Michał PŁOTKOWIAK, Adam ŁODYGOWSKI
Konsultacje naukowe dr inz. Witold Kąkol
Poznań 2002/2003

METODY KOMPUTEROWE 3

Metoda Rungego- Kutty II rzędu

W metodzie tej wzór na całkowanie równania różniczkowego ma postać:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h \tag{3.1}$$

gdzie:

$$k_1 = f(x_i, y_i) \tag{3.2}$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h; y_i + q_{11} k_1 h) \tag{3.3}$$

Zależności między współczynnikami są postaci:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 1 \\ a_1 p_1 &= \frac{1}{2} \\ a_2 q_{11} &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Pokażemy teraz sposób wyznaczania współczynników a, p i q dla metody RK II rzędu.

Wartości współczynników znajdziemy przez porównanie wyrazów w rozwinięciu funkcji w szereg Taylora a postacią (3.1-3.3).
Rozwińmy funkcję f(x,y) w szereg Taylora. Otrzymamy:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)h^2}{2!} + 0(h^3)$$

$$f'(x_i, y_i) = \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + (\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx})\frac{h^2}{2!}$$

Dowolną ciągłą funkcję g(x,y) możemy przedstawić w postaci:

$$g(x + r, y + s) = g(x, y) + r\frac{\partial g}{\partial x} + s\frac{\partial g}{\partial y} + \text{K} \tag{3.5}$$

Zatem (3.3) możemy zapisać w postaci:

$$f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11}k_1 h) = f(x_i, y_i) + p_1 h\frac{\partial f}{\partial x} + q_{11}k_1 h\frac{\partial f}{\partial y} + 0(h^2) \tag{3.6}$$

gdzie $0(h^2)$ oznacza wyrazy wyższego rzędu.

Zgodnie ze wzorem metody RK (3.1) po podstawieniu (3.2) oraz (3.3) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} y_{i+1} = y_i + a_1 hf(x_i, y_i) + a_2 hf(x_i, y_i) + a_2 p_1 h^2\frac{\partial f}{\partial x} + \\ + a_2 q_{11}h^2\frac{\partial f}{\partial y}f(x_i, y_i) + 0(h^3) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Po pogrupowaniu odpowiednich wyrazów otrzymamy:

$$\begin{aligned} y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)[a_1 + a_2] + \left[a_2 p_1\frac{\partial f}{\partial x} + a_2 q_{11}\frac{\partial f}{\partial y}f(x_i, y_i) + \right] \\ + 0(h^3) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Wyrażenie powyższe musi być równoważne z rozwinięciem funkcji w szereg Taylora

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + (\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dx}{dy})\frac{h^2}{2!}$$

Z tego wynika, że musi zachodzić:

$$a_1 + a_2 = 1$$
$$a_1 p_1 = \frac{1}{2} \tag{3.9}$$
$$a_2 q_{11} = \frac{1}{2}$$

Podobnie możemy wyprowadzić znane nam już wzory dla metod RK:
1. Heuns'a z jednym korektorem: $a_2=1/2$
zgodnie z zależnościami() $a_1=1/2$, $p_1=q_{11}=1$

$$y_{i+1} = y_i + (\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2)h \tag{3.10}$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + h; y_i + k_1 h) \tag{3.11}$$

2. Punktu pośredniego (mid-point method) $a_2=1$
zgodnie z zależnościami() $a_1=0$, $p_1=q_{11}=1/2$

$$y_{i+1} = y_i + k_2 h \tag{3.12}$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h; y_i + \frac{1}{2}k_1 h) \tag{3.13}$$

3. Ralstona'a $a_2=2/3$
zgodnie z zależnościami() $a_1=1/3$, $p_1=q_{11}=3/4$

$$y_{i+1} = y_i + (\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2)h \tag{3.14}$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{3}{4}h; y_i + \frac{3}{4}k_1 h) \tag{3.15}$$

PRZYKŁAD

Obliczyć wartość funkcji w punkcie x=0.5 metodą Ralstona'a

Założenia: war. pocz. y(0)=1, x należy do przedziału (0,4).

$f(x_i, y_i) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5$

Zgodnie z zależnościami (3.9)

$0 + \frac{3}{4} \cdot 0{,}5 = 0{,}375$

$k_1 = f(0) = 8{,}5$

$k_2 = -2(0{,}375)^3 + 12(0{,}375)^2 - 20(0{,}375) + 8{,}5 = 2{,}58203125$

Funkcja przyrostowa wynosi:

$\phi = \frac{1}{3} \cdot 8{,}5 + \frac{2}{3} \cdot 2{,}58203125 = 4{,}5546875$

ostatecznie otrzymujemy

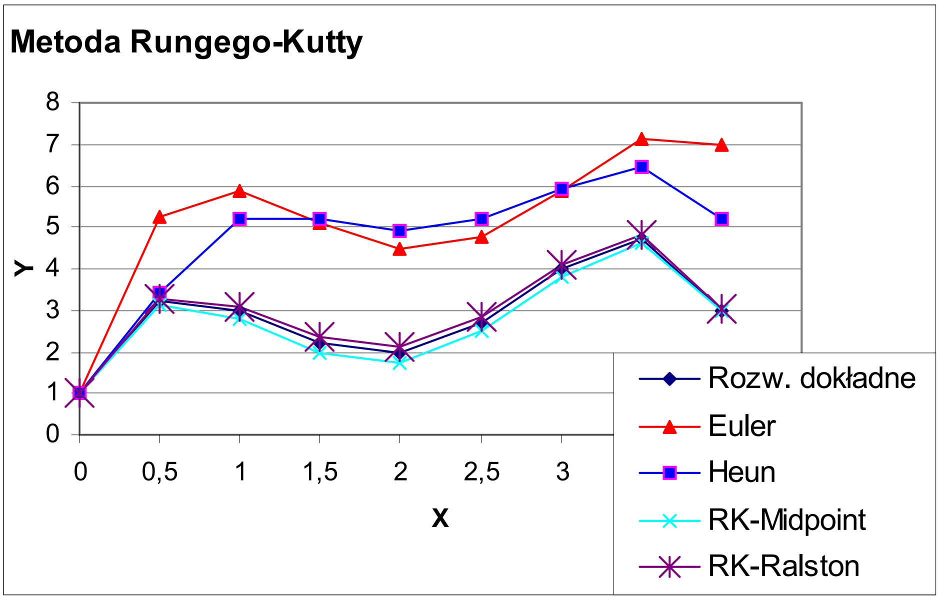
$y(0{,}5) = 1 + 4{,}5546875(0{,}5) = 3{,}27734375$

błąd procentowy wynosi

$\varepsilon = 1{,}82\%$

x	y	y'	Euler	Heun	RK-midpoint		RK-Ralston
0	1	8,5	1	1	1	0	1
0,5	3,21875	1,25	5,25	3,4375	3,109375	0,5	3,277344
1	3	-1,5	5,875	5,1875	2,8125	1	3,101563
1,5	2,21875	-1,25	5,125	5,1875	1,984375	1,5	2,347656
2	2	0,5	4,5	4,9375	1,75	2	2,140625
2,5	2,71875	2,25	4,75	5,1875	2,484375	2,5	2,855469
3	4	2,5	5,875	5,9375	3,8125	3	4,117188
3,5	4,71875	-0,25	7,125	6,4375	4,609375	3,5	4,800781
4	3	-7,5	7	5,1875	3	4	3,03125

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5$$
$$y = -0{,}5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8{,}5x + 1$$



Metoda R-K rzędu IV

Metoda ta jest najbardziej popularna wśród metod RK.
Wzór na całkowanie równania różniczkowego ma postać:

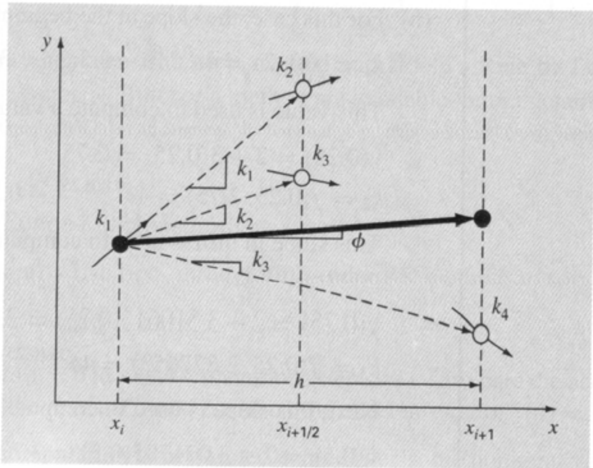
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \tag{3.16}$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h; y_i + \frac{1}{2}k_1 h) \tag{3.17}$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h) \tag{3.18}$$

$$k_4 = f(x_i + h; y_i + k_3 h) \tag{3.19}$$



Rys. 1. Graficzne przedstawienie metody RK IV rzędu

Metody RK rzędu V (Butcher 1964)

W metodzie RK V rzędu wzór na całkowanie ma postać:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6)h \tag{3.20}$$

Im wyższy rząd metody tym większa jej dokładność.