Michał PŁOTKOWIAK, Adam ŁODYGOWSKI
Konsultacje naukowe dr inz. Witold Kąkol
Poznań 2002/2003

METODY KOMPUTEROWE 5

Metody wielokrokowe- kontynuacja

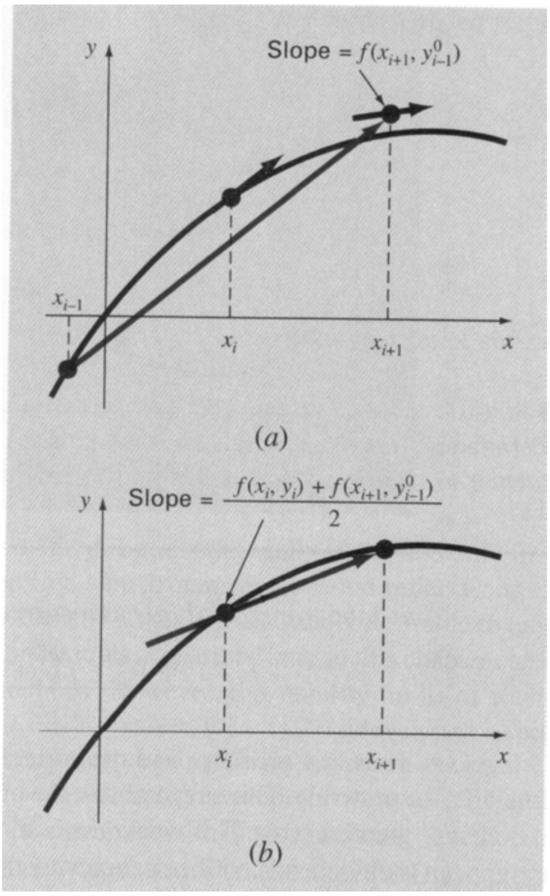
W odróżnieniu od metod jednokrokowych, polegają nie na obliczaniu nachylenia funkcji ale wykorzystują poprzednie rozwiązanie

Korzystamy z układu równań predyktor, korektor

$$\begin{cases} y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)h & (5.1) \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2} h & (5.2) \end{cases}$$

Błędy obu równań są jednak różnych rzędów. Predyktor (5.1) posiada błąd rzędu $0(h^2)$, natomiast korektor (5.2) rzędu $0(h^3)$
Aby uzyskać w obu przypadkach błąd rzędu $0(h^3)$ i uwzględniając poprzednie rozwiązanie, równanie predyktora zapisujemy w następującej postaci:

$$y_{i+1}^0 = y_{i-1} + f(x_i, y_i)2h \qquad (5.3)$$



Rys. 1. a) Predyktor i b) Korektor

Metoda ta posiada zasadniczy mankament: na starcie trzeba znać rozwiązanie wstecz. Jest to więc metoda samoniestartująca.

Metoda Heunsa wielokrokowa

Metoda samo-nie startująca

predyktor:

$$y_{i+1}^0 = y_{i-1}^m + f(x_i, y_i^m)2h \tag{5.4}$$

korektor:

$$y_{i+1}^j = y_i^m + \frac{f(x_i, y_i^m) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{j-1})}{2}h \tag{5.5}$$

Rozwiązanie metody otrzymujemy na drodze iteracji, która następuje od j=1,...,m

Błąd metody wynosi:

$$|\varepsilon_0| = \left| \frac{y_{i+1}^{j} - y_{i+1}^{j-1}}{y_{i+1}^{j}} \right| \cdot 100\% \tag{5.6}$$

PRZYKŁAD

$x = 0 \quad x = 4$

$y(0) = 2 \qquad h = 1$

$y' = 4e^{0,8x} - 0,5y$

Rozwiązanie w poprzednim punkcie (-1)

$y(-1) = -0,3929953$

Predyktor (ekstrapolowanie liniowe od x=-1 do x=1):

$y_1^0 = -0,3929953 + \left[4e^{0,8(0)} - 0,5(2)\right]2 = 5,607005$

Korektor(obliczenie wartości):

$$y'_1 = \frac{4e^{0,8(0)} - 0,5(2) + 4e^{0,8(0)} - 0,5(5,607005)}{2} \cdot 1 = 6,549331$$

Błąd procentowy metody wynosi:

$\varepsilon = -5,73\ \%$

Dla porównania błąd w metodzie Huensa samostartującej (przykładx) wynosił –8,18%.

Dokonując kolejnej iteracji:

$$y_1^2 = 2 + \frac{3 + 4e^{0,8(1)} - 0,5(6,549331)}{2} \cdot 1 = 6,313749$$

Błąd procentowy

$\varepsilon_t = -1,92\%$

Błąd względny zgodnie ze wzorem (5.6) wynosi:

$$|\varepsilon| = \left|\frac{6{,}313749 - 6{,}549331}{6{,}313749}\right| \cdot 100\% = 3{,}7\%$$

Równania różniczkowe-zagadnienia brzegowe

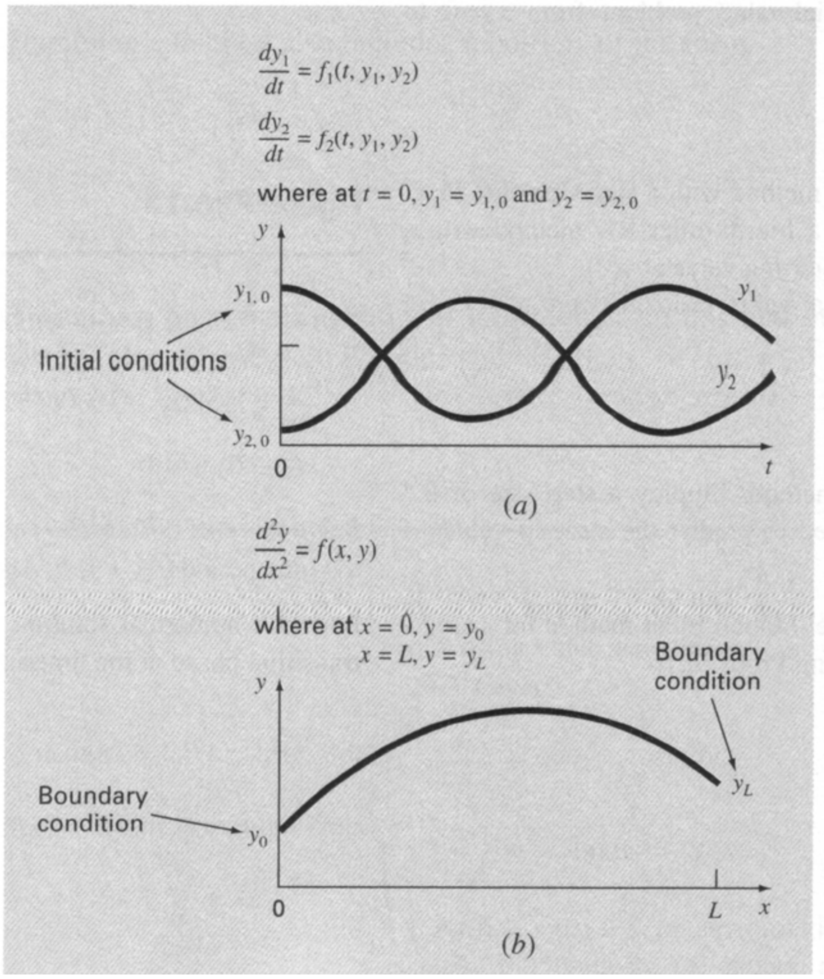
$$y'_1 = f_1(x,t)$$

$$y'_2 = f_2(x,t)$$

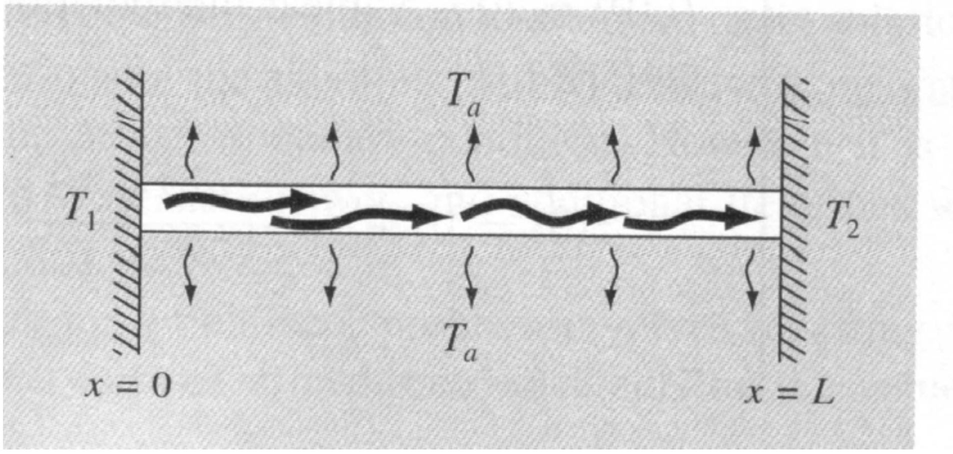
$$t = 0$$

$$y_1 = y_{1,0}$$

$$y_2 = y_{2,0}$$



Rys. 2. a) Warunki brzegowe określone w jednym punkcie niezależnej zmiennej, b) warunki brzegowe określone w dwóch różnych miejscach niezależnej zmiennej



Rys. 3. Zadanie dane powyżej rozwiązujemu różnymi metodami:

Metoda różnic skończonych:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + h'(T_\alpha - T) = 0 \tag{5.7}$$

$T(0) = T_1$

$T(L) = T_2$

gdzie h'- wsp. przewodności
T_α- temp. otoczenia

dane:
L=10, $T_\alpha=20^0$, $T_1=40$, $T_2=200$, h'=0,01
Rozwiązanie:

$T = 73{,}452e^{0{,}1x} - 53{,}4523e^{-0{,}1x} + 20$

Metoda 'shooting'

Przekształca równanie różniczkowe brzegowe do równania różniczkowego początkowego.

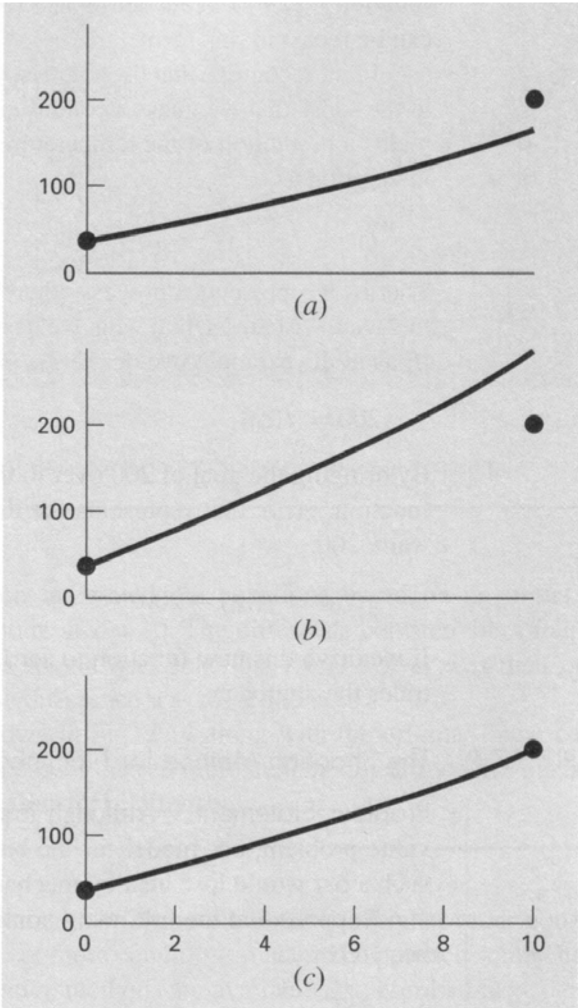
$$\frac{dT}{dx} = z$$

$$\frac{dz}{dx} = h'(T - T_\alpha)$$

początkowo przyjmujemy (zgadujemy) $z(0)=10$

stosując metodę R-K IV rzędu o kroku 2, otrzymaliśmy
$T(10)=168{,}3797$
dla
$z(0)=20$
$T(10)=285{,}8980$
dokonując liniowej interpolacji :

$$z(0)=10+\frac{20-10}{285{,}8980-168{,}3797}(200-168{,}3797)=12{,}6907$$



Rys. 4. Metoda „shooting” a) pierwszy strzał, b) drugi strzał, c) końcowy dokładny strzał.

Metoda różnic skończonych

porzybliżona różnica skończona dla drugiej pochodnej ma postać

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}$$

po podstawieniu (5.7) otrzymamy

$$\frac{T_{i+1}-2T+T_{i-1}}{\Delta x^2}-h'(T_i-T_a)=0$$
$$T_{i+1}-2T_i+T_{i-1}-\Delta x^2 h' T_i+\Delta x^2 h' T_a=0$$
$$T_{i-1}-(2+h'\Delta x^2)T_i+T_{i+1}=-h'\Delta x^2 T_a$$

jeżeli $\Delta x=2$

$$\begin{bmatrix} 2,04 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2,04 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2,04 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2,04 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 40,8 \\ 0,8 \\ 0,8 \\ 200,8 \end{bmatrix}$$

$$T=\left[65.9698, 93.7785, 124.5382, 159.4795\right]$$

Zestawienie wyników otrzymanych przy zastosowaniu powyższych metod

x		metoda ‘shooting’	metoda różnic skończonych
0	40	40	40
2	65.9518	65.9520	65.9698
4	93.7478	93.7481	93.7785
6	124.5036	124.5039	124.5382
8	159.4334	159.4538	159.4795
10	200	200	200