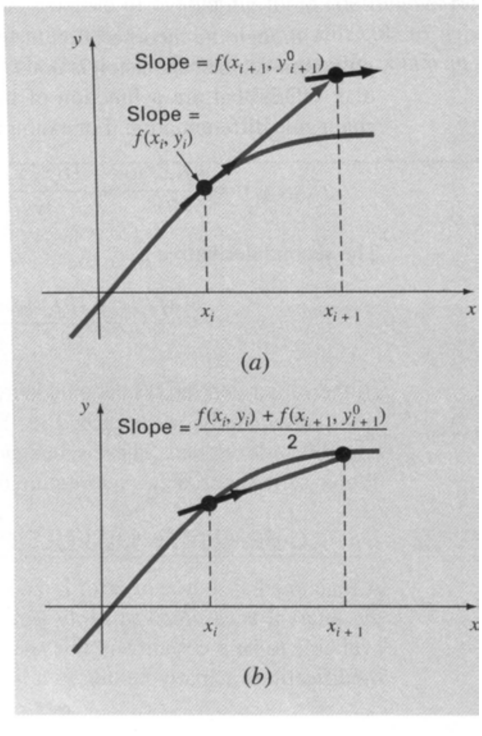
Michał PŁOTKOWIAK, Adam ŁODYGOWSKI
Konsultacje naukowe dr inz. Witold Kąkol
Poznań 2002/2003

METODY KOMPUTEROWE 2

MODYFIKACJE METODY EULERA

Metoda Heuns'a.

W metodzie tej zamiast stałej wartości pochodnej na początku przedziału, jak to było w metodzie Eulera, oblicza się pochodną również w innym punkcie. Pierwsze typowanie wyniku nazywamy **predyktorem** (propozycja), a następnie **korektorem**. Metoda ta, dzięki temu zabiegowi numerycznemu, daje dość sporą zmianę w precyzyjności wyniku i jest znacznie dokładniejsza niż metoda Eulera.



Rys.1 U góry- predyktor; Poniżej- korektor

Predyktor wyrażamy stosując metodę Eulera:

$$y' = f(x_i, y_i) \tag{2.1}$$

$$y^0{}_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) \cdot h \tag{2.2}$$

Wzór (3.2) przedstawia wspomniany predyktor.
Oznaczając przez:

$$y'{}_{i+1} = f\left(x_{i+1}, y^0{}_{i+1}\right) \tag{2.3}$$

mamy:

$$y' = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} = \frac{f(x_i, y_i) + f\left(x_{i+1}, y^0{}_{i+1}\right)}{2} \tag{2.4}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})}{2} \cdot h \tag{2.5}$$

Wzór (3.5) przedstawia korektor.

Przykład:

Rozwiązać równanie różniczkowe postaci:

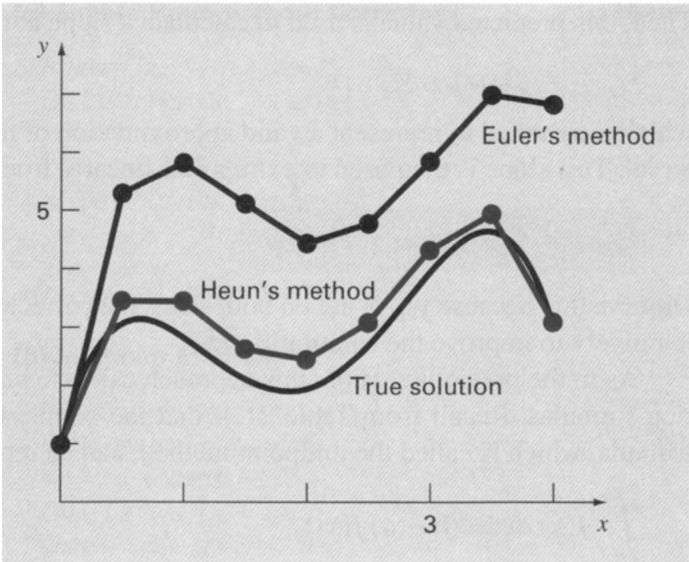
$$\frac{dy}{dx} = -2 \cdot x^3 + 12 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 8{,}5$$

x	y	y'	Wynik
0	1	8,5	1
0,1	1,75395	6,618	1,85
0,2	2,3312	4,964	2,5118
0,3	2,75395	3,526	3,0082
0,4	3,0432	2,292	3,3608
0,5	3,21875	1,25	3,59
0,6	3,2992	0,388	3,715
0,7	3,30195	-0,306	3,7538
0,8	3,2432	-0,844	3,7232
0,9	3,13795	-1,238	3,6388

1	3	-1,5	3,515
1,1	2,84195	-1,642	3,365
1,2	2,6752	-1,676	3,2008
1,3	2,50995	-1,614	3,0332
1,4	2,3552	-1,468	2,8718
1,5	2,21875	-1,25	2,725
1,6	2,1072	-0,972	2,6
1,7	2,02595	-0,646	2,5028
1,8	1,9792	-0,284	2,4382
1,9	1,96995	0,102	2,4098
2	2	0,5	2,42
2,1	2,06995	0,898	2,47
2,2	2,1792	1,284	2,5598
2,3	2,32595	1,646	2,6882
2,4	2,5072	1,972	2,8528
2,5	2,71875	2,25	3,05
2,6	2,9552	2,468	3,275
2,7	3,20995	2,614	3,5218
2,8	3,4752	2,676	3,7832
2,9	3,74195	2,642	4,0508
3	4	2,5	4,315

Korzystając ze wzoru na korektor otrzymamy następujący wynik:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})}{2} \cdot h$$



Rys.2. Porównanie dokładności rozwiązania metody Eulera i Heuna

Przykład:

Rozwiązać równanie różniczkowe postaci:

$y' = 4 \cdot e^{0,8 \cdot x} - 0,5 \cdot y$

w przedziale od x=0 do x=4
war. początkowy x=0 y=2
krok całkowania h=1

Rozwiązanie:

$$y' = \frac{4}{13}\left(e^{0,8 \cdot x} - e^{0,5 \cdot x}\right) + 2 \cdot e^{-0,5 \cdot x}$$

$$y'_0 = 4 \cdot e^0 - 0,5 \cdot (2) = 3$$

$$y'_0 = 2 - 3 \cdot (1) = 5$$

X		Metoda Heunsa
0	2	2
1	6,1946	6,701
2	14,8439	16,3197
3	33,6771	37,1992
4	45,3389	83,3377

$$y'_1 = f(x_i, y^0{}_i) = 4 \cdot e^{0,8\cdot(1)} - 0,5 \cdot (5) = 6,402164$$

$$y = 2 + \frac{\left(3 + 4 \cdot e^{0,8\cdot(1)} - 0,5 \cdot (6,701082)\right)}{2} \cdot 1 = 6,275811$$

$$\varepsilon = 1,8\%$$

$$y = 2 + \frac{\left(3 + 4 \cdot e^{0,8\cdot(1)} - 0,5 \cdot (6,275811)\right)}{2} \cdot 1 = 6,382129$$

$$\varepsilon = 3,03\%$$

Dla większej liczby prób błąd w końcu zaczyna wyraźnie oscylować wokół jednej wartości. Wtedy możemy przerwać obliczenia.

$$y' = \frac{3 + 6,402164}{3} = 4,701082$$

$$y_1 = 2 + 4,70182 \cdot (1) = 6,701082$$

Metoda trapezów

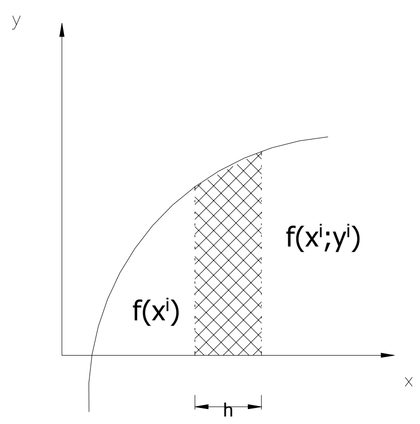
Przy okazji omawiania metody Heuns'a warto wspomnieć o metodzie całkowania funkcji metodą trapezów. Jest to metoda analogiczna do metody Heuns'a polegająca również na przyjęciu średniej wartości dwóch po sobie następujących przedziałów, co umożliwia obliczenie pola powierzchni ograniczonego wykresem. W gruncie rzeczy obliczamy pole trapezu, gdyż krzywą między kolejnymi przedziałami zastępujemy prostą.

$$\frac{dy}{dx} = f(x_i, y_i)$$

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i, y_i) dx$$

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot h$$

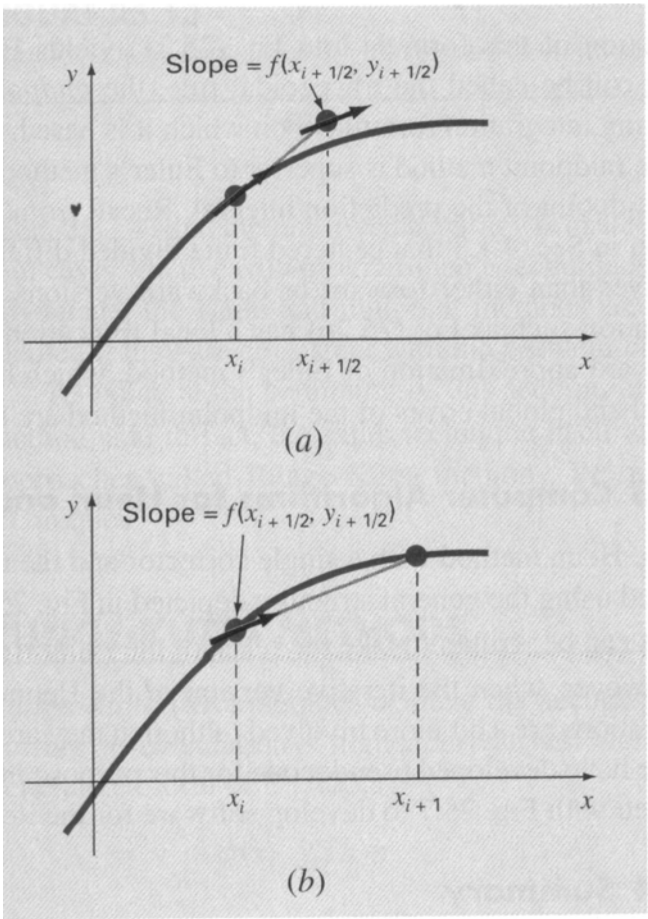


$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot h \tag{2.6}$$

Metoda punktu środkowego

W metodzie punktu środkowego (mid-point method) nachylenie ϕ jest stałe i obliczone jest w połowie przedziału (x_{i+1}, x_i):

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + f\left(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right) \cdot \frac{h}{2} \tag{2.7}$$



Rys.3. Metoda punktu środkowego

Metoda Rungego-Kutty

W metodzie Rungego-Kutty (RK) ogólna postać sposobu całkowania równania różniczkowego ma postać:

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \tag{2.8}$$

gdzie ϕ jest tzw. funkcją przyrostową. Funkcja ϕ ma ogólną postać:

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \ldots + a_n k_n \tag{2.9}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f(x_i + p_1 h; y_i + q_{11} k_1 h) \\
k_3 &= f(x_i + p_2 h; y_i + q_{22} k_2 h + q_{22} k_2 h) \\
&\vdots \\
k_n &= f(x_i + p_{n-1} h; y_i + q_{n-1,1}, k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \ldots + q_{n-1,n-1} k_{n-1})
\end{aligned} \tag{2.9}$$

p, q są stałymi a n- wyznacza rząd metody Rungego- Kutty.