Michał PŁOTKOWIAK, Adam ŁODYGOWSKI
Konsultacje naukowe dr inz. Witold Kąkol
Poznań 2002/2003

METODY KOMPUTEROWE 6

METODA RÓŻNIC SKOŃCZONYCH

Metoda różnic skończonych (MRS) powstała jako przybliżona dyskretna metoda rozwiązywania problemów brzegowych opisanych równaniami różniczkowymi. Istota tej metody polega na zamianie operatorów różniczkowych na odpowiednie operatory różnicowe, określone na dyskretnym zbiorze punktów izolowanych; zbiór ten nazywamy siatką, a jego elementy węzłami. Dzięki takiej aproksymacji funkcji i jej pochodnych, wyjściowe zagadnienie brzegowe sprowadza się do układu równań algebraicznych, w których niewiadomymi są (na ogół) dyskretne wartości funkcji.

Niech w obszarze Ω o brzegu δΩ będzie dany problem:

$$\begin{aligned} A \cdot u = f \xrightarrow{dla} P \in \Omega \\ B \cdot u = g \xrightarrow{dla} P \in \delta\Omega \end{aligned} \tag{6.1}$$

gdzie $u = u(P)$ jest poszukiwaną funkcją punktu P, zaś A i B są operatorami różniczkowymi.

m MRS wartość operatora w punkcie P_k przedstawia się w przybliżeniu jako liniową kombinację wartości funkcji (w najprostszym przypadku)

$$Du(P_k) \approx \sum \alpha_i u(P_{k+i}) \tag{6.2}$$

w punktach P_{k+i} wybranych z otoczeniem punktu P_k.
Wyrażenie to nazywamy schematem różnicowym operatora D w punkcie P_k. Punkty P_{k+i} wykorzystywane do utworzenia schematu różnicowego dla danego operatora różniczkowego i zwane dalej węzłami, tworzą konfigurację określaną mianem gwiazdy. Jej węzłami centralnymi jest punkt P_k. Kształt gwiazdy zależy od

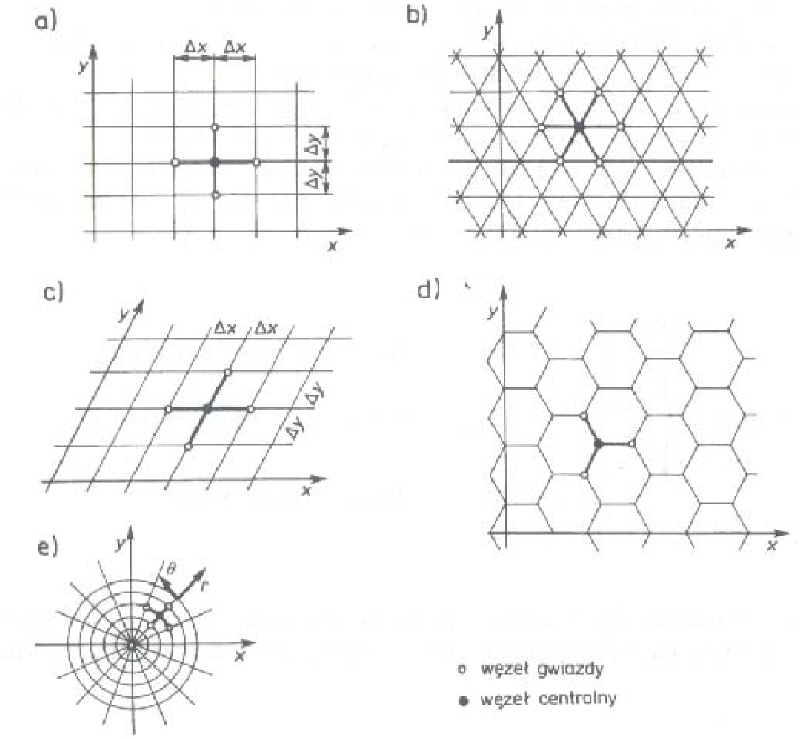
- postaci i rzędu operatora różniczkowego zamienianego na operator (schemat) różnicowy,
- od przyjętych stopni swobody,
- założonej aproksymacji,

- siatki czyli zbioru wszystkich węzłów.

Jeżeli wykorzystamy operatory różnicowe dla wszystkich węzłów wewnętrznych oraz dla węzłów brzegowych to otrzymamy układ równań algebraicznych przedstawionych w zapisie macierzowym jako:

$$Au = f \tag{6.3}$$

w których niewiadomymi są wartości węzłowe $u(P_k)$, k=1,...n



Rys. 1. Przykłady regularnych siatek dwuwymiarowych

Drugą pochodną przedstawiamy w postaci:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{T_{(i+1)} - 2T_i + T_{(i-1)}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{T_{(i+1)} - 2T_i + T_{(i-1)}}{\Delta x^2} - h'(T_i - T_a) = 0$$

$$T_{(i+1)} - 2T_i + T_{(i-1)} - \Delta x^2 h' T_i + \Delta x^2 h' T_a = 0 \tag{6.4}$$

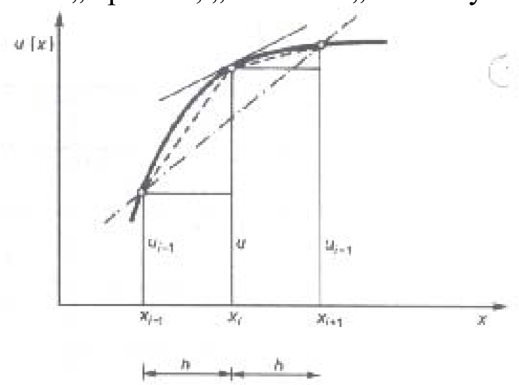
$$T_{(i-1)} - (2\Delta x^2 h')T_i + T_{(i+1)} = -\Delta x^2 h' T_a$$

$$i = 1$$

$$i = 2$$

M

Ilorazy różnicowe „wprzód", „wstecz" i „centralny"



Rys. 2. Budowa ilorazów różnicowych „w przód", „wstecz" i „centralnego"

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_i} \equiv u_i' \equiv \left| \begin{array}{l} \dfrac{u_{i+1} - u_i}{h} + 0(h) \rightarrow \text{"}WPRZÓD\text{"} \\ \dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + 0(h^2) \rightarrow \text{"}CENTRALNY\text{"} \\ \dfrac{u_i - u_{i-1}}{h} + 0(h) \rightarrow \text{"}WSTECZ\text{"} \end{array} \right. \tag{6.5}$$

Wzory różnicowe dla wyższych pochodnych funkcji można otrzymać przez składanie wzorów na pierwsze pochodne. Np. dla drugiej pochodnej mamy:

$$\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x=x_i} \equiv u_i'' \equiv \frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{h^2}+0(h) \qquad (6.6)$$