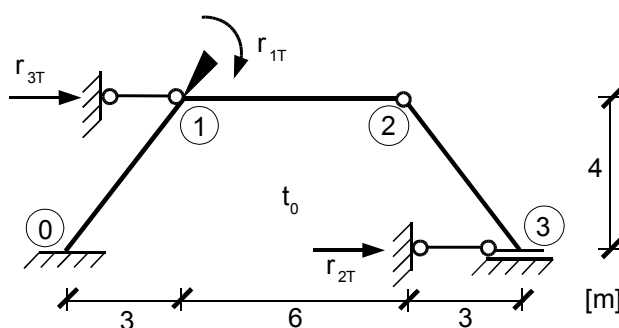
$$r_{22} \cdot \bar{1} - \frac{1}{16} EJ \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{20} EJ \cdot \left(-\frac{\bar{1}}{4}\right) = 0$$

$$r_{22} = \frac{29}{640} EJ \quad (16.22)$$

$$r_{23} \cdot \bar{1} + \left(-\frac{3}{10} EJ - \frac{3}{10} EJ\right) \cdot 0 + \frac{1}{8} EJ \cdot \frac{\bar{1}}{8} - \frac{3}{20} EJ \cdot \left(-\frac{\bar{1}}{4}\right) = 0$$

$$r_{23} = -\frac{17}{320} EJ \quad (16.23)$$

W dalszej kolejności wyznaczamy współczynniki r_{iT} , które są reakcjami powstającymi w układzie podstawowym, ogrzanym równomiernie temperaturą t_0 (rys. 16.17). W tym celu należy stworzyć wykres momentów w konstrukcji odkształconej na skutek działania temperatury.



Rys. 16.17. Stan T (równomierne ogrzanie temperaturą t_0)

W celu wyznaczenia kątów obrotów cięciw prętów, wywołanych działaniem temperatury t_0 , tworzymy łańcuch kinematyczny, uwzględniający wydłużenia prętów na wskutek równomiernego ogrzania konstrukcji:

$$01 \rightarrow \quad \psi_{01}^{(t)} \cdot 4 + \alpha_t \cdot t_0 \cdot 3 = 0 \quad \psi_{01}^{(t)} = -0,75 \alpha_t t_0$$

$$123 \rightarrow \quad 0 + \psi_{12}^{(t)} \cdot 0 + \alpha_t \cdot t_0 \cdot 6 - \psi_{23}^{(t)} \cdot 4 + \alpha_t \cdot t_0 \cdot 3 = 0 \quad \psi_{23}^{(t)} = 2,25 \alpha_t t_0$$

$$0123 \downarrow \quad \psi_{01}^{(t)} \cdot 3 - \alpha_t \cdot t_0 \cdot 4 + \psi_{12}^{(t)} \cdot 6 + \alpha_t \cdot t_0 \cdot 0 + \psi_{23}^{(t)} \cdot 3 + \alpha_t \cdot t_0 \cdot 4 = 0 \quad \psi_{12}^{(t)} = -0,75 \alpha_t t_0$$

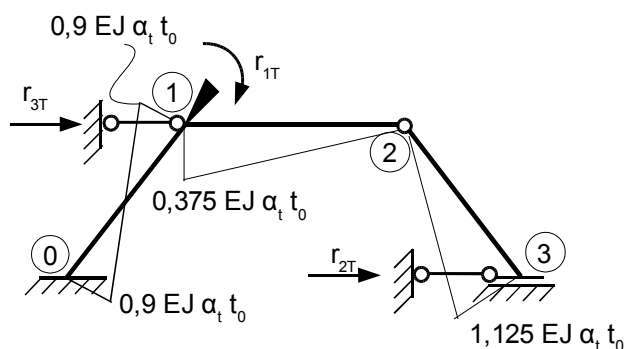
Dysponując kątami $\psi_{ik}^{(t)}$ możemy wyznaczyć wartości momentów zginających:

$$M_{01}^{(t_0)} = M_{10}^{(t_0)} = \frac{2}{5} EJ \cdot [-3 \cdot (-0,75 \alpha_t t_0)] = 0,9 EJ \alpha_t t_0$$

$$M_{12}^{(t_0)} = \frac{1}{2} EJ \cdot [-(-0,75 \alpha_t t_0)] = 0,375 EJ \alpha_t t_0$$

$$M_{32}^{(t_0)} = \frac{1}{2} EJ \cdot (-2,25 \alpha_t t_0) = -1,125 EJ \alpha_t t_0$$

a następnie narysować ich wykres. Jest to wykres momentów w układzie podstawowym od temperatury t_0 (rys. 16.18).



Rys. 16.18. Wykres momentów od równomiernego ogrzania w układzie podstawowym

Teraz możemy wyznaczyć reakcje powstałe przy równomiernym ogrzaniu ramy w układzie podstawowym:

- z równowagi węzła

$$r_{1T} = (0,9 + 0,375) EJ \alpha_t t_0 = 1,275 EJ \alpha_t t_0 \quad (16.24)$$

- z równania pracy wirtualnej reakcje po kierunku przesuwu 2 i 3, biorąc odpowiednie grupy kątów ψ (rys. 16.13 i rys. 16.15):

$$r_{2T} \cdot \bar{1} + (0,9 EJ \alpha_t t_0 + 0,9 EJ \alpha_t t_0) \cdot 0 + 0,375 EJ \alpha_t t_0 \cdot \frac{\bar{1}}{8} - 1,125 EJ \alpha_t t_0 \cdot \left(-\frac{\bar{1}}{4}\right) = 0$$

$$r_{2T} = -\frac{21}{64} EJ \alpha_t t_0 \quad (16.25)$$

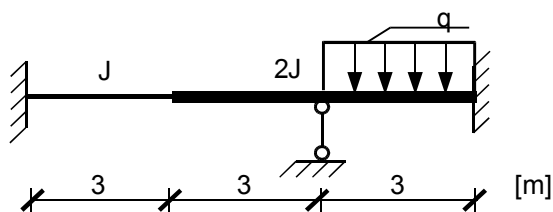
$$r_{3T} \cdot \bar{1} + (0,9 EJ \alpha_t t_0 + 0,9 EJ \alpha_t t_0) \cdot \frac{\bar{1}}{4} + 0,375 EJ \alpha_t t_0 \cdot \left(-\frac{\bar{1}}{4}\right) - 1,125 EJ \alpha_t t_0 \cdot \frac{\bar{1}}{4} = 0$$

$$r_{3T} = -\frac{3}{40} EJ \alpha_t t_0 \quad (16.26)$$

Wartości (16.15) do (16.26) są poszukiwanymi w zadaniu wielkościami. Aby wyznaczyć wykres momentów w układzie rzeczywistym (niewyznaczalnym) należałoby rozwiązać układ równań kanonicznych.

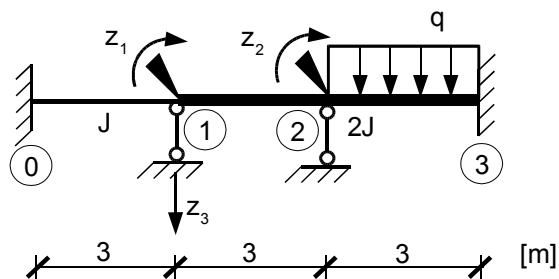
Zadanie 3

Dla belki o zadanych parametrach (rys. 16.19) wyznaczyć wartości współczynników r_{ik} i r_{iP} .



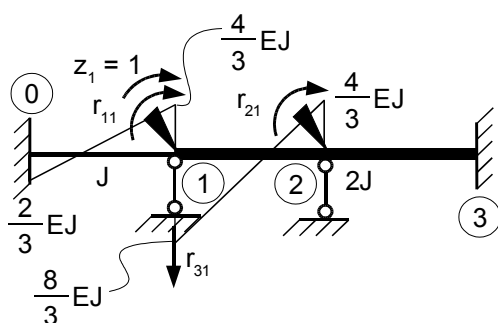
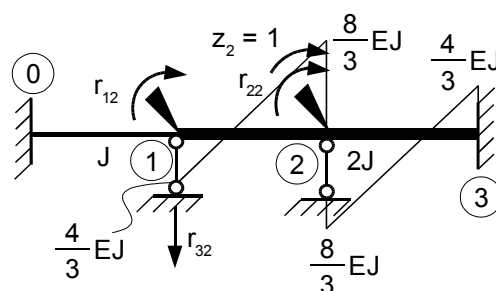
Rys. 16.19. Belka statycznie niewyznaczalna o zmiennej sztywności

Przyjmujemy układ podstawowy metody przemieszczeń. Połączenie różnych sztywności traktujemy jako dodatkowy węzeł wewnętrzny, którego swobodę przemieszczeń musimy zablokować. Układ jest zatem trzykrotnie geometrycznie niewyznaczalny.

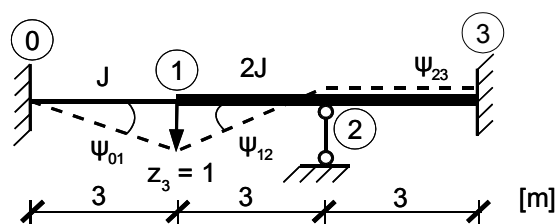


Rys. 16.20. Układ podstawowy

W pierwszej kolejności wyznaczmy współczynniki macierzy sztywności r_{ik} . Obliczamy wykresy momentów w poszczególnych stanach jednostkowych:

Rys. 16.21. Stan $z_1 = 1$ Rys. 16.22. Stan $z_2 = 1$

Do narysowania wykresu momentów związanych z przesuwem, podobnie jak w poprzednich przykładach, posłużymy się łańcuchem kinematycznym (rys. 16.23).

Rys. 16.23. Kąty obrotu cięćw prętów wywołane jednostkowym przesuwem $z_3 = 1$

Z równań łańcucha obliczamy wartości kątów obrotu cięćw prętów:

$$0 \downarrow \quad \psi_{01} \cdot 3 = 1 \quad \psi_{01} = \frac{1}{3}$$

$$012 \downarrow \quad \psi_{01} \cdot 3 + \psi_{12} \cdot 3 = 0 \quad \psi_{12} = -\frac{1}{3}$$

$$32 \downarrow \quad -\psi_{23} \cdot 3 = 0 \quad \psi_{23} = 0$$

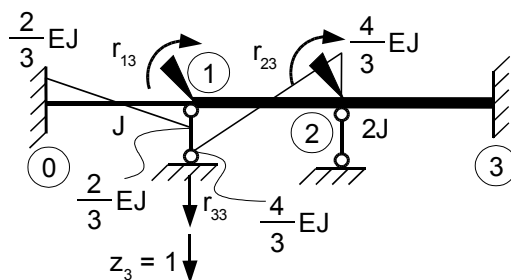
i na ich podstawie wyznaczamy wartości przywęzłowych momentów zginających powstałych od jednostkowego przesuwu:

$$M_{01}^{(z_3)} = M_{10}^{(z_3)} = \frac{2}{3} EJ \cdot \left(-3 \cdot \frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} EJ$$

$$M_{12}^{(z_3)} = M_{21}^{(z_3)} = \frac{2}{3} \cdot 2 EJ \cdot \left[-3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{4}{3} EJ$$

$$M_{23}^{(z_3)} = M_{32}^{(z_3)} = 0$$

Na koniec rysujemy wykres momentów wywołanych jednostkowym przesuwem $z_3 = 1$:



Rys. 16.24. Stan $z_3 = 1$

Z powyższych wykresów, zapisując równania równowagi w węzłach, możemy wyznaczyć wartości współczynników:

$$r_{11} = \frac{4}{3} EJ + \frac{8}{3} EJ = \frac{12}{3} EJ \quad (16.27)$$

$$r_{22} = \frac{8}{3} EJ + \frac{8}{3} EJ = \frac{16}{3} EJ \quad (16.28)$$

$$r_{12} = r_{21} = \frac{4}{3} EJ \quad (16.29)$$

$$r_{13} = \frac{4}{3} EJ - \frac{2}{3} EJ = \frac{2}{3} EJ \quad (16.30)$$

$$r_{23} = \frac{4}{3} EJ \quad (16.31)$$

Pozostałe współczynniki wyznaczmy wykorzystując równanie pracy wirtualnej:

$$r_{33} \cdot \bar{1} + \left(-\frac{2}{3} EJ - \frac{2}{3} EJ\right) \cdot \frac{\bar{1}}{3} + \left(\frac{4}{3} EJ + \frac{4}{3} EJ\right) \cdot \left(-\frac{\bar{1}}{3}\right) = 0$$

$$r_{33} = \frac{4}{3} EJ \quad (16.32)$$

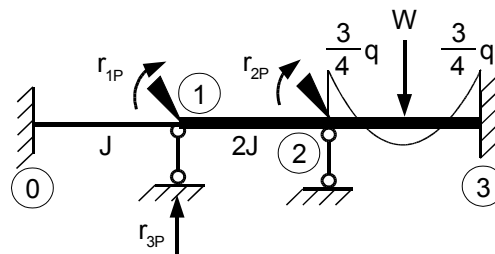
$$r_{31} \cdot \bar{1} + \left(\frac{2}{3} EJ + \frac{4}{3} EJ \right) \cdot \frac{\bar{1}}{3} + \left(\frac{8}{3} EJ + \frac{4}{3} EJ \right) \cdot \left(-\frac{\bar{1}}{3} \right) = 0$$

$$r_{31} = \frac{2}{3} EJ \quad (16.33)$$

$$r_{32} \cdot \bar{1} + \left(\frac{4}{3} EJ + \frac{8}{3} EJ \right) \cdot \left(-\frac{\bar{1}}{3} \right) + \left(\frac{8}{3} EJ + \frac{4}{3} EJ \right) \cdot 0 = 0$$

$$r_{32} = \frac{4}{3} EJ \quad (16.34)$$

Współczynniki r_{iP} znajdziemy tworząc wykres momentów od obciążenia zewnętrznego w układzie podstawowym:



Rys. 16.25. Stan P

Z równowagi węzłów 1 i 2 otrzymamy wartości współczynników r_{1P} i r_{2P} :

$$r_{1P} = 0 \quad (16.35)$$

$$r_{2P} = -\frac{3}{4} q \quad (16.36)$$

Aby wyznaczyć ostatni ze współczynników, potrzebna nam będzie wartość przemieszczenia pod siłą wypadkową z obciążenia ciągłego $W = q \cdot l$ (w środku rozpiętości przęsła 2-3). Wykorzystamy w tym celu równanie łańcucha kinematycznego, zapisanego od węzła 2 do punktu przyłożenia wypadkowej:

$$2W \downarrow \quad \psi_{23} \cdot l,5 = \delta_W \quad \delta_W = 0$$

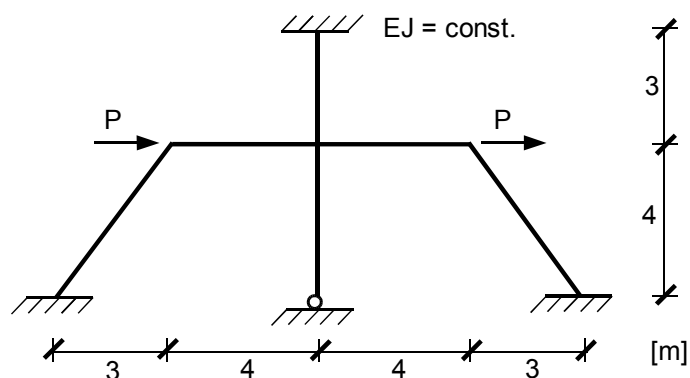
Wartość współczynnika r_{3P} wyznaczamy z równania pracy wirtualnej:

$$r_{3P} \cdot \bar{1} + \left(-\frac{3}{4} q + \frac{3}{4} q \right) \cdot 0 + 3q \cdot 0 = 0$$

$$r_{3P} = 0 \quad (16.37)$$

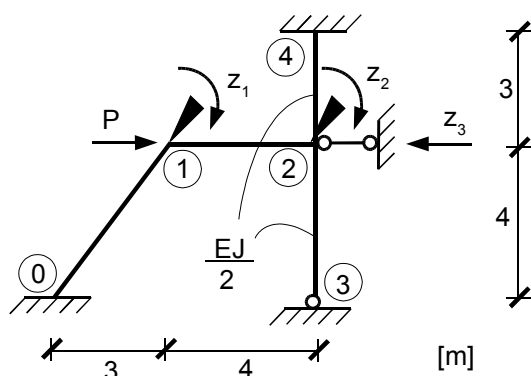
Zadanie 4

Korzystając z możliwych uproszczeń rozwiązać ramę z rys. 16.26.



Rys. 16.26. Rama statycznie niewyznaczalna

Schemat jest antysymetryczny. Dla porównania, rozwiązując zadaną ramę bez zastosowania uproszczeń $SKN = 4$, natomiast wykorzystując antysymetrię SKN takiego układu redukuje się o jeden stopień i wynosi $SKN = 3$. Przyjmijmy zatem układ podstawowy metody przemieszczeń (rys. 16.27) ograniczony do połowy ramy i zastosujmy antysymetrię rozwiązania. Pręty na osi symetrii mają sztywność zmniejszoną o połowę.

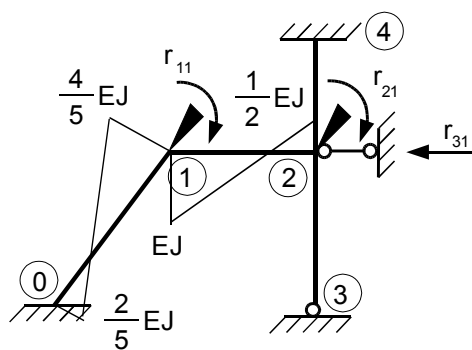
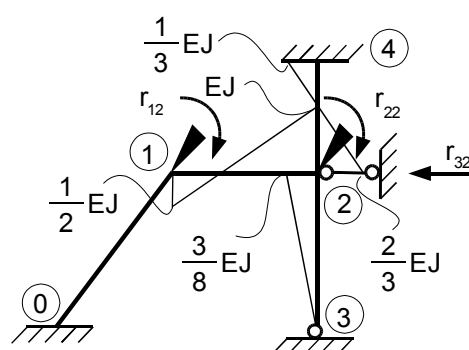


Rys. 16.27. Układ podstawowy

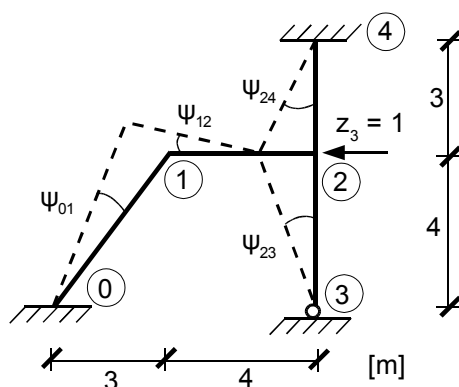
Związany z układem podstawowym, układ równań kanonicznych ogranicza się do trzech równań:

$$\begin{cases} r_{11}z_1 + r_{12}z_2 + r_{13}z_3 + r_{1P} = 0 \\ r_{21}z_1 + r_{22}z_2 + r_{23}z_3 + r_{2P} = 0 \\ r_{31}z_1 + r_{32}z_2 + r_{33}z_3 + r_{3P} = 0 \end{cases} \quad (16.38)$$

W celu wyznaczenia współczynników r_{ik} tworzymy wykresy momentów w poszczególnych stanach jednostkowych:

Rys. 16.28. Stan $z_1 = 1$ Rys. 16.29. Stan $z_2 = 1$

Aby wyznaczyć wartości współczynników związanych z przesuwnem po kierunku trzecim, tworzymy łańcuch kinematyczny.



Narzucając jednostkowy przesuwny po kierunku trzecim, zapisujemy równania łańcucha kinematycznego.

$$012 \rightarrow \quad \psi_{01} \cdot 4 + \psi_{12} \cdot 0 = -1 \quad \psi_{01} = -\frac{1}{4}$$

$$0123 \downarrow \quad \psi_{01} \cdot 3 + \psi_{12} \cdot 4 + \psi_{23} \cdot 0 = 0 \quad \psi_{12} = \frac{3}{16}$$

$$0123 \rightarrow \quad \psi_{01} \cdot 4 + \psi_{12} \cdot 0 - \psi_{23} \cdot 4 = 0 \quad \psi_{23} = -\frac{1}{4}$$

$$0124 \rightarrow \quad \psi_{01} \cdot 4 + \psi_{12} \cdot 0 + \psi_{24} \cdot 3 = 0 \quad \psi_{24} = \frac{1}{3}$$

Dysponując kątami obrotu cięćw prętów, wyznaczamy wartości przywęzłowych momentów zginających:

$$M_{01}^{(z_3)} = M_{10}^{(z_3)} = \frac{2}{5} EJ \cdot \left[-3 \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) \right] = \frac{3}{10} EJ$$

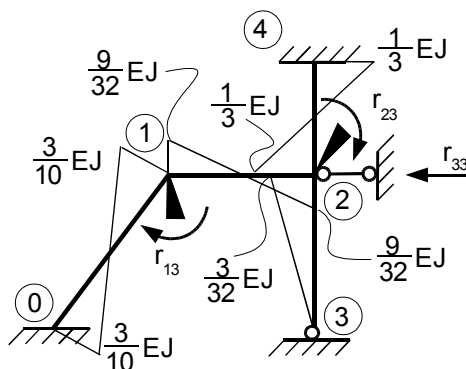
$$M_{12}^{(z_3)} = M_{21}^{(z_3)} = \frac{2}{4} EJ \cdot \left(-3 \cdot \frac{3}{16} \right) = -\frac{9}{32} EJ$$

$$M_{24}^{(z_3)} = M_{42}^{(z_3)} = \frac{2}{3} \frac{EJ}{2} \cdot \left(-3 \cdot \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{3} EJ$$

$$M_{23}^{(z_3)} = \frac{3}{4} \frac{EJ}{2} \cdot \left[- \left(- \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{3}{32} EJ$$

$$M_{32}^{(z_3)} = 0$$

i rysujemy wykres momentów wywołanych jednostkowym przesuwem $z_3 = 1$



Rys. 16.30. Stan $z_3 = 1$

Na podstawie wykresów jednostkowych (rys. 16.28, rys. 16.29, rys. 16.30) możemy wyznaczyć wartości współczynników r_{ik} :

- z równowagi w węzłach

$$r_{11} = \frac{4}{5} EJ + EJ = \frac{9}{5} EJ \quad (16.39)$$

$$r_{22} = \frac{2}{3} EJ + EJ + \frac{3}{8} EJ = \frac{49}{24} EJ \quad (16.40)$$

$$r_{12} = r_{21} = \frac{1}{2} EJ \quad (16.41)$$

$$r_{13} = \frac{3}{10} EJ - \frac{9}{32} EJ = \frac{3}{160} EJ \quad (16.42)$$

$$r_{23} = -\frac{9}{32} EJ - \frac{1}{3} EJ + \frac{3}{32} EJ = -\frac{25}{48} EJ \quad (16.43)$$

- z równania pracy wirtualnej

$$r_{33} \cdot \bar{1} + \left(\frac{3}{10} EJ + \frac{3}{10} EJ \right) \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) + \left(-\frac{9}{32} EJ - \frac{9}{32} EJ \right) \cdot \left(\frac{3}{16} \right) + \left(-\frac{EJ}{3} - \frac{EJ}{3} \right) \cdot \left(\frac{1}{3} \right) + \left(\frac{3}{32} EJ \right) \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) = 0$$

$$r_{33} = \frac{5773}{11520} EJ \quad (16.44)$$

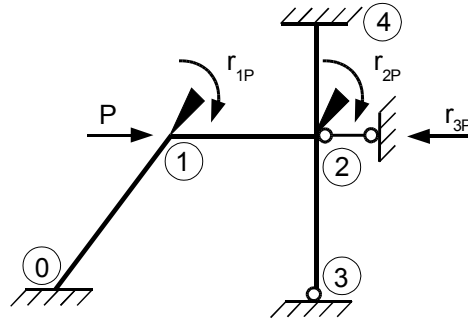
$$r_{31} \cdot \bar{1} + \left(\frac{2}{5} EJ + \frac{4}{5} EJ \right) \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) + \left(EJ + \frac{1}{2} EJ \right) \cdot \left(\frac{3}{16} \right) = 0$$

$$r_{31} = \frac{3}{160} EJ \quad (16.45)$$

$$r_{32} \cdot \bar{1} + \left(\frac{1}{2} EJ + EJ\right) \cdot \left(\frac{\bar{3}}{16}\right) + \left(\frac{1}{3} EJ + \frac{2}{3} EJ\right) \cdot \left(\frac{\bar{1}}{3}\right) + \left(\frac{3}{8} EJ\right) \cdot \left(-\frac{\bar{1}}{4}\right) = 0$$

$$r_{32} = -\frac{25}{48} EJ \quad (16.46)$$

W dalszej kolejności wyznaczamy składniki wektora wyrazów wolnych, zależne od obciążenia zewnętrznego, w naszym przypadku od siły skupionej P .



Rys. 16.31. Stan P

Wprost z wykresu (rys. 16.31) odczytujemy:

$$r_{1P} = 0 \quad (16.47)$$

$$r_{2P} = 0 \quad (16.48)$$

Następnie z łańcucha kinematycznego wyznaczamy wielkość przemieszczenia po kierunku działania siły P :

$$01 \rightarrow \quad \psi_{01} \cdot 4 = \delta_P \quad \delta_P = -1$$

Z równania pracy wirtualnej wyznaczamy wartość współczynnika r_{3P} :

$$r_{3P} \cdot \bar{1} + P \cdot \delta_P = 0$$

$$r_{3P} = P \quad (16.49)$$

Po wyznaczeniu współczynników r_{ik} i r_{iP} , wstawiamy je do układu równań kanonicznych i wyznaczamy wartości rzeczywistych przemieszczeń:

$$\begin{cases} \frac{9}{5} \cdot EJ \cdot z_1 + \frac{1}{2} \cdot EJ \cdot z_2 + \frac{3}{160} \cdot EJ \cdot z_3 + 0 = 0 \\ \frac{1}{2} \cdot EJ \cdot z_1 + \frac{49}{24} \cdot EJ \cdot z_2 - \frac{25}{48} \cdot EJ \cdot z_3 + 0 = 0 \\ \frac{3}{160} \cdot EJ \cdot z_1 - \frac{25}{48} \cdot EJ \cdot z_2 + \frac{5773}{11520} \cdot EJ \cdot z_3 + P = 0 \end{cases} \quad (16.50)$$

Zakładając, że rama wykonana jest ze stalowych kształtowników I220, których sztywność wynosi $EJ = 6426 \text{ kNm}^2$, natomiast działająca siła skupiona $P = 50 \text{ kN}$, możemy wyznaczyć wartości szukanych przemieszczeń.

$$\begin{cases} 11566,8 \cdot z_1 + 3213 \cdot z_2 + 120,4875 \cdot z_3 = 0 \\ 3213 \cdot z_1 + 13119,75 \cdot z_2 - 3346,875 \cdot z_3 = 0 \\ 120,4875 \cdot z_1 - 3346,875 \cdot z_2 + 3220,25 \cdot z_3 = -50 \end{cases} \quad (16.51)$$

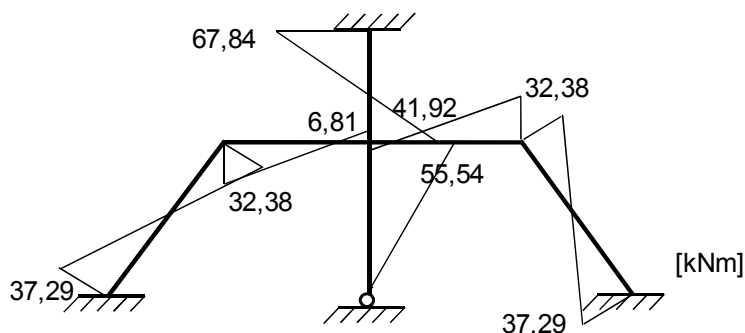
Po rozwiązaniu powyższego układu równań otrzymujemy:

$$\begin{cases} z_1 = 0,001909 [\text{rad}] \\ z_2 = -0,006051 [\text{rad}] \\ z_3 = -0,021887 [\text{m}] \end{cases} \quad (16.52)$$

Znając wartości przemieszczeń węzłów, wykorzystując wzory transformacyjne, możemy wyznaczyć rzeczywiste wartości przywęzłowych momentów zginających.

$$\begin{aligned} M_{01} &= \frac{2}{5} EJ \cdot \left[2 \cdot 0 + 0,001909 - 3 \cdot \left(-\frac{0,021887}{4} \right) \right] = -37,29 \text{ kNm} \\ M_{10} &= \frac{2}{5} EJ \cdot \left[0 + 2 \cdot 0,001909 - 3 \cdot \left(-\frac{0,021887}{4} \right) \right] = -32,38 \text{ kNm} \\ M_{12} &= \frac{2}{4} EJ \cdot \left[2 \cdot 0,001909 + (-0,006051) - 3 \cdot \frac{3}{16} (-0,021887) \right] = 32,38 \text{ kNm} \\ M_{21} &= \frac{2}{4} EJ \cdot \left[0,001909 + 2 \cdot (-0,006051) - 3 \cdot \frac{3}{16} (-0,021887) \right] = 6,81 \text{ kNm} \\ M_{23} &= \frac{3}{4} \frac{EJ}{2} \cdot \left[(-0,006051) - \left(-\frac{0,021887}{4} \right) \right] = -27,77 \text{ kNm} \\ M_{32} &= 0 \\ M_{24} &= \frac{2}{3} \frac{EJ}{2} \cdot \left[2 \cdot (-0,006051) + 0 - 3 \cdot \frac{-0,021887}{3} \right] = 20,96 \text{ kNm} \\ M_{42} &= \frac{2}{3} \frac{EJ}{2} \cdot \left[(-0,006051) + 2 \cdot 0 - 3 \cdot \frac{-0,021887}{3} \right] = 33,92 \text{ kNm} \end{aligned}$$

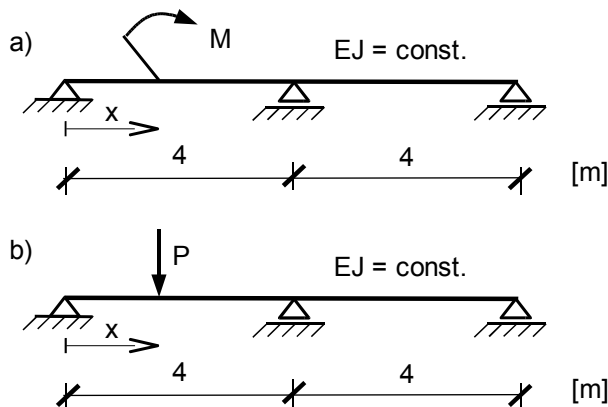
Jako, że rozwiązując ramę skorzystaliśmy z uproszczenia, rozwiązaliśmy połowę ramy, całkowity wykres momentów będzie antysymetryczny względem osi symetrii układu (rys. 16.32).



Rys. 16.32. Wykres momentów zginających w układzie niewyznaczalnym

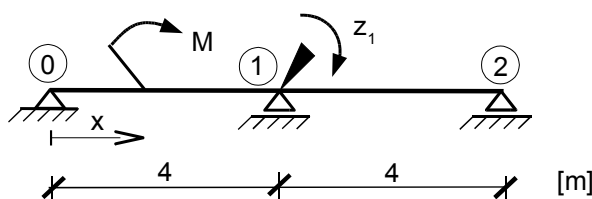
Zadanie 5

Dla belek o zadanej geometrii i obciążeniu (rys. 16.33 a) i b)) wyznaczyć linie wpływu kąta obrotu przekroju przy podporze środkowej.



Rys. 16.33. Belki obciążone poruszającymi się a) momentem, b) siłą

a) Wyznamy linię wpływu kąta obrotu przy podporze 1 od poruszającego się momentu skupionego. Przyjmujemy układ podstawowy:

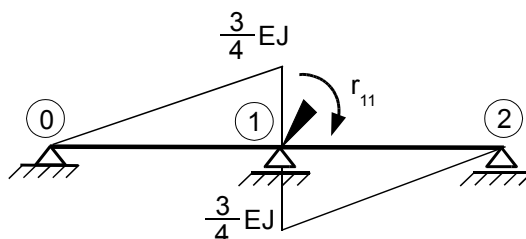


Rys. 16.34. Układ podstawowy

oraz warunki zapewniające zgodność statyczną z układem początkowym. Ponieważ belka ta jest jednokrotnie kinematycznie niewyznaczalna ($SKN = 1$), będzie to tylko jedno równanie:

$$r_i = r_{i1} \cdot z_1(x) + r_{iP}(x) = 0 \quad (16.53)$$

Do wyznaczenia współczynnika r_{i1} potrzebny nam będzie wykres momentów w stanie $z_1 = 1$:



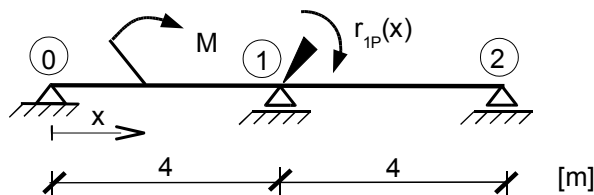
Rys. 16.35. Stan $z_1 = 1$

Zapisując równanie równowagi momentów w węźle I otrzymamy wartość r_{11} :

$$r_{11} = \frac{3}{4} EJ + \frac{3}{4} EJ = \frac{3}{2} EJ \quad (16.54)$$

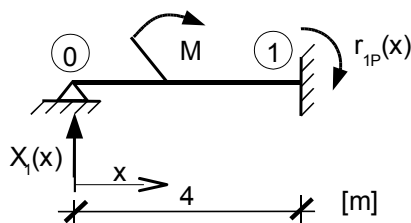
Do wyznaczenia współczynnika $r_{1P}(x)$ potrzebny nam będzie wykres momentów od obciążenia zewnętrznego. Ponieważ tutaj obciążeniem zewnętrznym jest poruszający się moment, stan P rozdzielimy na dwa przypadki:

- $x \in (0, 4)$ - moment M porusza się po przęśle $0-I$:



Rys. 16.36. Stan P ($x \in (0, 4)$)

Aby znaleźć wykres momentów na przęśle $0-I$ wykorzystamy metodę sił. Za niewiadomą X_1 przyjmijmy pionową reakcję w podporze 0 .



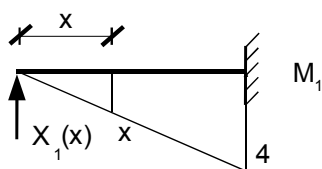
Zauważmy, że reakcja $r_{1P}(x)$ jest w tym przypadku momentem w utwierdzeniu w węźle I , zatem wyznaczmy ją zapisując równanie sumy momentów względem węzła I :

$$\sum M_I: \quad r_{1P}(x) = -M - X_1(x) \cdot 4 \quad (16.55)$$

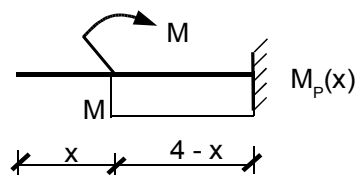
Niewiadomą $X_1(x)$ wyznaczmy z równania:

$$\delta_{11} \cdot X_1(x) + \delta_{1P}(x) = 0 \quad (16.56)$$

Do obliczenia współczynników δ_{11} i $\delta_{1P}(x)$ posłużą nam wykresy w poszczególnych stanach:



Rys. 16.37. Stan $X_1 = 1$



Rys. 16.38. Stan P

Korzystając z twierdzenia Wereszczagina-Mohra możemy napisać:

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 M_1}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \frac{64}{3} \cdot \frac{1}{EJ} \quad (16.57)$$

$$\begin{aligned} \delta_{1P}(x) &= \int \frac{M_1 M_P(x)}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot x \cdot (4-x) \cdot M + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (4-x) \cdot M \right] = \frac{1}{EJ} \cdot \left[(4-x) \cdot M \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot x \right) \right] = \\ &= \frac{1}{EJ} \cdot M \cdot \left(8 - \frac{x^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (16.58)$$

a następnie obliczyć niewiadomą $X_1(x)$:

$$X_1(x) = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{\frac{1}{EJ} \cdot M \cdot \left(\frac{x^2}{2} - 8 \right)}{\frac{64}{3} \cdot \frac{1}{EJ}} = \frac{3}{128} \cdot M \cdot (x^2 - 16) \quad (16.59)$$

Podstawiając wartość nadliczbowej reakcji $X_1(x)$ do równania (16.55) możemy wyznaczyć wartość $r_{1P}(x)$:

$$r_{1P}(x) = -4 \cdot \frac{3}{128} \cdot M \cdot (x^2 - 16) - M = \frac{M}{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{16} \cdot x^2 \right) \quad (16.60)$$

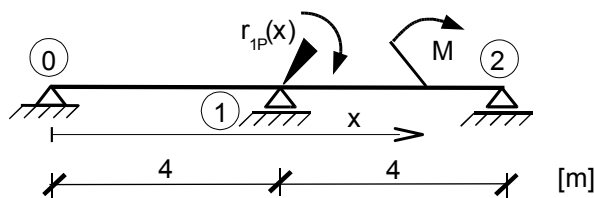
Otrzymane współczynniki (16.54 i 16.60) podstawiamy do równania kanonicznego (16.53) i wyznaczymy linię wpływu kąta obrotu przy podporze 1 od momentu zginającego znajdującego się na przęśle 0-1.

$$z_1(x) = -\frac{r_{1P}(x)}{r_{11}} = -\frac{\frac{M}{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{16} \cdot x^2 \right)}{\frac{3}{2} EJ} \quad (16.61)$$

po uproszczeniu:

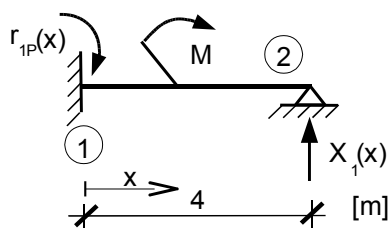
$$l_w \varphi_{0-1}(M) = z_1(x) = \frac{M}{3 \cdot EJ} \cdot \left(\frac{3}{16} \cdot x^2 - 1 \right) = \frac{M}{48 \cdot EJ} \cdot (3 \cdot x^2 - 16) \quad (16.62)$$

- $x \in (4, 8)$ - moment M porusza się po przęśle 1-2:



Rys. 16.40. Stan P ($x \in (4, 8)$)

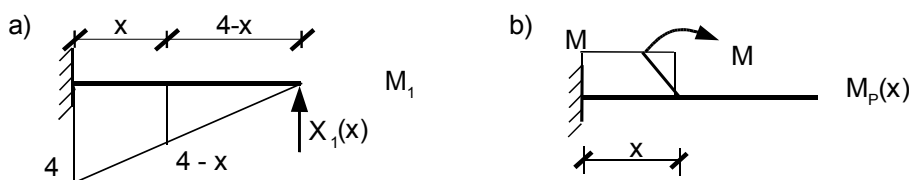
Podobnie jak poprzednio, do dalszych obliczeń wykorzystamy metodę sił i twierdzenie Wereszczagina-Mohra, z tą różnicą, że teraz utwierdzenie jest na lewym końcu pręta, a przegub na prawym:



Reakcja $r_{1P}(x)$ jest momentem w utwierdzeniu w węźle 1, zatem wyznaczmy ją zapisując równanie sumy momentów względem węzła 1:

$$\sum M_I: \quad r_{1P}(x) = -M + X_1(x) \cdot 4 \quad (16.63)$$

Niewiadomą $X_1(x)$ wyznaczmy z równania (16.56). Do obliczenia współczynników δ_{11} i $\delta_{1P}(x)$ posłużą nam wykresy w poszczególnych stanach:



Rys. 16.41. Stan a) $X_1 = 1$, b) P

Korzystając z twierdzenia Wereszczagina-Mohra możemy obliczyć współczynniki

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 M_1}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \frac{64}{3} \cdot \frac{1}{EJ} \quad (16.64)$$

$$\delta_{1P}(x) = \int \frac{M_1 M_P(x)}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \cdot \left[-x \cdot M \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot (4-x) \right) \right] = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{M}{2} \cdot (x^2 - 8x) \quad (16.65)$$

a następnie wyznaczyć niewiadomą $X_1(x)$:

$$X_1(x) = -\frac{\delta_{1P}(x)}{\delta_{11}} = -\frac{\frac{1}{EJ} \cdot \frac{M}{2} \cdot (x^2 - 8x)}{\frac{64}{3} \cdot \frac{1}{EJ}} = \frac{3}{128} \cdot M \cdot (8x - x^2) \quad (16.66)$$

Podstawiając wartość nadliczbowej reakcji $X_1(x)$ do równania (16.63) możemy wyznaczyć wartość $r_{1P}(x)$:

$$r_{1P}(x) = \frac{3}{32} \cdot M \cdot (8x - x^2) - M = M \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot x - \frac{3}{32} \cdot x^2 - 1 \right) \quad (16.67)$$

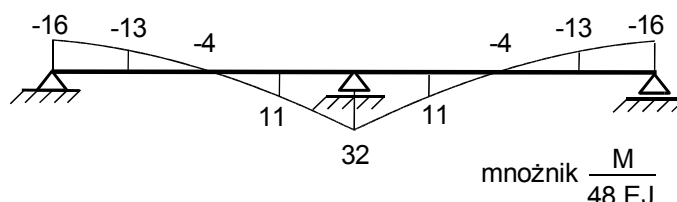
Znając współczynniki równania kanonicznego (16.53) wyznaczamy linię wpływu kąta obrotu przy podporze 1 od momentu zginającego znajdującego się na przęśle 1-2.

$$z_I(x) = -\frac{r_{IP}(x)}{r_{II}} = -\frac{M \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot x - \frac{3}{32} \cdot x^2 - 1 \right)}{\frac{3}{2} EJ} \quad (16.68)$$

i dalej

$$lw \varphi_{I-2}(M) = z_I(x) = \frac{2 \cdot M}{3 \cdot EJ} \cdot \left(\frac{3}{32} \cdot x^2 - \frac{3}{4} \cdot x + 1 \right) = \frac{M}{48 \cdot EJ} \cdot (3 \cdot x^2 - 24 \cdot x + 32) \quad (16.69)$$

Na podstawie równań (16.62) i (16.69) możemy narysować linię wpływu kąta obrotu przekroju przy podporze środkowej. Zauważmy, że ze względu na antysymetrię obciążenia (moment M działa na obu przęsłach z różnymi znakami) i antysymetrię wyniku (kąt φ), w efekcie otrzymujemy wynik symetryczny, widoczny na wykresie.

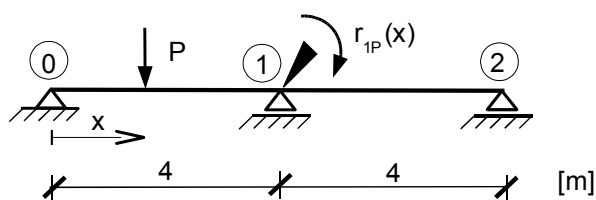


Rys. 16.42. Linia wpływu $LW \varphi_I(M)$

b) Ten przykład różni się od poprzedniego jedynie rodzajem obciążenia, a jak wiemy układ podstawowy i macierz sztywności nie zależą od obciążenia, dlatego tutaj posłużymy się tym samym układem podstawowym i macierzą sztywności. Różny będzie jedynie stan P i jemu przyjrzymy się dokładniej.

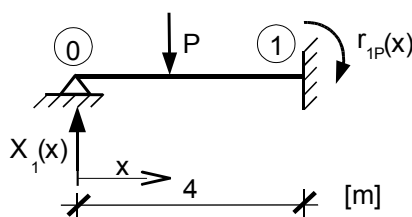
Podobnie jak poprzednio podzielimy belkę na dwie części i rozpatrzmy je osobno:

- $x \in (0, 4)$ - siła porusza się po przęśle 0-1:



Rys. 16.43. Stan P ($x \in (0, 4)$)

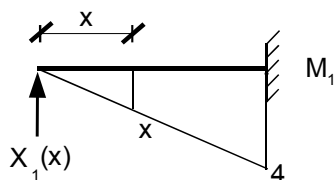
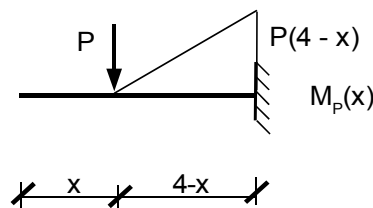
Aby znaleźć wykres momentów na przęśle 0-1 wykorzystamy metodę sił. Za niewiadomą $X_1(x)$ przyjmijmy pionową reakcję w podporze 0.



Reakcja $r_{1P}(x)$ jest w tym przypadku również momentem w utwierdzeniu w węźle I , zatem wyznaczmy ją zapisując równanie sumy momentów względem węzła I :

$$\sum M_I: \quad r_{1P}(x) = P \cdot (4-x) - X_I(x) \cdot 4 \quad (16.70)$$

Niewiadomą $X_I(x)$ wyznaczmy z równania kanonicznego (16.56). Do obliczenia współczynników δ_{11} i $\delta_{1P}(x)$ posłużą nam wykresy w poszczególnych stanach:

Rys. 16.44. Stan $X_I = 1$ Rys. 16.45. Stan P

Korzystając z twierdzenia Wereszczagina-Mohra możemy napisać:

$$\delta_{11} = \int \frac{M_I M_I}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \frac{64}{3} \cdot \frac{1}{EJ} \quad (16.71)$$

$$\delta_{1P}(x) = \int \frac{M_I M_P(x)}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot (4-x) \cdot P \cdot (4-x) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot x \right) \right] = \frac{P}{3 \cdot EJ} \cdot \left[-\frac{x^3}{2} + 24 \cdot x - 64 \right] \quad (16.72)$$

a następnie obliczyć niewiadomą $X_I(x)$ z równania (16.56).

$$X_I(x) = -\frac{\delta_{1P}(x)}{\delta_{11}} = -\frac{\frac{P}{3 \cdot EJ} \cdot \left[-\frac{x^3}{2} + 24 \cdot x - 64 \right]}{\frac{64}{3} \cdot \frac{1}{EJ}} = \frac{P}{64} \cdot \left[\frac{x^3}{2} - 24 \cdot x + 64 \right] \quad (16.73)$$

Znając wartość nadliczbowej reakcji $X_I(x)$ możemy wyznaczyć wartość $r_{1P}(x)$ z równania (16.70):

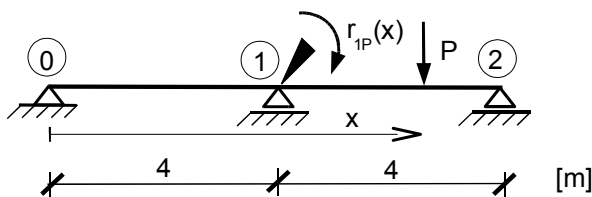
$$r_{1P}(x) = P \cdot (4-x) - 4 \cdot \frac{P}{64} \cdot \left[\frac{x^3}{2} - 24 \cdot x + 64 \right] = P \left[4-x - \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{x^3}{2} - 24 \cdot x + 64 \right) \right] \quad (16.74)$$

Linie wpływu kąta obrotu przy podporze I od siły skupionej znajdującej się na przęśle $0-I$ wyznaczamy z wzoru (16.53).

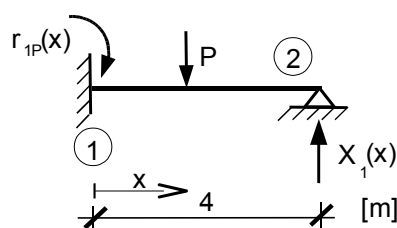
$$z_I(x) = -\frac{r_{1P}(x)}{r_{11}} = -\frac{P \left[4-x - \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{x^3}{2} - 24 \cdot x + 64 \right) \right]}{\frac{3}{2} \cdot EJ} \quad (16.75)$$

$$Iw\varphi_{0-I}(P) = z_I(x) = \frac{P}{3 \cdot EJ} \cdot \left(\frac{1}{16} \cdot x^3 - x \right) = \frac{P}{48 \cdot EJ} \cdot (x^3 - 16 \cdot x) \quad (16.76)$$

- $x \in (4, 8)$ - siła porusza się po przęśle I-2:

Rys. 16.46. Stan $P (x \in (4, 8))$

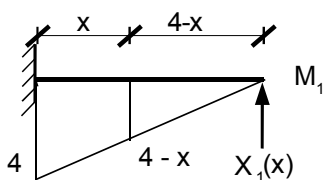
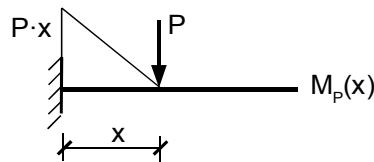
Podobnie jak poprzednio, do dalszych obliczeń wykorzystamy metodę sił i twierdzenie Wereszczagina-Mohra, z tą różnicą, że teraz utwierdzenie jest na lewym końcu pręta, a przegub na prawym:



Reakcja $r_{1P}(x)$ jest w tym przypadku momentem w utwierdzeniu w węźle I, zatem wyznaczmy ją zapisując równanie sumy momentów względem węzła I:

$$\sum M_I: \quad r_{1P}(x) = -P \cdot x + X_1(x) \cdot 4 \quad (16.77)$$

Niewiadomą $X_1(x)$ wyznaczmy z równania (16.56), którego współczynniki δ_{11} i $\delta_{1P}(x)$ obliczymy na podstawie wykresów momentów w poszczególnych stanach:

Rys. 16.47. Stan $X_1 = 1$ Rys. 16.48. Stan P

Korzystając z twierdzenia Wereszczagina-Mohra możemy napisać:

$$\delta_{11} = \int \frac{M_I M_I}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \frac{64}{3} \cdot \frac{1}{EJ} \quad (16.78)$$

$$\delta_{1P}(x) = \int \frac{M_I M_P(x)}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot x \cdot P \cdot x \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot (4-x) \right) \right] = \frac{P}{3 \cdot EJ} \cdot \left[\frac{x^3}{2} - 6x^2 \right] \quad (16.79)$$

a następnie obliczyć niewiadomą $X_1(x)$ z równania kanonicznego (16.56).

$$X_I(x) = -\frac{\delta_{IP}(x)}{\delta_{II}} = -\frac{\frac{P}{3 \cdot EJ} \cdot \left[\frac{x^3}{2} - 6 \cdot x^2 \right]}{\frac{64}{3} \cdot \frac{l}{EJ}} = \frac{P}{64} \cdot \left[6x^2 - \frac{x^3}{2} \right] \quad (16.80)$$

Znając wartość nadliczbowej reakcji $X_I(x)$ możemy wyznaczyć wartość $r_{IP}(x)$ z równania (16.77):

$$r_{IP}(x) = -P \cdot x + 4 \cdot \frac{P}{64} \cdot \left[6x^2 - \frac{x^3}{2} \right] = P \cdot \left[\frac{3}{8} \cdot x^2 - \frac{x^3}{32} - x \right] \quad (16.81)$$

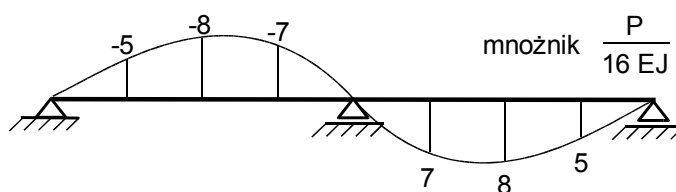
Linie wpływu kąta obrotu przy podporze 1 od siły skupionej znajdującej się na przęśle 1-2 wyznaczamy z wzoru (16.53).

$$z_I(x) = -\frac{r_{IP}(x)}{r_{II}} = -\frac{P \cdot \left[\frac{3}{8} \cdot x^2 - \frac{x^3}{32} - x \right]}{\frac{3}{2} EJ} \quad (16.82)$$

I dalej

$$lw \varphi_{1-2}(P) = z_I(x) = \frac{2 \cdot P}{3 \cdot EJ} \cdot \left[\frac{x^3}{32} - \frac{3}{8} \cdot x^2 + x \right] = \frac{P}{48 \cdot EJ} \cdot [x^3 - 12 \cdot x^2 + 32 \cdot x] \quad (16.83)$$

Na podstawie równań (16.76) i (16.83) możemy narysować linię wpływu kąta obrotu przekroju przy podporze środkowej. Tym razem, ze względu na symetryczne obciążenie i antysymetryczny wynik (kąt φ), otrzymamy ostatecznie wykres antysymetryczny.



Rys. 16.49. Linia wpływu $LW \varphi_1(P)$

Zadanie 6

Wyznaczyć wartości momentów przywęzłowych M_{ik} i M_{ki} dla belki sprężystie podpartej wywołanych obrotem podpory w węźle i (rys. 16.50).



Rys. 16.50. Belka statycznie niewyznaczalna sprężystie podparta

Zadanie rozwiążemy korzystając z zasady superpozycji.

$$M_{ik} = M_{ik}' + M_{ik}''(\varphi_i', \varphi_k') \quad (16.84)$$

$$M_{ki} = M_{ki}' + M_{ki}''(\varphi_i', \varphi_k') \quad (16.85)$$

Momenty M_{ik}' i M_{ki}' wyznaczone są dla belki o podporach niepodatnych i wynoszą:

$$M_{ik}' = \frac{EJ}{l} \cdot \varphi_i \quad (16.86)$$

$$M_{ki}' = \frac{EJ}{l} \cdot (-\varphi_i) \quad (16.87)$$

Wyznaczając wartości dodatkowych momentów spowodowanych obecnością podpór sprężystych, należy uwzględnić kąty obrotu φ_i' i φ_k' podpór podatnych

$$M_{ik}'' = \frac{EJ}{l} \cdot (\varphi_i' - \varphi_k') \quad (16.88)$$

$$M_{ki}'' = \frac{EJ}{l} \cdot (-\varphi_i' + \varphi_k') \quad (16.89)$$

które są zależne od wartości momentów węzłowych i sztywności podpór χ_i :

$$\varphi_i' = -\frac{M_{ik}}{\chi_1} \quad (16.90)$$

$$\varphi_k' = -\frac{M_{ki}}{\chi_2} \quad (16.91)$$

Po zsumowaniu (16.86) i (16.88) oraz (16.87) i (16.89), zgodnie z zasadą superpozycji, otrzymamy:

$$M_{ik} = \frac{EJ}{l} \cdot \varphi_i + \frac{EJ}{l} \cdot (\varphi_i' - \varphi_k') \quad (16.92)$$

$$M_{ki} = \frac{EJ}{l} \cdot (-\varphi_i) + \frac{EJ}{l} \cdot (-\varphi_i' + \varphi_k') \quad (16.93)$$

Żeby wyznaczyć zależność pomiędzy M_{ik} i M_{ki} dodajemy do siebie równania (16.92) i (16.93)

$$M_{ik} + M_{ki} = \frac{EJ}{l} \cdot \varphi_i + \frac{EJ}{l} \cdot (\varphi_i' - \varphi_k') + \frac{EJ}{l} \cdot (-\varphi_i) + \frac{EJ}{l} \cdot (-\varphi_i' + \varphi_k') = 0$$

$$M_{ik} = -M_{ki} \quad (16.94)$$

Powróćmy teraz do zależności na M_{ik} (16.92), gdzie za φ_i' i φ_k' wstawiamy (16.90) i (16.91)

$$M_{ik} = \frac{EJ}{l} \cdot \varphi_i + \frac{EJ}{l} \cdot \left(-\frac{M_{ik}}{\chi_1} + \frac{M_{ki}}{\chi_2} \right) \quad (16.95)$$

Następnie dokonujemy podstawienia

$$K_1' = \frac{\chi_1 l}{EJ}$$

$$K_2' = \frac{\chi_2 l}{EJ}$$

które prowadzi do następującej postaci wzoru na M_{ik}

$$M_{ik} = \frac{EJ}{l} \cdot \varphi_i - \frac{M_{ik}}{K_1} + \frac{M_{ki}}{K_2}$$

Po przekształceniach oraz podstawieniu zależności (16.94)

$$M_{ik} + \frac{M_{ik}}{K_1} - \frac{M_{ki}}{K_2} = \frac{EJ}{l} \cdot \varphi_i$$

$$M_{ik} \left(1 + \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right) = \frac{EJ}{l} \cdot \varphi_i$$

$$M_{ik} \left(\frac{K_1 K_2 + K_1 + K_2}{K_1 K_2} \right) = \frac{EJ}{l} \cdot \varphi_i$$

otrzymujemy ogólny wzór

$$M_{ik} = \frac{EJ}{l} \varphi_i \frac{K_1 K_2}{K_1 K_2 + K_1 + K_2} \quad (16.96)$$

Na podstawie (16.94) możemy zapisać

$$M_{ki} = -M_{ik} = -\frac{EJ}{l} \varphi_i \frac{K_1 K_2}{K_1 K_2 + K_1 + K_2} \quad (16.97)$$

Jeżeli przyjmiemy założenia, że

$$\varphi_i = 1$$

$$K_1 = K_2 = K$$

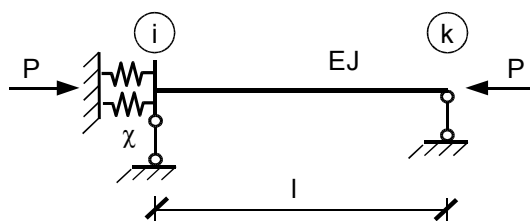
dostajemy szczególne, prostsze postacie wzorów (16.96) i (16.97)

$$M_{ik} = \frac{EJ}{l} \frac{K}{K+2}$$

$$M_{ki} = -\frac{EJ}{l} \frac{K}{K+2}$$

Zadanie 7

Wyznaczyć wartość siły krytycznej $P = P_{kr}$ oraz wzory transformacyjne dla belki obciążonej siłami ściskającymi (rys. 16.51).



Rys. 16.51. Belka statycznie niewyznaczalna

Dla wyznaczenia siły krytycznej zapiszmy najpierw warunki brzegowe obejmujące przemieszczenia i siły (warunki kinematyczne i statyczne).

$$\begin{aligned} w(x=0) &= 0 \\ w(x=l) &= 0 \\ \varphi(x=0) &= \varphi_i' \\ M(x=l) &= 0 \end{aligned} \quad (16.98)$$

Warunki te są zerowe poza warunkiem na kąt obrotu podpory i (φ_i'), jest różny od zera z uwagi na podatności podpory

$$\varphi_i' = -\frac{M_{ik}}{\chi} \quad (16.99)$$

Przypomnijmy postacie znanych już równań (9.5), (9.6) i (9.7), spełniających równanie różniczkowe

$$w(x) = C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot \sin \lambda x + C_3 \cdot \cos \lambda x \quad (16.100)$$

$$\varphi(x) = \frac{dw(x)}{dx} = C_1 + \lambda \cdot C_2 \cdot \cos \lambda x - \lambda \cdot C_3 \cdot \sin \lambda x \quad (16.101)$$

$$M(x) = -\frac{d^2 w}{dx^2} EJ = EJ [\lambda^2 \cdot C_2 \cdot \sin \lambda x + \lambda^2 \cdot C_3 \cdot \cos \lambda x] \quad (16.102)$$

Na podstawie zależności (16.102) możemy wyznaczyć wartość przywęzłowego momentu M_{ik} ,

$$M_{ik} = M(x=0) = EJ [\lambda^2 \cdot C_2 \cdot \sin \lambda 0 + \lambda^2 \cdot C_3 \cdot \cos \lambda 0]$$

$$M_{ik} = M(x=0) = EJ \lambda^2 \cdot C_3$$

którą następnie podstawiamy do (16.99)

$$\varphi_i' = -\frac{EJ \lambda^2 \cdot C_3}{\chi} \quad (16.103)$$

Teraz możemy utworzyć układ równań opisujący warunki brzegowe

$$\begin{cases} C_0 + C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot \sin \lambda 0 + C_3 \cdot \cos \lambda 0 = 0 \Rightarrow C_0 + C_3 = 0 \\ C_0 + C_1 \cdot l + C_2 \cdot \sin \lambda l + C_3 \cdot \cos \lambda l = 0 \\ C_1 + \lambda \cdot C_2 \cdot \cos \lambda 0 - \lambda \cdot C_3 \cdot \sin \lambda 0 = -\frac{EJ \lambda^2 \cdot C_3}{\chi} \Rightarrow C_1 + \lambda \cdot C_2 + \frac{EJ \lambda^2}{\chi} \cdot C_3 = 0 \\ EJ [\lambda^2 \cdot C_2 \cdot \sin \lambda l + \lambda^2 \cdot C_3 \cdot \cos \lambda l] = 0 \end{cases}$$

Zauważmy, że jest to układ równań jednorodnych. Zatem nietrywialne rozwiązanie występuje jedynie, gdy wyznacznik tego układu jest równy zero. Zanim jednak zapiszemy ten wyznacznik, dla uproszczenia obliczeń zmniejszymy liczbę niewiadomych do dwóch. Z pierwszego równania otrzymujemy zależność:

$$C_0 = -C_3$$

i wprowadzamy ją do pozostałych trzech równań

$$\begin{cases} -C_3 + C_1 \cdot l + C_2 \cdot \sin \lambda l + C_3 \cdot \cos \lambda l = 0 \\ C_1 + \lambda \cdot C_2 + \frac{EJ \lambda^2 \cdot C_3}{\chi} = 0 \\ C_2 \cdot \sin \lambda l + C_3 \cdot \cos \lambda l = 0 \end{cases}$$

Przekształcając ostatnie równania otrzymujemy

$$C_3 = -C_2 \cdot \operatorname{tg} \lambda l$$

co po podstawieniu do pozostałych dwóch równań

$$\begin{cases} C_2 \cdot \operatorname{tg} \lambda l + C_1 \cdot l + C_2 \cdot \sin \lambda l - C_2 \cdot \operatorname{tg} \lambda l \cdot \cos \lambda l = 0 \\ C_1 + \lambda \cdot C_2 - C_2 \cdot \operatorname{tg} \lambda l \frac{EJ \lambda^2}{\chi} = 0 \end{cases}$$

doprowadziło do układu

$$\begin{cases} C_1 \cdot l + C_2 \cdot (\sin \lambda l - \operatorname{tg} \lambda l \cdot \cos \lambda l) = 0 \\ C_1 + C_2 \left(\lambda - \operatorname{tg} \lambda l \frac{EJ \lambda^2}{\chi} \right) = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie uzyskamy po przyrównaniu wyznacznika do zera

$$\det |W| = \det \begin{vmatrix} l & \operatorname{tg} \lambda l \\ 1 & \lambda - \operatorname{tg} \lambda l \frac{EJ \lambda^2}{\chi} \end{vmatrix} = 0$$

Po rozwinięciu dostaliśmy równanie, w którym jedyną niewiadomą jest λ

$$\left(\lambda - \operatorname{tg} \lambda l \frac{EJ \lambda^2}{\chi}\right) l - \operatorname{tg} \lambda l = 0 \quad (16.104)$$

Jak pamiętamy, wzór opisujący współczynnik λ ma postać

$$\lambda = \sqrt{\frac{N}{EJ}}$$

Na jego podstawie możemy wyznaczyć siłę krytyczną:

$$P_{kr} = N = \lambda^2 EJ \quad (16.105)$$

Wartość λ należałoby wyznaczyć z równania (16.104). Niestety uzyskanie analitycznej postaci rozwiązania tego równania jest niemożliwe, ponieważ równanie to jest przestępne. Przybliżone rozwiązanie otrzymamy stosując metody numeryczne.

Przejdźmy teraz do wyznaczenia wzorów transformacyjnych dla tej belki. Należy rozwiązać układ niejednorodnych równań. Zadanie polega na znalezieniu relacji pomiędzy węzłowymi przemieszczeniami, a siłami przywęzłowymi. Wyznacza się je z warunków brzegowych. W tym przypadku trzy z czterech warunków są niezerowe:

$$\begin{aligned} w(x=0) &= v_i \\ w(x=l) &= v_k \\ \varphi(x=0) &= \varphi_i + \varphi_i' \\ M(x=l) &= 0 \end{aligned} \quad (16.106)$$

Analogicznie do poprzedniego przypadku w warunku na kąt obrotu podpory i należy uwzględnić jeszcze dodatkowy obrót podpory φ_i' , który wynika z jej podatnego zamocowania.

$$\varphi_i' = -\frac{M_{ik}}{\chi}$$

Tak jak poprzednio wyznaczyliśmy wartość M_{ik} i φ_i'

$$\begin{aligned} M_{ik} &= M(x=0) = EJ \lambda^2 \cdot C_3 \\ \varphi_i' &= -\frac{EJ \lambda^2 \cdot C_3}{\chi} \end{aligned}$$

Tworzymy układ równań,

$$\begin{cases} C_0 + C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot \sin \lambda 0 + C_3 \cdot \cos \lambda 0 = v_i \\ C_0 + C_1 \cdot l + C_2 \cdot \sin \lambda l + C_3 \cdot \cos \lambda l = v_k \\ C_1 + \lambda \cdot C_2 \cdot \cos \lambda 0 - \lambda \cdot C_3 \cdot \sin \lambda 0 + \frac{EJ \lambda^2 \cdot C_3}{\chi} = \varphi_i \\ EJ [\lambda^2 \cdot C_2 \cdot \sin \lambda l + \lambda^2 \cdot C_3 \cdot \cos \lambda l] = 0 \end{cases} \quad (16.107)$$

$$\begin{cases} C_0 + C_3 = v_i \\ C_0 + C_1 \cdot l + C_2 \cdot \sin \lambda l + C_3 \cdot \cos \lambda l = v_k \\ C_1 + \lambda \cdot C_2 = \varphi_i - \frac{EJ \lambda^2 \cdot C_3}{\chi} \\ C_2 \cdot \sin \lambda l + C_3 \cdot \cos \lambda l = 0 \end{cases}$$

z którego dalej wyznacza się wartości stałych C_0 , C_1 , C_2 , C_3 . Znając te wartości można znaleźć wzory transformacyjne:

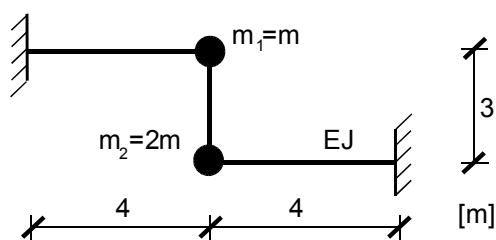
$$M_{ik} = EJ \lambda^2 \cdot C_3 \quad (16.108)$$

$$M_{ki} = 0 \quad (16.109)$$

$$T_{ik} = T_{ki} = -N \cdot C_1 \quad (16.110)$$

Zadanie 8

Obliczyć częstość kołową drgań własnych ω dla ramy z rys. 16.52:



Rys. 16.52. Zadana rama

Metoda pierwsza – rozwiązanie z użyciem współczynników podatności δ_{ik}

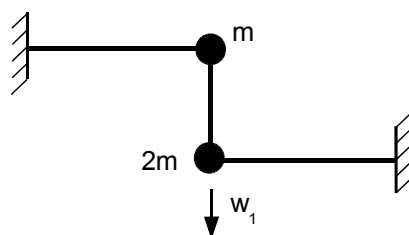
W zagadnieniu obliczania częstości drgań własnych, układów dyskretnych o wielu stopniach swobody, w którym korzystamy ze współczynników podatności, posługujemy się następującym równaniem:

$$w_i(t) = \sum_{j=1}^n (-m_j \ddot{w}_j(t)) \delta'_{ij} \quad (16.111)$$

gdzie:

- $w_i(t)$ to przemieszczenie punktu i ,
- iloczyn $m_j \ddot{w}_j(t)$ jest siłą bezwładności działającą po kierunku j ,
- δ'_{ij} oznacza przemieszczenie po kierunku i wywołane jednostkową siłą po kierunku j .

Analizowany układ ma jeden stopień swobody dynamicznej ($i = 1, j = 1$).



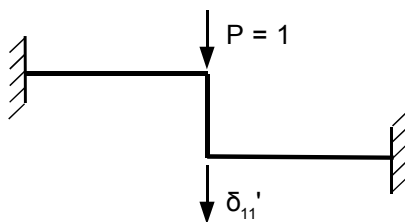
Rozwiązanie równania różniczkowego (16.111) przewidujemy w postaci funkcji $w_1(t) = A \sin \omega t$, której druga pochodna wynosi: $\ddot{w}_1(t) = -A \omega^2 \sin \omega t$. Zatem równanie (16.111) przyjmie postać:

$$A \sin(\omega t) = -[-(2m + m) A \omega^2 \sin(\omega t)] \delta'_{11} \quad (16.112)$$

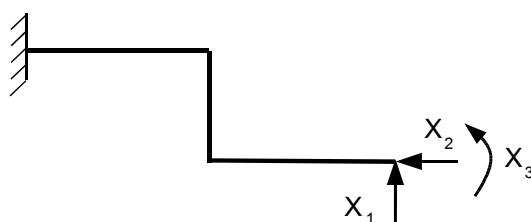
Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\omega = \sqrt{\frac{l}{(2m + m) \cdot \delta'_{11}}} \quad (16.113)$$

Widać zatem, że aby wyznaczyć częstość drgań własnych przy zadanych masach, musimy znaleźć przemieszczenie po kierunku działania siły bezwładności od jednostkowego obciążenia.



W tym celu rozwiążmy ramę metodą sił przyjmując układ podstawowy jak na rys. 16.53.



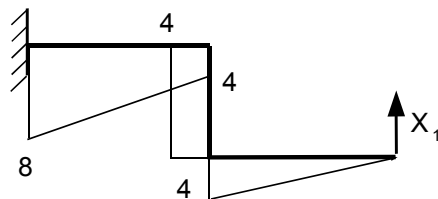
Rys. 16.53. Układ podstawowy

Warunki kinematycznej zgodności układu podstawowego metody sił z rzeczywistą konstrukcją zapewni układ równań kanonicznych:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \Delta_{2P} = 0 \\ \delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3P} = 0 \end{cases} \quad (16.114)$$

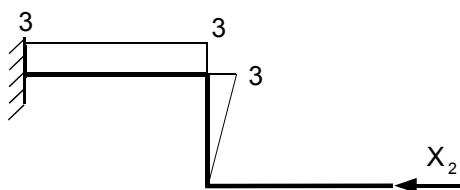
którego współczynniki obliczymy na podstawie wykresów jednostkowych.

Wykres momentów od działania siły $X_1 = 1$:



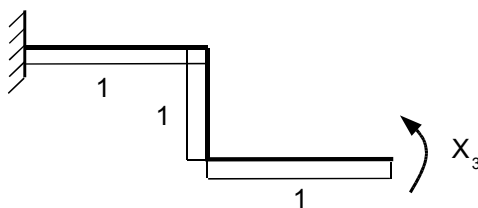
Rys. 16.54. Stan $X_1 = 1$

Wykres momentów od działania siły $X_2 = 1$:



Rys. 16.55. Stan $X_2 = 1$

Wykres momentów od działania siły $X_3 = 1$:



Rys. 16.56. Stan $X_3 = 1$

Współczynniki układu równań kanonicznych metody sił są następujące:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + 4 \cdot 3 \cdot 4 + \frac{4}{6} \cdot (2 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 8 \cdot 8 + 2 \cdot 4 \cdot 8) \right] = \frac{656}{3} \cdot \frac{1}{EJ}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 4 \right) \right] = -90 \cdot \frac{1}{EJ}$$

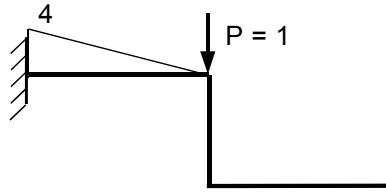
$$\delta_{13} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 4 \right) \right] = 44 \cdot \frac{1}{EJ}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 3 \right] = 45 \cdot \frac{1}{EJ}$$

$$\delta_{23} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot (-1) \pm 3 \cdot 4 \cdot (-1) \right] = -\frac{33}{2} \cdot \frac{1}{EJ}$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EJ} [1 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 1] = 11 \cdot \frac{1}{EJ}$$

Stan P :



Rys. 16.57. Stan P

Wyrazy wolne układu równań wynoszą:

$$\delta_{1P} = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 8 + \frac{1}{3} \cdot 4 \right) \right] = -\frac{160}{3} \cdot \frac{1}{EJ}$$

$$\delta_{2P} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \right] = 24 \cdot \frac{1}{EJ}$$

$$\delta_{3P} = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 \right] = -8 \cdot \frac{1}{EJ}$$

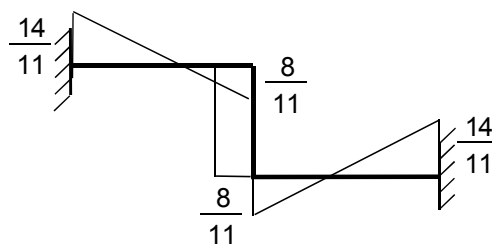
Po wyznaczeniu współczynników układu równań kanonicznych wyznaczamy wartości nadliczbowych reakcji. Po rozwiązaniu układu równań

$$\begin{cases} \frac{656}{3} \cdot X_1 - 90 \cdot X_2 + 44 \cdot X_3 - \frac{160}{3} = 0 \\ -90 \cdot X_1 + 45 \cdot X_2 - \frac{33}{2} \cdot X_3 + 24 = 0 \\ 44 \cdot X_1 - \frac{33}{2} \cdot X_2 + 11 \cdot X_3 - 8 = 0 \end{cases}$$

otrzymamy:

$$\begin{cases} X_1 = 0,5 \\ X_2 = 0,0 \\ X_3 = -1,27273 = \frac{14}{11} \end{cases} \quad (16.115)$$

Wykres momentów zginających w zadanej ramie niewyznaczalnej od obciążenia $P = 1$ jest następujący:



Rys. 16.58. Wykres momentów od obciążenia jednostkowego

W celu wyznaczenia współczynnika δ'_{11} , (czyli przemieszczenia w kierunku pionowym od siły jedynkowej działającej w kierunku pionowym), dokonujemy całkowania funkcji ciągłych obrazujących przebieg momentów od stanu $P = 1$ w układzie statycznie wyznaczalnym (wykres na rys. 16.57) i przebieg momentów od obciążenia $P = 1$ w układzie statycznie niewyznaczalnym (wykres na rys. 16.58). Całkowanie dokonujemy wykorzystując twierdzenie Wereszczagina – Mohra.

$$\delta'_{11} = \frac{1}{EJ} \left[0,5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{14}{11} - \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{11} \right) \right] = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{160}{33}$$

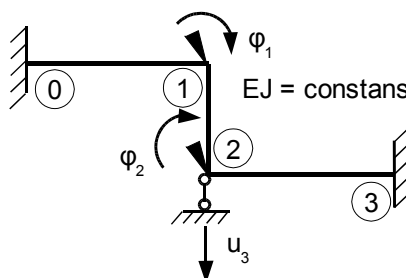
Podstawiając otrzymaną wartość do równania (16.113) otrzymujemy wartość częstości kołowej drgań własnych:

$$\omega = \sqrt{\frac{33 \cdot EJ}{160 \cdot 3m}} = \sqrt{\frac{11 \cdot EJ}{160 \cdot m}} = 0,262 \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}} \quad (16.116)$$

Metoda druga – rozwiązanie z użyciem współczynników sztywności r_{ik}

Częstości drgań własnych można obliczyć także za pomocą współczynników sztywności. Rozwiązanie obiema metodami zestawiono celowo, by pokazać, że w niektórych zadaniach częstości drgań układów statycznie niewyznaczalnych łatwiej jest rozwiązać stosując współczynniki sztywności.

Rozwiązanie zadania sformułowanego przez sztywność rozpoczynamy od przyjęcia układu podstawowego metody przemieszczeń:



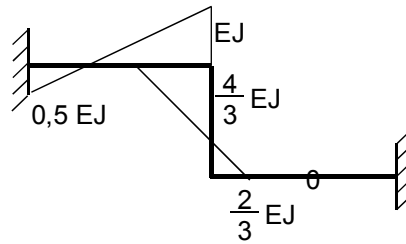
Rys. 16.59. Układ podstawowy metody przemieszczeń

Układ równań kanonicznych metody przemieszczeń jest następujący:

$$\begin{cases} r_{11} \cdot \varphi_1 + r_{12} \cdot \varphi_2 + r_{13} \cdot u_3 + R_{1P} = 0 \\ r_{21} \cdot \varphi_1 + r_{22} \cdot \varphi_2 + r_{23} \cdot u_3 + R_{2P} = 0 \\ r_{31} \cdot \varphi_1 + r_{32} \cdot \varphi_2 + r_{33} \cdot u_3 + R_{3P} = 0 \end{cases} \quad (16.117)$$

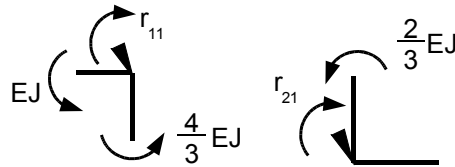
W celu wyznaczenia współczynników r_{ij} należy znaleźć wartości momentów w poszczególnych stanach jednostkowych.

- stan 1, $\varphi_1 = 1$



Rys. 16.60. Stan $\varphi_1 = 1$

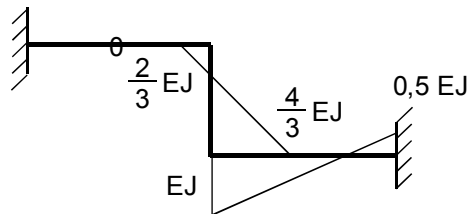
Na podstawie wykresu momentów od stanu pierwszego możemy z równowagi węzłów wyznaczyć współczynniki r_{11} i r_{21} , które wynoszą:



Rys. 16.61. Wyznaczenie współczynników z równowagi węzłów 1 i 2

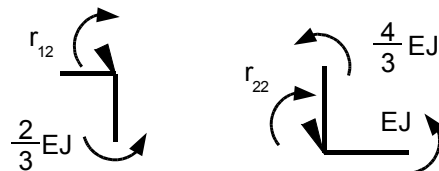
$$r_{11} = \frac{7}{3} EJ \quad r_{21} = \frac{2}{3} EJ$$

- stan 2, $\varphi_2 = 1$



Rys. 16.62. Stan $\varphi_2 = 1$

Na podstawie wykresu momentów od stanu drugiego z równowagi węzłów możemy wyznaczyć współczynniki r_{12} i r_{22} , które wynoszą:



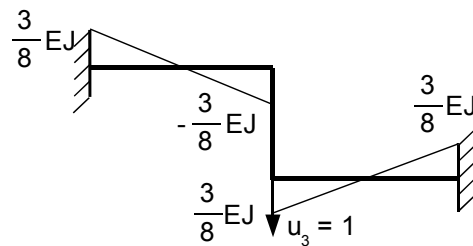
Rys. 16.63. Wyznaczenie współczynników z równowagi węzłów 1 i 2

$$r_{12} = \frac{2}{3} EJ \quad r_{22} = \frac{7}{3} EJ$$

– stan 3, $u_3 = 1$.

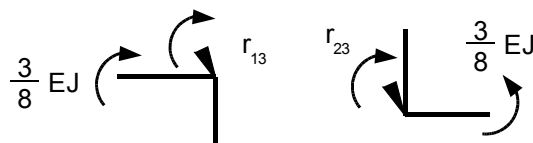
Kąty obrotu cięciw prętów wyznaczone zostały z łańcucha kinematycznego i mają następujące wartości:

$$\psi_{01} = \frac{1}{4} \quad \psi_{12} = 0 \quad \psi_{23} = -\frac{1}{4}$$



Rys. 16.64. Stan $u_3 = 1$

Na podstawie wykresu momentów od stanu trzeciego z równowagi węzłów możemy wyznaczyć współczynniki $r_{13} = r_{31}$ i $r_{23} = r_{32}$, które wynoszą:



Rys. 16.65. Wyznaczenie współczynników z równowagi węzłów 1 i 2

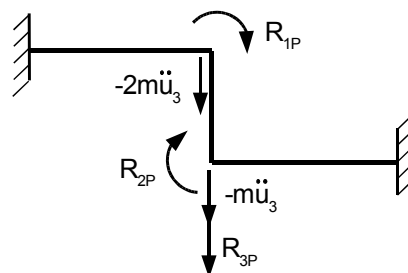
$$r_{13} = -\frac{3}{8} EJ \quad r_{23} = \frac{3}{8} EJ$$

Współczynnik r_{33} wyznaczmy z równania pracy wirtualnej:

$$r_{33} \cdot \bar{1} + 2 \cdot \left(-\frac{3}{8} EJ\right) \cdot \frac{\bar{1}}{4} + 2 \cdot \frac{3}{8} EJ \cdot \left(-\frac{\bar{1}}{4}\right) = 0$$

$$r_{33} = \frac{3}{8} EJ$$

Pozostały do wyznaczenia wyrazy wolne układu równań kanonicznych metody przemieszczeń.



Rys. 16.66. Stan P

Należy jednak zauważyć, że jak ma to miejsce w naszym zadaniu, masa jest skupiona dokładnie w punkcie. Nie ma zatem sił bezwładności od ruchu obrotowego ($J_0 = 0$), a co za tym idzie:

$$\begin{aligned} R_{1P} &= \ddot{\varphi}_1 \cdot \mu \cdot J_0 = 0 \\ R_{2P} &= \ddot{\varphi}_2 \cdot \mu \cdot J_0 = 0 \end{aligned}$$

Niezerowa natomiast pozostaje wartość trzeciej reakcji:

$$R_{3P} = (2m + m) \ddot{u}_3$$

Podstawmy zatem uzyskane współczynniki do układu równań:

$$\begin{cases} \frac{7}{3} EJ \cdot \varphi_1 + \frac{2}{3} EJ \cdot \varphi_2 - \frac{3}{8} EJ \cdot u_3 = 0 \\ \frac{2}{3} EJ \cdot \varphi_1 + \frac{7}{3} EJ \cdot \varphi_2 + \frac{3}{8} EJ \cdot u_3 = 0 \\ -\frac{3}{8} EJ \cdot \varphi_1 + \frac{3}{8} EJ \cdot \varphi_2 + \frac{3}{8} EJ \cdot u_3 + 3m \ddot{u}_3 = 0 \end{cases} \quad (16.118)$$

Jeżeli dodamy do siebie dwa pierwsze równania z powyższego układu równań, to otrzymamy, że

$$\varphi_1 = -\varphi_2 \quad (16.119)$$

Jeśli podstawimy to równanie do drugiego równania układu, otrzymamy zależność między φ_2 a u_3 :

$$\varphi_2 = -\frac{9}{40} \cdot u_3 \quad (16.120)$$

Podstawiając (16.119 i 16.120) do równania trzeciego układu otrzymamy:

$$-\frac{3}{8} EJ \cdot \left(\frac{9}{40}\right) \cdot u_3 - \frac{3}{8} EJ \cdot \frac{9}{40} \cdot u_3 + \frac{3}{8} EJ \cdot u_3 + 3m \ddot{u}_3 = 0 \quad (16.121)$$

Przyjmując, że $u_3 = A \sin \omega t$ oraz $\ddot{u}_3 = -A \omega^2 \sin \omega t$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{66}{320} EJ \cdot A \sin(\omega t) - 3m \cdot A \cdot \omega^2 \sin(\omega t) &= 0 \\ \left(\frac{33}{160} EJ - m \cdot \omega^2\right) A \sin(\omega t) &= 0 \end{aligned}$$

Odrzucając rozwiązanie trywialne ($A = 0$ lub $\omega = 0$) mamy

$$\begin{aligned} \frac{33}{160} EJ - 3m \cdot \omega^2 &= 0 \\ \omega &= \sqrt{\frac{11 \cdot EJ}{160 \cdot m}} = 0,262 \sqrt{\frac{EJ}{m}} \end{aligned} \quad (16.122)$$

Jak widać taka samą wartość częstości drgań własnych uzyskano mniejszym nakładem pracy wykorzystując współczynniki sztywności.

Zadanie 9

Dla belki o ciągłym rozkładzie masy obliczyć częstość kołową drgań własnych ω oraz wzory transformacyjne $M_{ik}, M_{ki}, T_{ik}, T_{ki}$.



Rys. 16.67. Belka o ciągłym rozkładzie masy

Przeanalizujemy najpierw drgania własne belki. W układzie przedstawionym na rys. 16.67 kąty obrotu podpór, siła poprzeczna przy podporze i oraz przemieszczenie pionowe podpory k powinny być równe zero:

$$\begin{cases} T(x=0)=0 \\ \varphi(x=0)=0 \\ W(x=l)=0 \\ \varphi(x=l)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W'''(x=0)=0 \\ W'(x=0)=0 \\ W(x=l)=0 \\ W'(x=l)=0 \end{cases} \quad (16.123)$$

Przyjmując funkcję rozwiązującą w postaci wielomianu obliczamy pochodne po x :

$$W(x) = A \cdot \sin \alpha x + B \cdot \cos \alpha x + C \cdot \sinh \alpha x + D \cdot \cosh \alpha x \quad (16.124)$$

$$W'(x) = \alpha \cdot A \cdot \cos \alpha x - \alpha \cdot B \cdot \sin \alpha x + \alpha \cdot C \cdot \cosh \alpha x + \alpha \cdot D \cdot \sinh \alpha x \quad (16.125)$$

$$W''(x) = -\frac{M}{EJ} = -\alpha^2 \cdot A \cdot \sin \alpha x - \alpha^2 \cdot B \cdot \cos \alpha x + \alpha^2 \cdot C \cdot \sinh \alpha x + \alpha^2 \cdot D \cdot \cosh \alpha x \quad (16.126)$$

$$W'''(x) = -\frac{T}{EJ} = -\alpha^3 \cdot A \cdot \cos \alpha x + \alpha^3 \cdot B \cdot \sin \alpha x + \alpha^3 \cdot C \cdot \cosh \alpha x + \alpha^3 \cdot D \cdot \sinh \alpha x \quad (16.127)$$

Na tej podstawie rozpisujemy warunki brzegowe (16.123), otrzymując układ równań jednorodnych

$$\begin{cases} -\alpha^3 \cdot A \cdot \cos \alpha 0 + \alpha^3 \cdot B \cdot \sin \alpha 0 + \alpha^3 \cdot C \cdot \cosh \alpha 0 + \alpha^3 \cdot D \cdot \sinh \alpha 0 = 0 \\ \alpha \cdot A \cdot \cos \alpha 0 - \alpha \cdot B \cdot \sin \alpha 0 + \alpha \cdot C \cdot \cosh \alpha 0 + \alpha \cdot D \cdot \sinh \alpha 0 = 0 \\ A \cdot \sin \alpha l + B \cdot \cos \alpha l + C \cdot \sinh \alpha l + D \cdot \cosh \alpha l = 0 \\ \alpha \cdot A \cdot \cos \alpha l - \alpha \cdot B \cdot \sin \alpha l + \alpha \cdot C \cdot \cosh \alpha l + \alpha \cdot D \cdot \sinh \alpha l = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -A + C = 0 \\ A + C = 0 \\ A \cdot \sin \alpha l + B \cdot \cos \alpha l + C \cdot \sinh \alpha l + D \cdot \cosh \alpha l = 0 \\ A \cdot \cos \alpha l - B \cdot \sin \alpha l + C \cdot \cosh \alpha l + D \cdot \sinh \alpha l = 0 \end{cases}$$

Z pierwszych dwóch równań wprost wynika, że

$$A = C = 0$$

Rozwiązanie dwóch pozostałych równań jednorodnych

$$\begin{cases} B \cdot \cos \alpha l + D \cdot \cosh \alpha l = 0 \\ -B \cdot \sin \alpha l + D \cdot \sinh \alpha l = 0 \end{cases}$$

jest niezerowe (nietrywialne) gdy wyznacznik macierzy współczynników jest równy zero:

$$|W| = \begin{vmatrix} \cos \alpha l + \cosh \alpha l \\ -\sin \alpha l + \sinh \alpha l \end{vmatrix} \quad (16.128)$$

$$\det |W| = 0 \quad (16.129)$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha l \sinh \alpha l + \sin \alpha l \cosh \alpha l = 0 & \quad \left| \cdot \frac{l}{\cos \alpha l} \frac{l}{\cosh \alpha l} \right. \\ \operatorname{tgh} \alpha l + \operatorname{tg} \alpha l = 0 & \quad (16.130) \end{aligned}$$

Z powyższego równania (16.130) powinniśmy wyliczyć nieskończenie wiele pierwiastków α (funkcje trygonometryczne są okresowe). W funkcji rozwiązującej (16.124) współczynnik α zależy od rozkładu masy μ

$$\alpha^4 = \omega^2 \cdot \frac{\mu}{EJ} \quad (16.131)$$

Po przekształceniu możemy wyznaczyć wartość ω

$$\omega = \alpha^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} \quad (16.132)$$

Przejdźmy teraz do wyznaczenia wzorów transformacyjnych. Tak jak poprzednio zapisujemy warunki brzegowe (16.133). Jednak tym razem poszukujemy wartości sił przywęzłowych w zależności od węzłowych przemieszczeń. Wobec tego przemieszczenia węzłowe muszą być określone:

$$\begin{cases} T(x=0)=0 \\ \varphi(x=0)=\varphi_i \\ W(x=l)=v_k \\ \varphi(x=l)=\varphi_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W''''(x=0)=0 \\ W'(x=0)=\varphi_i \\ W(x=l)=v_k \\ W'(x=l)=\varphi_k \end{cases} \quad (16.133)$$

$$\begin{cases} -\alpha^3 \cdot A \cdot \cos \alpha x + \alpha^3 \cdot B \cdot \sin \alpha x + \alpha^3 \cdot C \cdot \cosh \alpha x + \alpha^3 \cdot D \cdot \sinh \alpha x = 0 \\ \alpha \cdot A \cdot \cos \alpha 0 - \alpha \cdot B \cdot \sin \alpha 0 + \alpha \cdot C \cdot \cosh \alpha 0 + \alpha \cdot D \cdot \sinh \alpha 0 = \varphi_i \\ A \cdot \sin \alpha l + B \cdot \cos \alpha l + C \cdot \sinh \alpha l + D \cdot \cosh \alpha l = v_k \\ \alpha \cdot A \cdot \cos \alpha l - \alpha \cdot B \cdot \sin \alpha l + \alpha \cdot C \cdot \cosh \alpha l + \alpha \cdot D \cdot \sinh \alpha l = \varphi_k \end{cases}$$

Po podstawieniu (16.124), (16.125) i (16.127) otrzymujemy:

$$\begin{cases} -A + C = 0 \\ A + C = \varphi_i \\ A \cdot \sin \alpha l + B \cdot \cos \alpha l + C \cdot \sinh \alpha l + D \cdot \cosh \alpha l = v_k \\ A \cdot \cos \alpha l - B \cdot \sin \alpha l + C \cdot \cosh \alpha l + D \cdot \sinh \alpha l = \varphi_k \end{cases}$$

Po wyznaczeniu stałych A , B , C i D możemy zapisać wzory na siły wewnętrzne wykorzystujące zależności różniczkowe (16.126) i (16.127):

$$M = -EJ W''$$

$$T = \frac{\partial M}{\partial x} = -EJ W'''$$

czyli:

$$M = -EJ \left(-\alpha^2 \cdot A \cdot \sin \alpha x - \alpha^2 \cdot B \cdot \cos \alpha x + \alpha^2 \cdot C \cdot \sinh \alpha x + \alpha^2 \cdot D \cdot \cosh \alpha x \right) \quad (16.134)$$

$$T = -EJ \left(-\alpha^3 \cdot A \cdot \cos \alpha x + \alpha^3 \cdot B \cdot \sin \alpha x + \alpha^3 \cdot C \cdot \cosh \alpha x + \alpha^3 \cdot D \cdot \sinh \alpha x \right) \quad (16.135)$$

Otrzymujemy komplet wzorów transformacyjnych

$$M_{ik} = M(x=0) = EJ \alpha^2 (B - D) \quad (16.136)$$

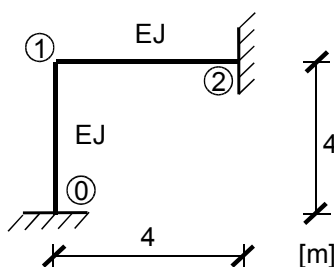
$$M_{ki} = M(x=l) = EJ \alpha^2 (A \cdot \sin \alpha l + B \cdot \cos \alpha l - C \cdot \sinh \alpha l - D \cdot \cosh \alpha l) \quad (16.137)$$

$$T_{ik} = T(x=0) = EJ \alpha^3 (A - C) = 0 \quad (16.138)$$

$$T_{ki} = T(x=l) = EJ \alpha^3 (A \cdot \cos \alpha l - B \cdot \sin \alpha l - C \cdot \cosh \alpha l - D \cdot \sinh \alpha l) \quad (16.139)$$

Zadanie 10

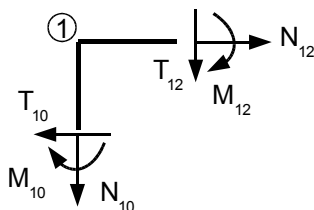
Wyznaczyć częstość kołową drgań własnych ω dla ramy o ciągłym rozkładzie masy (rys. 16.68).



Rys. 16.68. Zadana rama

Do rozwiązania tego problemu posłużymy się wzorami transformacyjnymi dotyczącymi drgań prętów o ciągłym rozkładzie masy. Wzory transformacyjne wiążą siły przywęzłowe z przemieszczeniami.

W danym zadaniu należy uwzględnić zarówno drgania poprzeczne jak i podłużne obu prętów. Punktem wiążącym oba pręty jest węzeł I , którego równowaga musi zostać zachowana:



Rys. 16.69. Równowaga węzła I

Dla węzła nr l musi zachodzić:

$$\begin{cases} \Sigma M = 0 \\ \Sigma Y = 0 \\ \Sigma X = 0 \end{cases} \quad (16.140)$$

Po rozpisaniu:

$$\begin{cases} M_{10} + M_{12} = 0 \\ -N_{10} - T_{12} = 0 \\ -T_{10} + N_{12} = 0 \end{cases} \quad (16.141)$$

Kolejne wartości sił wewnętrznych określają wzory transformacyjne:

- dla drgań poprzecznych:

$$M_{10} = \frac{EJ}{4} \left[c(\lambda) \cdot \varphi_1 + s(\lambda) \cdot \varphi_0 - r(\lambda) \cdot \frac{v_0}{4} + t(\lambda) \cdot \frac{v_l}{4} \right] \quad (16.142)$$

$$M_{12} = \frac{EJ}{4} \left[c'(\lambda') \cdot \varphi_1 + s'(\lambda') \cdot \varphi_2 - r'(\lambda') \cdot \frac{v_2}{4} + t'(\lambda') \cdot \frac{v_l}{4} \right] \quad (16.143)$$

$$T_{10} = -\frac{EJ}{16} \left[t(\lambda) \cdot \varphi_1 + r(\lambda) \cdot \varphi_0 - n(\lambda) \cdot \frac{v_0}{4} + m(\lambda) \cdot \frac{v_l}{4} \right] \quad (16.144)$$

$$T_{12} = -\frac{EJ}{16} \left[t'(\lambda') \cdot \varphi_1 + r'(\lambda') \cdot \varphi_2 - n'(\lambda') \cdot \frac{v_2}{4} + m'(\lambda') \cdot \frac{v_l}{4} \right] \quad (16.145)$$

- dla drgań podłużnych:

$$N_{10} = \frac{EA}{4} [a(\eta) \cdot u_0 - b(\eta) \cdot u_l] \quad (16.146)$$

$$N_{12} = \frac{EA}{4} [-b'(\eta) \cdot u_l + a'(\eta) \cdot u_2] \quad (16.147)$$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych (podpory 0 i 2 nie przemieszczają się), czyli przyjęciu, że: $\varphi_0 = v_0 = u_0 = \varphi_2 = v_2 = u_2 = 0$, z układu (16.141) otrzymujemy:

$$\begin{cases} \frac{EJ}{4} \left[c(\lambda) \cdot \varphi_1 + t(\lambda) \cdot \frac{v_l}{4} \right] + \frac{EJ}{4} \left[c'(\lambda') \cdot \varphi_1 + t'(\lambda') \cdot \frac{v_l}{4} \right] = 0 \\ -\frac{EA}{4} b(\eta) \cdot u_l + \frac{EJ}{16} \left[t'(\lambda') \cdot \varphi_1 + m'(\lambda') \cdot \frac{v_l}{4} \right] = 0 \\ \frac{EJ}{16} \left[t(\lambda) \cdot \varphi_1 + m(\lambda) \cdot \frac{v_l}{4} \right] - \frac{EA}{4} b'(\eta) u_l = 0 \end{cases} \quad (16.148)$$

gdzie:

$$\lambda' = \lambda = \alpha \cdot l = \alpha \cdot 4 = \frac{4 \cdot \mu \cdot \omega^2}{EJ} \quad (16.149)$$

$$c'(\lambda') = c(\lambda) = \frac{\cosh \lambda \sin \lambda - \sinh \lambda \cos \lambda}{1 - \cosh \lambda \cos \lambda} \quad (16.150)$$

$$t'(\lambda') = t(\lambda) = \lambda^2 \frac{\sin \lambda \sinh \lambda}{1 - \cosh \lambda \cos \lambda} \quad (16.151)$$

$$m'(\lambda') = m(\lambda) = \lambda^3 \frac{\sinh \lambda \cos \lambda + \cosh \lambda \sin \lambda}{1 - \cosh \lambda \cos \lambda} \quad (16.152)$$

$$\eta' = \eta = l \cdot \sqrt{\frac{\mu \omega^2}{EA}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{\mu \omega^2}{EA}} \quad (16.153)$$

$$b'(\eta') = b(\eta) = \eta \cot(\eta) \quad (16.154)$$

Należy zauważyć, że wartości współczynników c , t , m , b są takie same dla obu prętów, ponieważ pręty te mają taką samą długość, przekrój i sztywność.

Po przekształceniach otrzymujemy układ równań jednorodnych.

$$\begin{cases} c(\lambda) \cdot \varphi_I + 0,25 \cdot t(\lambda) \cdot v_I = 0 \\ 4 \cdot b(\eta) \cdot u_I + t(\lambda) \cdot \varphi_I + 0,25 \cdot m(\lambda) \cdot v_I = 0 \\ -4 \cdot b(\eta) u_I + t(\lambda) \cdot \varphi_I + 0,25 \cdot m(\lambda) \cdot v_I = 0 \end{cases} \quad (16.155)$$

Warunkiem otrzymania rozwiązania tego układu równań jest zerowanie się wyznacznika następującej macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & c(\lambda) & 0,25 & t(\lambda) \\ 4b(\eta) & t(\lambda) & 0,25 & m(\lambda) \\ -4b(\eta) & t(\lambda) & 0,25 & m(\lambda) \end{bmatrix} \quad (16.156)$$

Przyrównanie wyznacznika macierzy A do zera prowadzi do uzyskania równania zależnego od częstości drgań własnych ω (gdyż wielkości λ oraz η są funkcjami ω). Zatem rozwiązanie równania $\det A = 0$ doprowadzi do uzyskania wartości szukanych częstości drgań własnych.

Z uwagi na rozbudowaną postać współczynników b , c , m , t obliczenia najlepiej przeprowadzić w sposób numeryczny.