



## 9. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE CZĄSTKOWE

### Wstęp.

Równania zawierające pochodną nieznaną funkcji dwóch lub więcej zmiennych nazywa się cząstkowym równaniem różniczkowym. Na przykład:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u &= 1 \\
 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8u &= 5y \\
 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^3 + 6 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} &= x \\
 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xu \frac{\partial u}{\partial y} &= x
 \end{aligned}
 \tag{9.1}$$

Ze względu na szerokie zastosowanie w mechanice konstrukcji, nasze rozważania ograniczą się do równań różniczkowych cząstkowych liniowych drugiego rzędu (rząd określa maksymalną pochodną jaka występuje w równaniu) z dwiema zmiennymi. Dla takich równań można zapisać postać kanoniczną jako:

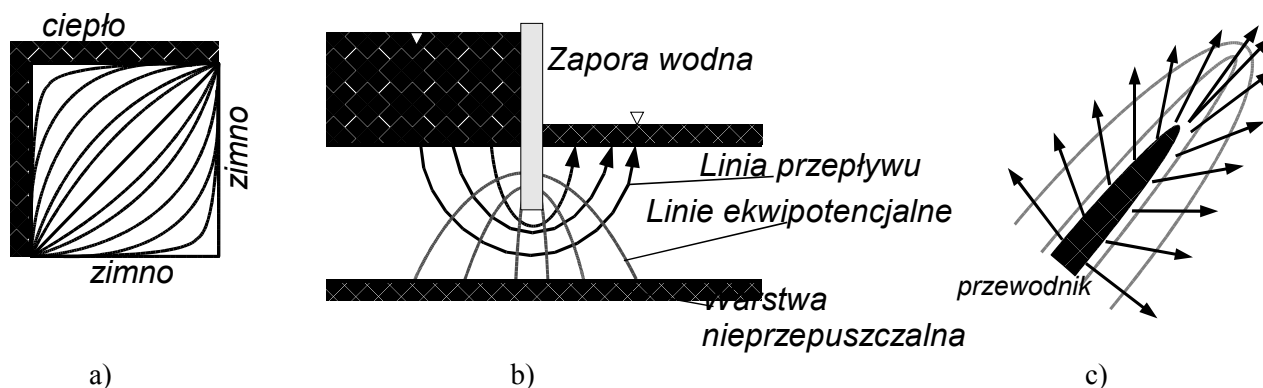
$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D = 0
 \tag{9.2}$$

RRC liniowe drugiego rzędu można sklasyfikować jako:

Wyznacznik $B^2 - 4AC$	RRC	Przykład
$< 0$	Eliptyczne	Równanie Laplace'a (równanie opisuje stan ustalony, brak zmiennej czasowej) $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$
$= 0$	Paraboliczne	Zagadnienie propagacji rozkład funkcji w czasie i przestrzeni (równanie przewodnictwa cieplnego) $\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$
$> 0$	Hiperboliczne	Równania falowe rozkład funkcji w czasie i przestrzeni (rozwiązania oscylacyjne np. drgania struny) $\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$



## 9.1 Równania różniczkowe cząstkowe eliptyczne.



Rys.9.1 Przykłady RRC eliptycznych.

- a) rozkład temperatur na podgrzewanej płycie,  
 b) stan ustalony przepływu wody pod tamą c) rozkład pola elektrycznego w okolicy izolatora.

Równanie Laplace'a jest typowym przykładem równania różniczkowego cząstkowego eliptycznego:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (9.3)$$

Gdy prawa strona nie jest równa zero, to mamy równanie rrc Poissona.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (9.4)$$

Korzystając z metody różnic skończonych równanie różniczkowe Laplace'a można sprowadzić do algebraicznego układu równań. Pochodne cząstkowe zastępujemy odpowiednimi różnicami skończonymi:

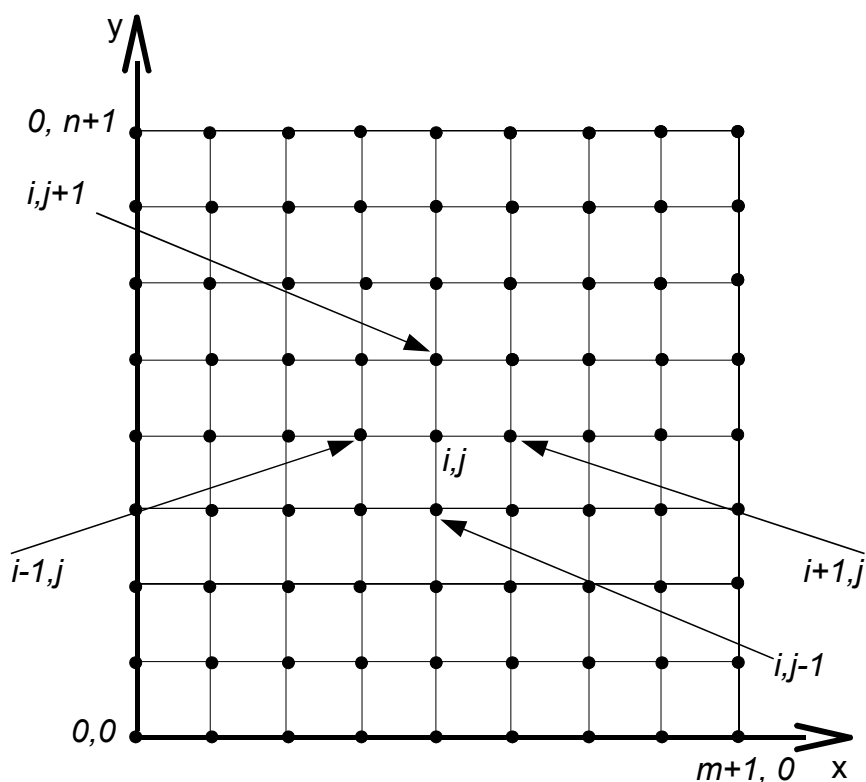
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} \end{aligned} \quad (9.5)$$

Równania (9.5) podstawiamy do równanie (9.3) co w rezultacie daje:

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0 \quad (9.6)$$

Dla siatki kwadratowej (rys9.2) równanie (9.6) przyjmuje postać:

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0 \quad (9.7)$$

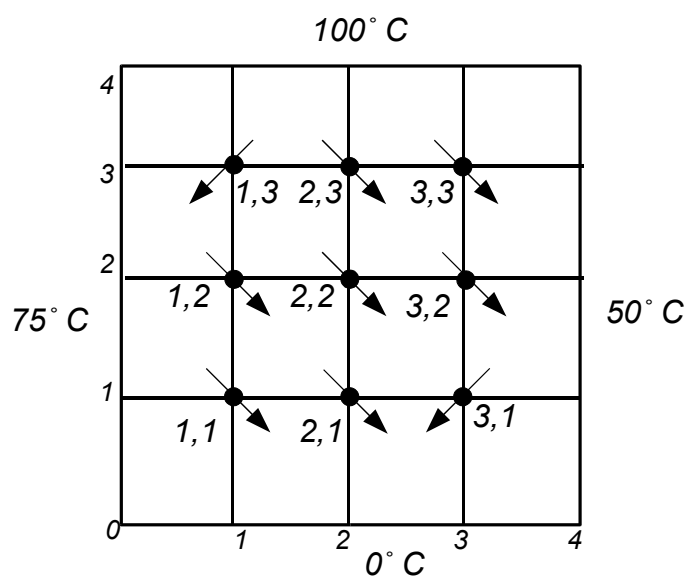


Rys.9.2 Siatka metody różnic skończonych.

Aby znaleźć rozwiązanie zadania musimy zdefiniować warunki brzegowe tzw. warunki brzegowe Dirichleta.

### Przykład 9.1:

W zadaniu określone są warunki brzegowe. Należy obliczyć temperatury w określonych miejscach płyty.



Rys.9.3 Płytką podgrzewana różnymi temperaturami z różnych stron.

Obliczenia wykonujemy korzystając ze wzoru (9.7). Dla punktu  $(i, j) = (1, 1)$  mamy:



$$T_{2,1} + T_{0,1} + T_{1,0} + T_{1,2} - 4T_{1,1} = 0 \quad (9.8 \text{ a})$$

Do równania (9.8 a) podstawiamy warunki brzegowe i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} T_{2,1} + 75 + 0 + T_{1,2} - 4T_{1,1} &= 0 \\ T_{2,1} + T_{1,2} - 4T_{1,1} &= -75 \end{aligned} \quad (9.8 \text{ b})$$

Podobną procedurę należy przeprowadzić dla pozostałych punktów, a następnie rozwiązać powstały układ równań. Ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie:

$$\begin{aligned} T_{1,3} &= 78,58718 & T_{2,3} &= 76,06402 & T_{3,3} &= 69,71050 \\ T_{1,2} &= 63,21152 & T_{2,2} &= 56,11238 & T_{3,2} &= 52,33999 \\ T_{1,1} &= 43,00061 & T_{2,1} &= 33,29755 & T_{3,1} &= 33,88506 \end{aligned}$$

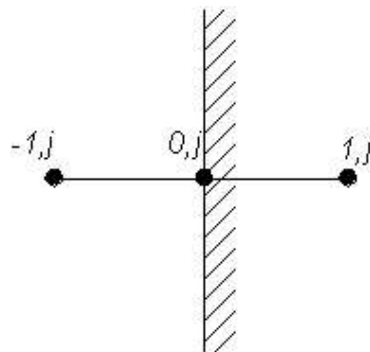
Znając rozkład temperatury, możemy również obliczyć pochodne temperatury względem  $x$  i  $y$  obrazujące tak zwany strumień ciepła. Zależność tę opisują równania Fouriera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta x} = -k_x q_x \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{T_{j+1} - T_{j-1}}{2\Delta y} = -k_y q_y \end{aligned} \quad (9.9)$$

Gradient temperatury w punkcie obliczamy ze wzoru:

$$\begin{aligned} \arctg \frac{q_y}{q_x} &= \Phi \\ q_n &= \sqrt{q_x^2 + q_y^2} \end{aligned} \quad (9.10)$$

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy warunki brzegowe wyrażone są przez pochodne temperatury, czyli strumienie ciepła. Są to tzw. Warunki brzegowe Neumann'a.



Rys.9.4. Warunki brzegowe Neumann'a (dla  $i=0$ )



Równanie różnicowe zapisane dla punktu  $(0,j)$  ma postać:

$$T_{1,j} + T_{-1,j} + T_{0,j+1} + T_{0,j-1} - 4T_{0,j} = 0 \quad (9.11)$$

Należy zwrócić uwagę na punkt  $(-1,j)$ , który mimo że leży poza obszarem jest również wymagany w równaniu. Wydawać by się mogło, że punkt ten będzie stanowił problem, ale tu właśnie przychodzi z pomocą warunek brzegowy w postaci pochodnej. Należy określić pierwszą pochodną po zmiennej  $x$  w punkcie  $(0,j)$ :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{1,j} - T_{-1,j}}{2\Delta x^2} \quad (9.12)$$

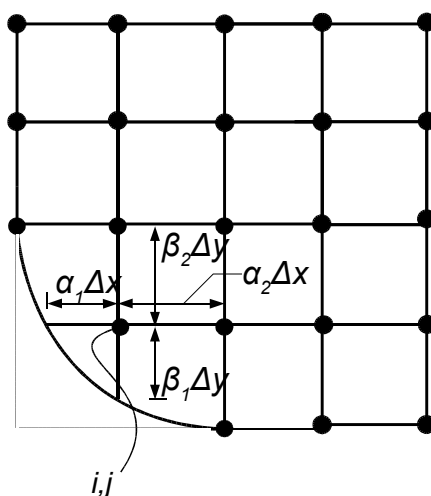
$$T_{-1,j} = T_{1,j} - 2\Delta x \frac{\partial T}{\partial x}$$

Teraz mając zależność (9.12) możemy podstawić ją do wzoru (9.11):

$$2T_{1,j} - 2\Delta x \frac{\partial T}{\partial x} + T_{0,j+1} + T_{0,j-1} - 4T_{0,j} = 0 \quad (9.13)$$

#### Warunki brzegowe dla nieregularnych kształtów.

Rozpatrzmy obraz nieregularnego brzegu jak na Rys.9.5.



Rys.9.5. Obraz nieregularnego brzegu.

Korzystając z różnicy centralnej w tył otrzymujemy:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-1,i} = \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\alpha_1 \Delta x} \quad (9.14)$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i,j+1} = \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\alpha_2 \Delta x}$$

Obliczając drugą pochodną wyrażenia (9.14) względem zmiennej  $x$ , mamy:



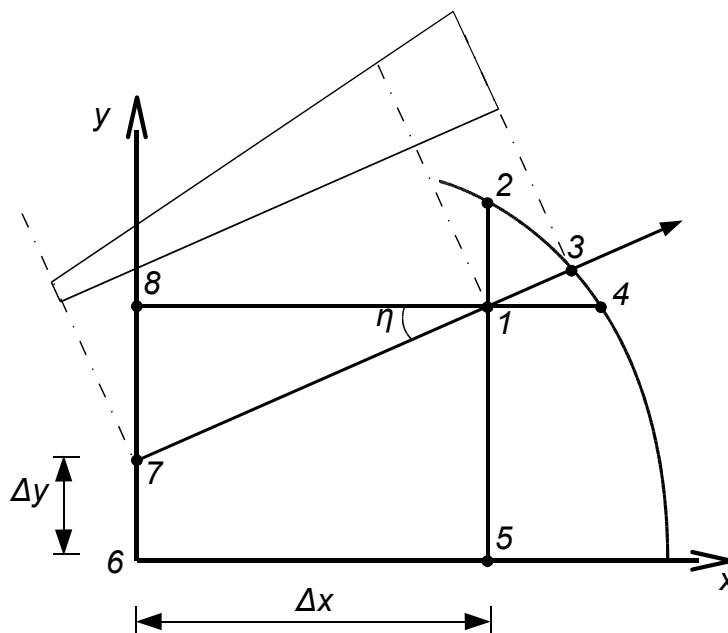
$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i,i+1} - \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-1,i}}{\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta x} = \\
 &= \frac{\frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\alpha_2 \Delta x} - \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\alpha_1 \Delta x}}{\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta x} = \\
 &= \frac{2}{\Delta x^2} \left[ \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2)} - \frac{-(T_{i-1,j} - T_{i,j})}{\alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2)} \right] = \\
 &= \frac{2}{\Delta x^2} \left[ \frac{T_{i-1,j} - T_{i,j}}{\alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2)} + \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2)} \right]
 \end{aligned} \tag{9.15}$$

Wyrażenie na pochodną względem zmiennej  $y$  wygląda analogicznie:

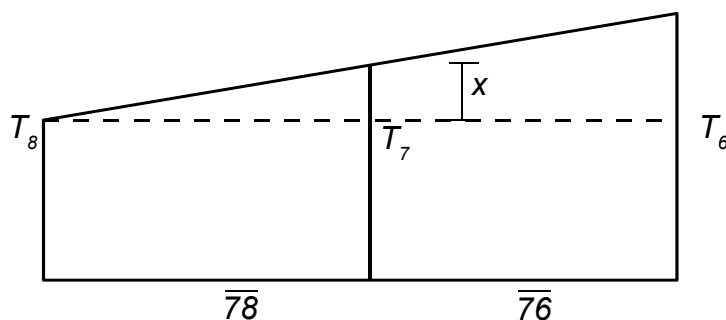
$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{2}{\Delta y^2} \left[ \frac{T_{i-1,j} - T_{i,j}}{\beta_1 (\beta_1 + \beta_2)} + \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\beta_2 (\beta_1 + \beta_2)} \right] \tag{9.16}$$

**Określenie  $\frac{\partial T}{\partial x}$  przy nieregularnych kształtach:**

Rozpatrzmy ponownie obszar o nieregularnym kształcie i zapiszmy rozwiązanie w punkcie 3:



Rys. 9.6. Brzeg zakrzywiony.

Rys. 9.7. Liniowa zależność między  $T_8, T_7, T_6$ 

Zakładamy, że  $T_1, T_3, T_7$  i  $T_8, T_7, T_6$  zmieniają się liniowo. Pochodna w punkcie 3 ma postać:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_3 &= \frac{T_1 - T_7}{L_{17}} \\ \frac{T_1}{L_{17}} &= \left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_3 + \frac{T_7}{L_{17}} \\ T_1 &= \left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_3 \cdot L_{17} + T_7 \end{aligned} \quad (9.17)$$

$$\cos \eta = \frac{\Delta x}{L_{17}} \quad (9.18)$$

Z proporcji można zapisać (rys. 9.7.):

$$\begin{aligned} \frac{x}{L_{78}} &= \frac{T_6 - T_8}{\Delta y} \quad \operatorname{tg} \eta = \frac{L_{78}}{\Delta x} \\ x &= \frac{(T_6 - T_8) \cdot \Delta x \cdot \operatorname{tg} \eta}{\Delta y} \\ T_7 &= T_8 + (T_6 - T_8) \frac{\Delta x \cdot \operatorname{tg} \eta}{\Delta y} \end{aligned} \quad (9.19)$$

Podstawiając do wzoru (9.17) wzory (9.18) i (9.19) otrzymujemy:

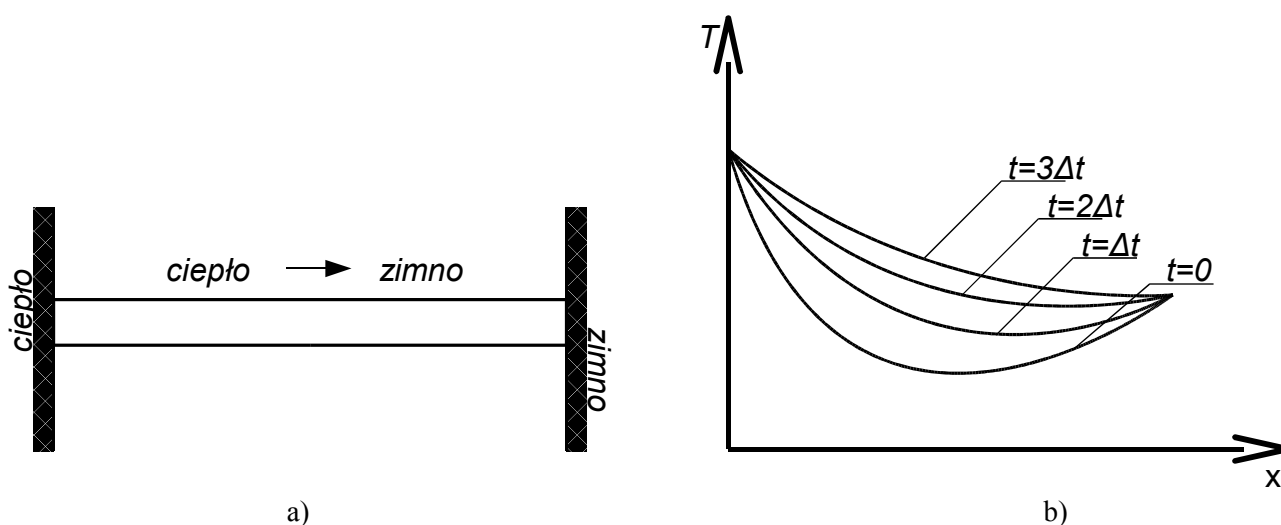
$$\begin{aligned} T_1 &= \left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_3 \cdot \frac{\Delta x}{\cos \eta} + T_8 + (T_6 - T_8) \frac{\Delta x \cdot \operatorname{tg} \eta}{\Delta y} = \\ &= \left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_3 \cdot \frac{\Delta x}{\cos \eta} + T_6 \frac{\Delta x \cdot \operatorname{tg} \eta}{\Delta y} + T_8 \left( 1 - \frac{\Delta x \cdot \operatorname{tg} \eta}{\Delta y} \right) \end{aligned} \quad (9.20)$$



## 9.2. Równania różniczkowe cząstkowe paraboliczne.

RRC paraboliczne umożliwiają znalezienie rozkładu zmiennej w funkcji czasu. Przykładem może być równanie opisujące przewodnictwo ciepłe w postaci:

$$k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (9.21)$$



a)

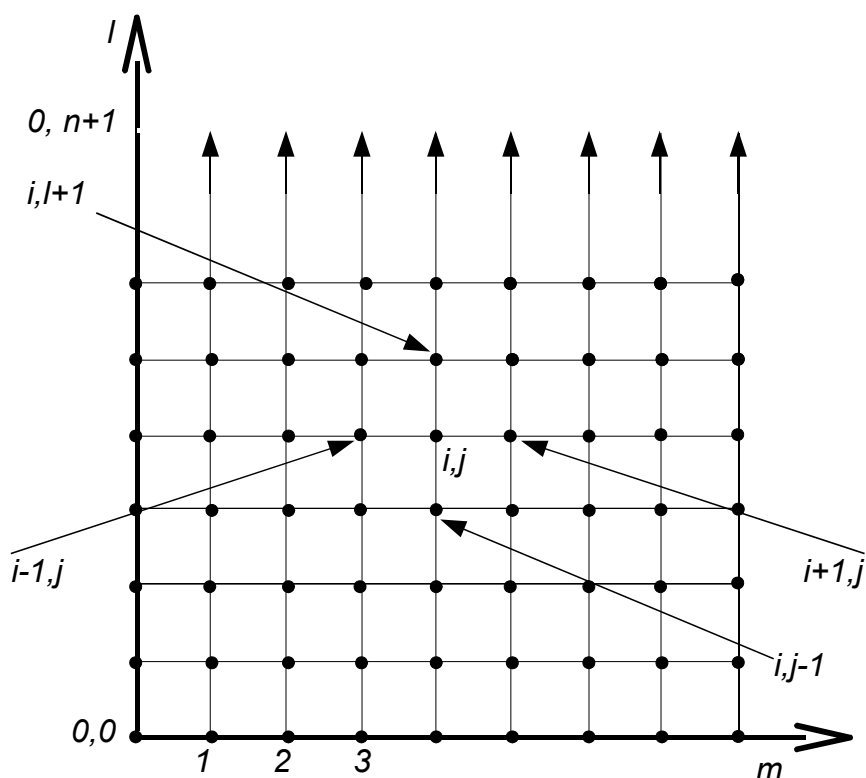
b)

Rys. 9.8 Zastosowanie RRC parabolicznego.

- a) obraz długiego pręta izolowanego podgrzewanego z jednej strony,  
b) Rozwiązanie zagadnienia stanów podgrzewanego pręta w różnych chwilach w czasie.

Przy założeniu, że ciało jest izotropowe  $k_x = k_y = k_z$  oraz przepływ ciepła następuje tylko po jednym kierunku, równanie przewodnictwa cieplnego ma postać:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \text{ gdzie } k - \text{ to stała przewodzenia} \quad (9.22)$$

Rys.9.9. Dyskretyzacja przestrzenna ( $m$ ) i czasowa ( $l$ )**Metody typu „explicit” (jawne).**

Równania przewodnictwa ciepła wymagają aproksymacji drugiej pochodnej przestrzeni i pierwszej pochodnej czasu. Równania te są reprezentowane podobnie jak równania Laplace’a metodą różnic skończonych centralnych:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{\Delta x^2} \quad (9.23)$$

Aby określić przestrzeń czasową wykorzystujemy schemat różnicowy w przód:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} \quad (9.24)$$

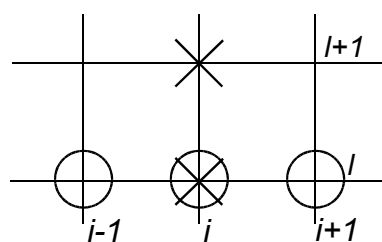
Podstawiamy równania (9.23) i (9.25) do wzoru (9.22) i otrzymujemy:

$$k \frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{\Delta x^2} = \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} \quad (9.25)$$

Po przekształceniach otrzymujemy równanie dla wszystkich punktów wewnętrznych:

$$T_i^{l+1} = T_i^l + \lambda (T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l), \quad \text{gdzie } \lambda = \frac{k\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (9.26)$$

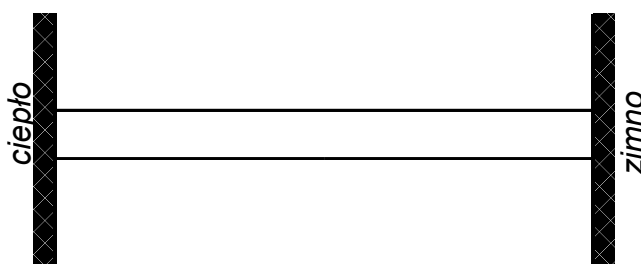
Widać, że do wyznaczenia rozwiązania w danym kroku wykorzystujemy wartość obliczoną w kroku poprzednim.



Rys. 9.10. Komórka obliczeniowa

**Przykład 9.2:**

Wykorzystanie metody „explicit” do obliczenia rozkładu temperatury dla długiego izolowanego pręta (patrz rys. 9.11.):



Rys. 9.11. Pręt dany w zadaniu

Dane:

Długość = 10cm

$\Delta x = 2cm$

$\Delta t = 0,1s$

dla  $t = 0$

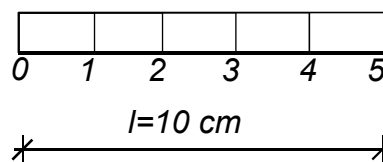
$T(0) = T_0^{(0)} = 100^\circ C$

$T(10) = T_5^{(0)} = 50^\circ C$

$k = 835,0 cm^2 / s$

$\lambda = \frac{0,835 \cdot (0,1)}{2^2} = 0,020875$

$T_1^{(0)} = T_2^{(0)} = T_3^{(0)} = T_4^{(0)} = 0$



Rys. 9.12 Podział pręta na jednakowe odcinki

Wykorzystując zależność (9.26) możemy zapisać dla  $t = 0,1s$   $x = \langle 2,4,6,8 \rangle$ :

$$T_1^1 = 0 + 0,020875[0 - 2(2,0875) + 100] = 2,0875$$

$$T_2^1 = 0 + 0,020875[0 - 2(0) + 0] = 0$$

$$T_3^1 = 0 + 0,020875[0 - 2(0) + 0] = 0$$

$$T_4^1 = 0 + 0,020875[50 - 2(0) + 0] = 1,0438$$

Dla  $t = 0,2s$   $x = \langle 2,4,6,8 \rangle$  wygląda to następująco:



$$T_1^{21} = 2,0875 + 0,020875[0 - 2(2,0875) + 100] = 2,0875$$

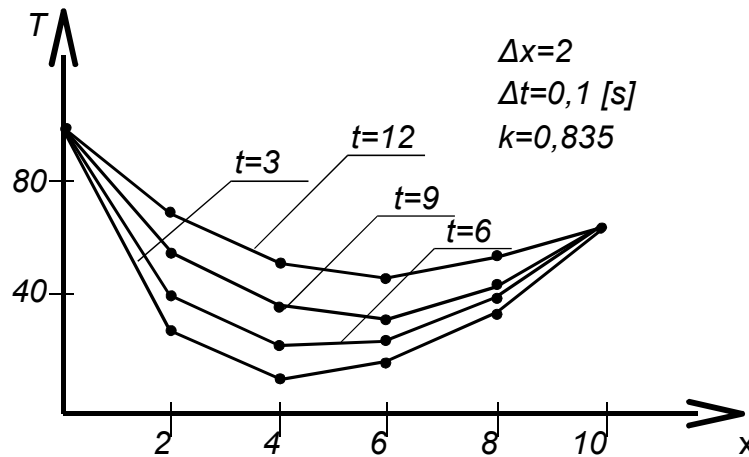
$$T_2^2 = 0 + 0,020875[0 - 2(0) + 2,0875] = 0,043577$$

$$T_3^2 = 0 + 0,020875[1,0438 - 2(0) + 0] = 0,021788$$

$$T_4^2 = 1,0438 + 0,020875[50 - 2(1,0438) + 0] = 2,0439$$

Dla kolejnych  $t$  obliczenia wykonujemy analogicznie.

Na Rys.9.13 przedstawiono graficznie rozwiązanie równania dla chwil  $t = 3, 6, 9, 12$



Rys. 9.13. Rozkład temperatury dla różnych chwil czasu.

**Problem zbieżności i stabilności to:**

Metoda całkowania jest zbieżna gdy, dla:

$$\begin{aligned} \Delta x &\Rightarrow 0 \\ \Delta t &\Rightarrow 0 \end{aligned} \quad (9.27)$$

otrzymujemy rozwiązanie dokładne. Metoda jest stabilna gdy błędy nie narastają podczas całkowania problemu. Stabilność można uzyskać narzucając ograniczenia na krok czasowy. Można wykazać, że gdy:

$$\begin{aligned} \lambda &\leq \frac{1}{2} \quad \text{lub} \\ \Delta t &\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta x^2}{k} \end{aligned} \quad (9.28)$$

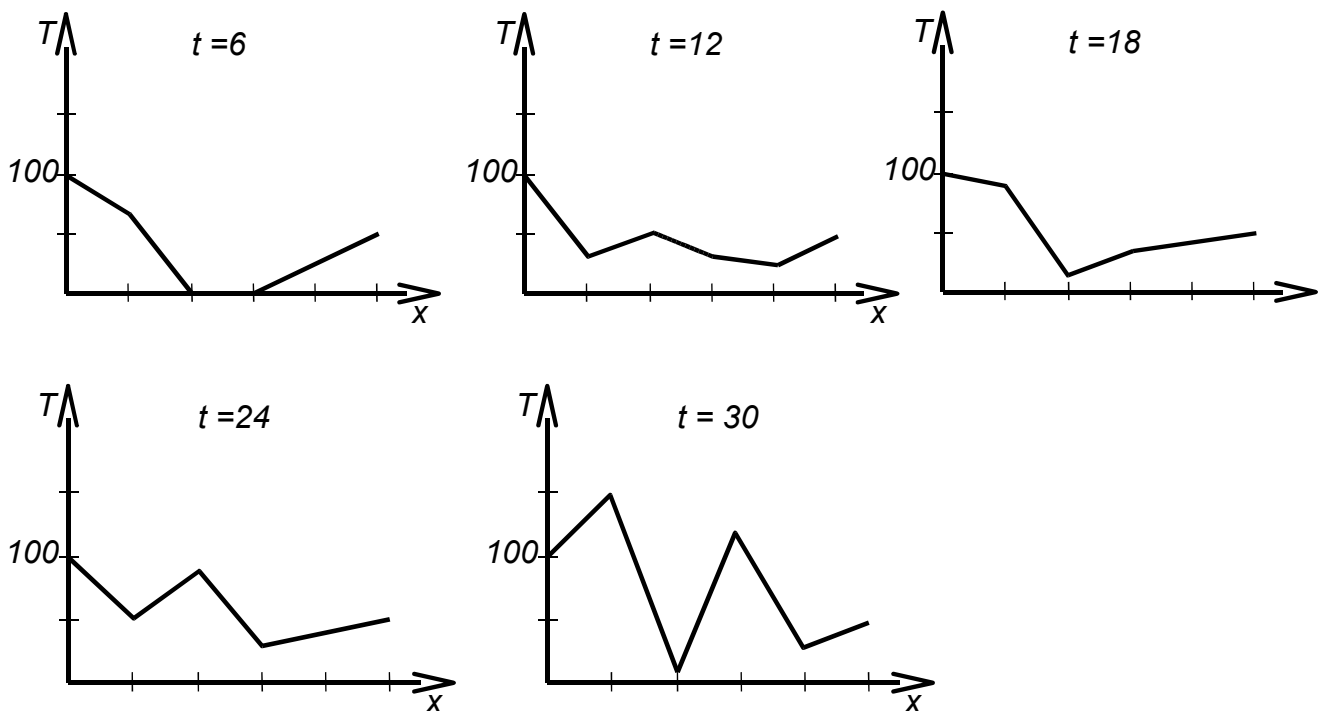
Metoda całkowania "explicit" jest stabilna.

Gdy  $\lambda \leq \frac{1}{2}$  błędy nie narastają, ale mogą oscylować

gdy  $\lambda \leq \frac{1}{4}$  nie ma oscylacji (9.29)

a gdy  $\lambda = \frac{1}{6}$  otrzymujemy minimalny błąd metody

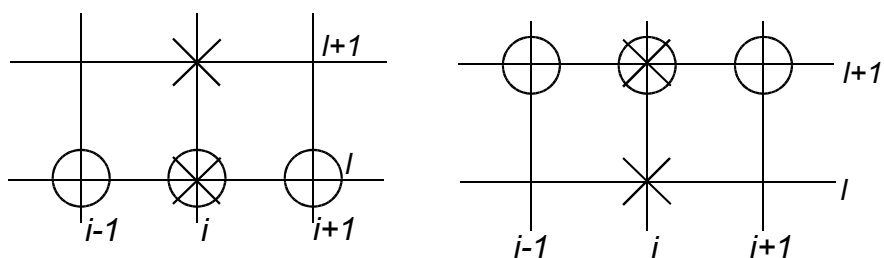
Brak stabilności w przykładzie obrazuje poniższy wykres, który sporządzono  $\lambda = 0,735$ .



Rys. 9.14. Brak stabilności przy zbyt dużym  $\lambda$

**Metody typu „implicit” (niejawne)**

Z powyższych rozważań wynika, że metoda „explicit” może prowadzić do dużych błędów przy nieograniczonym kroku całkowania. Konieczne są więc restrykcyjne ograniczenia, aby zachować stabilność. Metody „implicit” są pozbawione tego mankamentu kosztem bardziej skomplikowanych algorytmów. Fundamentalna różnica pomiędzy metodami „explicit” a „implicit” jest pokazana na rys.9.15.:



Rys 9.15. Różnica omawianych metod Po lewej "explicit", po prawej "implicit".

W przypadku metody „implicit” pochodną określa się w czasie  $l+1$  :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^{l+1} - 2 \cdot T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{\Delta x^2} \tag{9.30}$$

Aby określić przestrzeń czasową wykorzystujemy schemat różnicowy w przód:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} \tag{9.31}$$

Wykorzystując podstawowy wzór na równanie paraboliczne (9.20) otrzymamy:



$$k \frac{T_{i+1}^{l+1} - 2 \cdot T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{\Delta x^2} = \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} \quad (9.32)$$

Równanie to można uprościć do postaci:

$$-\lambda T_{i-1}^{l+1} + (1 + 2\lambda)T_i^{l+1} - \lambda T_{i+1}^{l+1} = T_i^l \quad \text{gdzie} \quad \lambda = \frac{k\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (9.33)$$

Dla układów, gdy dane są temperatury określone na brzegach, mamy:

$$T_0^{l+1} = f_0(t^{l+1}) \quad (9.34)$$

gdzie  $f_0(t^{l+1})$  jest funkcją określającą jak temperatury na brzegach zmieniają się w czasie.

Dla pierwszego punktu wewnętrznego  $i = 1$  mamy :

$$(1 + 2\lambda)T_1^{l+1} - \lambda T_2^{l+1} = T_1^l + \lambda \cdot f_0(t^{l+1}) \quad (9.35)$$

a dla ostatniego punktu wewnętrznego  $i = m$  mamy równanie:

$$-\lambda T_{m-1}^{l+1} + (1 + 2\lambda)T_m^{l+1} = T_m^l + \lambda \cdot f_m(t^{l+1}) \quad (9.36)$$

Ciąg dalszy przykładu 9.2.

Równanie dla  $\lambda = 0,020875$   $t = 0$   $i = 1$ :

$$1,04175 \cdot T_1^1 - 0,020875 \cdot T_2^1 = 0 + 0,020875 \cdot (100)$$

Analogicznie dla pozostałych punktów zapisujemy równania i otrzymujemy układ równań w postaci:

$$\begin{bmatrix} 1,04175 & -0,020875 & 0 & 0 \\ -0,020875 & 1,04175 & -0,020875 & 0 \\ 0 & 0,020875 & -0,020875 & -0,020875 \\ 0 & 0 & -0,020875 & 1,04175 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,0875 \\ 0 \\ 0 \\ 1,04385 \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy rozwiązanie dla chwili  $t=0$ :

$$T_1^1 = 2,0047$$

$$T_2^1 = 0,0406$$

$$T_3^1 = 0,0209$$

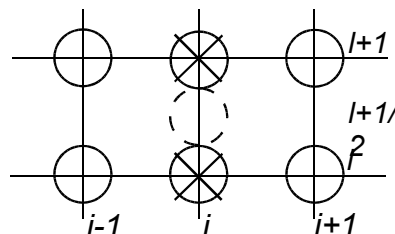
$$T_4^1 = 1,0023$$

Dla kolejnej chwili  $t = 1$  otrzymujemy nowy układ równań, który należy ponownie rozwiązać.



### Metoda Cranka - Nicolsona

Jest to ulepszenie metody implicit, które polega na zwiększeniu dokładności całkowania w czasie. Metoda ta nie wymaga dodatkowych ograniczeń ze względu na czas i przestrzeń. Jest to możliwe dzięki zastosowaniu metody punktu środkowego (obliczenie pochodnej centralnej w 2 punktach co daje znacznie większą precyzję).



Rys. 16. Graficzna interpretacja metody Cranka - Nicolsona

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} \quad \text{dla} \quad t^{l+\frac{1}{2}} \quad (9.37)$$

Druga pochodna w przestrzeni jest określana w punkcie pośrednim, co powoduje uśrednienie przybliżeń w początku ( $t^l$ ) i końcu ( $t^{l+1}$ ) i w rezultacie daje dużo większą dokładność:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cong \frac{1}{2} \left[ \frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{\Delta x^2} + \frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{\Delta x^2} \right] \quad (9.38)$$

Ciąg dalszy przykładu 9.2.:

Analitycznym rozwiązaniem RRC parabolicznego  $\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  jest:

$$T = T \left[ \frac{x}{l} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (-1)^n \sin\left(\frac{nx}{l}\right) \exp\left(\frac{-n^2 \pi^2 kt}{l^2}\right) \right]$$

Porównanie wyników metod: „explicit”, „implicit” i Cranka - Nicolsona (przykład 9.2.)

$\Delta t$	$\lambda$	explicit	implicit	Crank - Nicolson
10	2,0875	208,75	53,01	79,77
5	1,04375	-9,13	58,49	64,79
2	0,4175	67,12	62,22	64,87
1	0,20875	65,91	63,49	64,77
0,5	0,104375	65,33	64,12	64,74
0,5	0,04175	64,97	64,49	64,73

Rozwiązanie dokładne  $T(x=2, t=10) = 64,8018^\circ\text{C}$

Jak widać metoda C - N jest najdokładniejsza od samego początku, a metoda explicit dała satysfakcjonujący wynik dopiero wtedy, gdy współczynnik  $\lambda$  spełnił założenia ograniczenia co do wielkości kroku całkowania.



### 9.3. Równania różniczkowe cząstkowe hiperboliczne.

Rozpatrzmy równanie drgań struny:

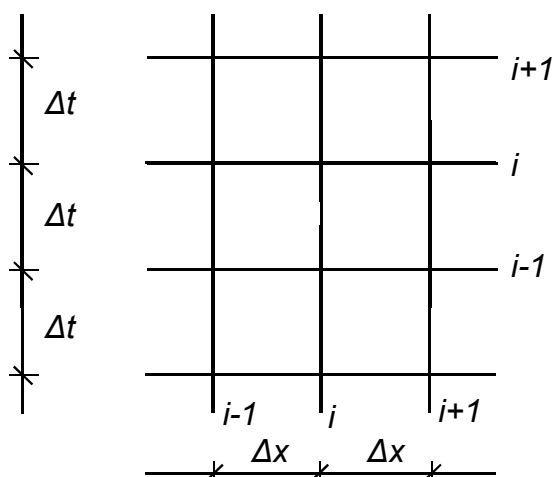
$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

gdzie  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  (9.39)

$E$  – moduł Young'a

$\rho$  - gęstość ośrodka

$c$  - prędkość



Rys. 9.17 Siatka wykorzystana w zadaniu

Wykorzystując metodę różnic skończonych możemy zapisać:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{w'_{i+1} - 2w'_i + w'_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{w_i^{l+1} - 2w_i^l + w_i^{l-1}}{(\Delta t)^2}$$
(9.40)

Podstawiając równania (9.40) do wzoru (9.39) otrzymujemy:

$$c^2 \cdot \frac{w'_{i+1} - 2w'_i + w'_{i-1}}{(\Delta x)^2} = \frac{w_i^{l+1} - 2w_i^l + w_i^{l-1}}{(\Delta t)^2}$$
(9.41)

Po przekształceniach mamy:

$$w_i^{l+1} = \beta^2 w'_{i-1} + 2(1 - \beta^2) w_i^l + \beta^2 w'_{i+1} - w_i^{l-1}$$

gdzie  $\beta = \frac{c \cdot \Delta t}{\Delta x}$  (9.42)

Równanie (9.42) jest typu explicit. Można wykazać, że rozwiązanie to jest stabilne, gdy  $\beta \leq 1$  oraz jest najdokładniejsze dla  $\beta = 1$ . Wtedy nasze równanie przyjmuje postać:

$$w_i^{l+1} = w'_{i-1} + w'_{i+1} - w_i^{l-1}$$
(9.43)