Michał PŁOTKOWIAK, Adam ŁODYGOWSKI
Konsultacje naukowe dr inz. Witold Kąkol
Poznań 2002/2003

METODY KOMPUTEROWE 4

UKŁADY RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

Układ równań różniczkowych zapiszemy w postaci:

$$\begin{aligned}&\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n)\\&......................................\\&......................................\\&\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)\end{aligned} \tag{4.1}$$

Rozwiązanie takiego układu polega na zastosowaniu jednej z poznanych metod rozwiązywania równań różniczkowych dla każdego równania.

Przykład:

Rozwiąż układ równań: $\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx} = -0{,}5y_1\\[2mm]\dfrac{dy_2}{dx} = 4 - 0{,}3y_2 - 0{,}1y_1\end{cases}$

Warunek początkowy: $y_1(0) = 4$

$y_2(0) = 6$

krok $h = 0{,}5$

Stosując metodę Eulera mamy:

$y_1(0{,}5) = 4 + [-0{,}5 \cdot 4] \cdot 0{,}5 = 3$

$y_2(0{,}5) = 6 + [4 - 0{,}3 \cdot (6) - 0{,}1 \cdot (4)] \cdot 0{,}5 = 6{,}9$

METODA POŁOWIENIA PRZEDZIAŁU

Dzięki takiemu zabiegowi otrzymujemy zbieżność metody wyższego rzędu, a co za tym idzie, większą dokładność rozwiązania i mniejszy błąd.

$$\left.\begin{array}{ll} h & (y_1) \\ 2\cdot 0{,}5h & (y_2) \\ & \Delta = y_2 - y_1 \end{array}\right\} \qquad \text{Rozwiązanie } y_2 \leftarrow y_2 + \frac{\Delta}{15}$$

Przykład:

$y' = 4\cdot e^{0{,}8\cdot x} - 0{,}5\cdot y$

Rozwiąż równanie w przedziale od x=0 do x=2
Warunek początkowy: y(0)=2
Krok całkowania: h=1

Rozwiązanie dokładne:

$$y(2) = 14{,}84392$$

korzystając z metody połowienia przedziału mamy:
dla h

$$y(2) = 2 + \frac{1}{6}\left[3 + 2\cdot(6{,}40216 + 4{,}70108) + 14{,}11105\right]\cdot 2 = 15{,}10584$$

$$y(1) = 2 + \frac{1}{6}\left[3 + 2\cdot(4{,}2173 + 3{,}91297) + 5{,}94568\cdot 1\right]\cdot 1 = 6{,}20104$$

$$y(2) = 6{,}20104 + \frac{1}{6}\left[5{,}8164 + 2\cdot(8{,}72954 + 7{,}99756) + 12{,}71283\right]\cdot 1 = 14{,}86249$$

Błąd:

$$E = \frac{14{,}56249 - 15{,}10584}{15} = 0{,}01622$$

$$E_k = 14{,}84392 - 14{,}86249 = -0{,}01857$$

$$y(2) = 14{,}86249 - 0{,}01622 = 14{,}84627$$

METODY WIELOKROKOWE:

Oznaczmy przez :

$Ax = b$

uklad równań algebraicznych. Rozwiązanie ukladu zapiszemy formalnie w postaci :

$x = A^{-1}b$

Gdy $\det|A| \approx 0$ to rozwiązanie jest wrażliwe na niedokladności zaokrągleń.

Jeżeli dla układu równań różniczkowych $y' = f(x, y)$ stosunek największej wartości własnej co do modułu macierzy Jacobiego $\left[\frac{df}{dy}\right]$ do najmniejszej wartości własnej jest >>1, to taki układ nazywamy typu stiff.

Np.

$$y' = A \cdot y \qquad A = \begin{vmatrix} -667 & 333 \\ 666 & -334 \end{vmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = -1000$$

$$\begin{cases} y_1(x) = e^{-x} - e^{-1000x} \\ y_2(x) = 2e^{-x} - e^{-1000x} \end{cases}$$

Przykład:

$$\frac{dy}{dt} = -1000y + 3000 - 2000e^{-t} \qquad y(0) = 0$$

Rozwiązanie: $y = 3 - 0{,}998e^{-1000t} - 2{,}002e^{-t}$

$$\frac{dy}{dt} = ay \qquad y(0) = y_0$$

$$y = y_0 e^{at}$$

Rozpatrzmy rozwiązanie metodą Eulera:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{dy_i}{dt} \cdot h$$

$$y_{i+1} = y_i + ay_i \cdot h$$

$$y_{i+1} = y_i(1 - a \cdot h)$$

Rozwiązanie zależy od wielkości kroku *h*
Aby rozwiązanie było stabilne to musi być spełniony warunek:

$$\left|1 - a \cdot h\right| < 1$$

$$h < \frac{2}{a} = \frac{2}{1000} = 0{,}002$$

METODA EXPLICIT (metoda jawna)

Metoda ta polega na wyznaczaniu rozwiązania przez wykonywanie operacji i otrzymywaniu rozwiązania wprost. Bardzo prosta w użyciu ale ograniczona przez wielkość kroku całkowania.

METODA NIEJAWNA (metoda backword lub implicit Eulera)

W metodzie tej stosujemy algorytm:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{dy_{i+1}}{dt} \cdot h$$

$$y_{i+1} = y_i + a y_{i+1} \cdot h$$

Metoda ta jest bezwarunkowo stabilna.

$$y_{i+1} = \frac{y_i}{1 + a \cdot h} \Rightarrow \left|y_i\right| \to 0 \Rightarrow i \to \infty$$

Przykład:

$$y(0) = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = -1000y + 3000 - 2000e^{-t}$$

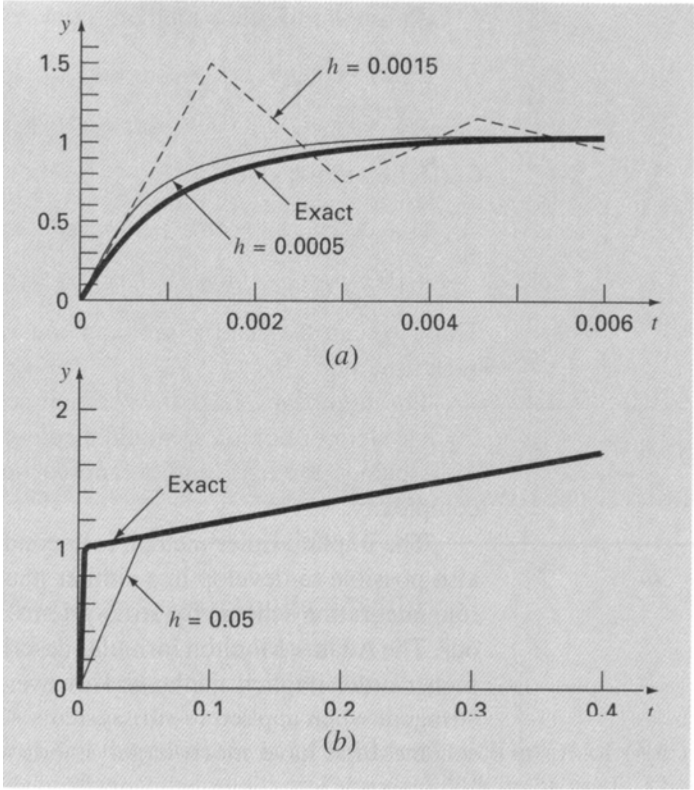
Rozwiążemy to równanie metodą:

1) explicit Eulera dla h=0,0005 i h=0,0015, dla przedziału t=0 i t=0,006
2) implicit dla h=0,05 w przedziale 0≤t≤0,4

1) $y_{i+1} = y_i + \left(-1000 y_i + 3000 - 2000e^{-t_{i+1}}\right) \cdot h$

2) $y_{i+1} = y_i + \left(-1000 y_{i+1} + 3000 - 2000e^{-t_{i+1}}\right) \cdot h$

$$y_{i+1} = \frac{y_i + 3000h - 2000he^{-t_{i+1}}}{1 + 1000h}$$



Rys. 1. Porównanie rozwiązań metod a) explicit i b) implicit