Michał PŁOTKOWIAK, Adam ŁODYGOWSKI
Konsultacje naukowe dr inz. Witold Kąkol
Poznań 2002/2003

METODY KOMPUTEROWE 7

Znajdowanie wartości i wektorów własnych macierzy.

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{B}$$

$$\det|A| \neq 0$$ układ równań jednorodnych

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = 0$$

gdzie A – macierz, 2D $[a_{ij}]$,
x – wektor $[x_i]$

$$(a_{11} - \lambda) \cdot x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0$$
$$a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda) \cdot x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0$$

λ - wartości własne wartości charakterystyczne macierzy A

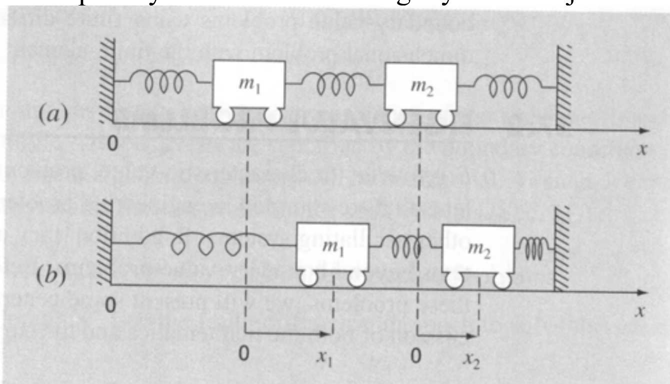
$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0$$

$$\text{lub}\,(\underline{A} - \lambda \underline{I})\underline{x} = \underline{0}$$

Przykład 1

Niech będzie dany układ 2 mas połączonych ze sobą sprężynkami o sztykwności k. Napiszmy równania równowagi dynamicznej



Rys. 1. Rysunek do zadania

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{dx_1^{\ 2}}{dt^2} + kx_1 = k(x_2 - x_1) \\ m_2 \dfrac{dx_2^{\ 2}}{dt^2} + k(x_2 - x_1) + kx_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{dx_1^{\ 2}}{dt^2} k(2x_1 - x_2) = 0 \\ m_2 \dfrac{dx_2^{\ 2}}{dt^2} + k(2x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

Wartość odchylania się ciężarków przedstawia równanie harmoniczne:

$$x_i = A_i \sin(\varpi t)$$

$$x_i = -A\varpi^2 \sin(\varpi t)$$

$$\varpi = \frac{2\pi}{T}$$

Podstawiamy do naszego układu równań:

$$\begin{cases} -m_1 \cdot A_1\varpi^2 \sin(\varpi t) + k[2A_1 \sin(\varpi t) - A_2 \sin(\varpi t)] = 0 \\ -m_2 \cdot A_2\varpi^2 \sin(\varpi t) + k[2A_2 \sin(\varpi t) - A_1 \sin(\varpi t)] = 0 \end{cases}$$

Niewiadome A_1, A_2 ?

$$\begin{cases} -m_1 \cdot A_1\varpi^2 + 2A_1k - A_2k = 0 \\ -m_2 \cdot A_2\varpi^2 + 2A_2k - A_1k = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2k - m_1\varpi^2)A_1 - kA_2 = 0 / \cdot m_1 \\ kA_1 + (2k - m_2\varpi^2)A_2 = 0 / \cdot m_2 \end{cases}$$

Przyjmijmy m_1=m_2=40kg, k=200N/m

$$\begin{cases} \left(\dfrac{2k}{m_1} - \varpi^2\right)A_1 - \dfrac{k}{m_2}A_2 = 0 \\ \dfrac{k}{m_2}A_1 + \left(\dfrac{2k}{m_2} - \varpi^2\right)A_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(10-\varpi^2\right)A_1 - 5A_2 = 0 \\ 5A_1 + \left(10-\varpi^2\right)A_2 = 0 \end{cases}$$

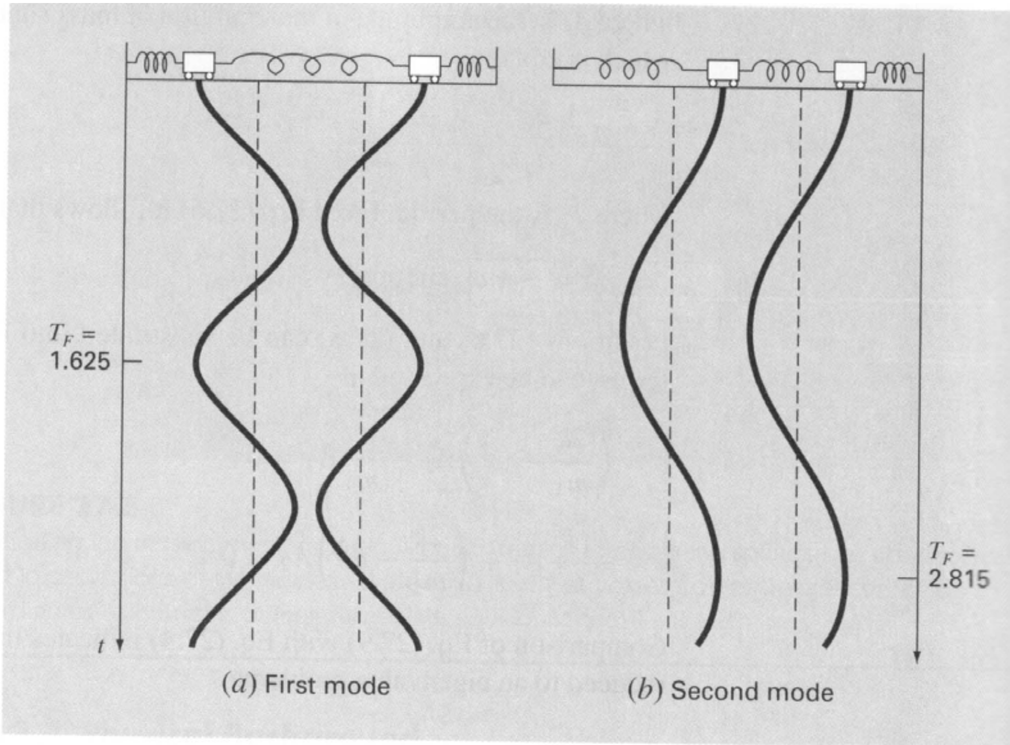
$$\det|A| = 0$$

$$\left(\varpi^2\right)^2 - 20\varpi^2 + 75 = 0$$

$$\varpi_1^{\ 2} = 15 \Rightarrow A_1 = -A_2$$

$$\varpi_2^{\ 2} = 5 \Rightarrow A_1 = A_2$$

Graficzne przedstawienie wyników (układ antysymetryczny I symetryczny):



Rys. 2. Wyniki liczonego zadania a) A_1=-A_2 wykres antysymetryczny, b) A_1=A_2 wykres symetryczny.

Okresy T zaznaczone na rysunku 2.

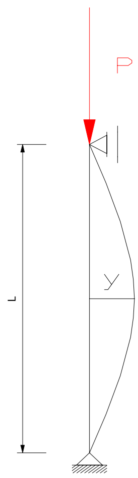
Przykład 2

Siła działająca na pręt- ściskanie osiowe pręta

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow M = P \cdot y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Py}{EI}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - f^2 y = 0$$



$$y = A\sin fx + B\sin fx$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

Rozwiązywanie

$$y(l) = A\sin fl + B\sin fl = 0$$

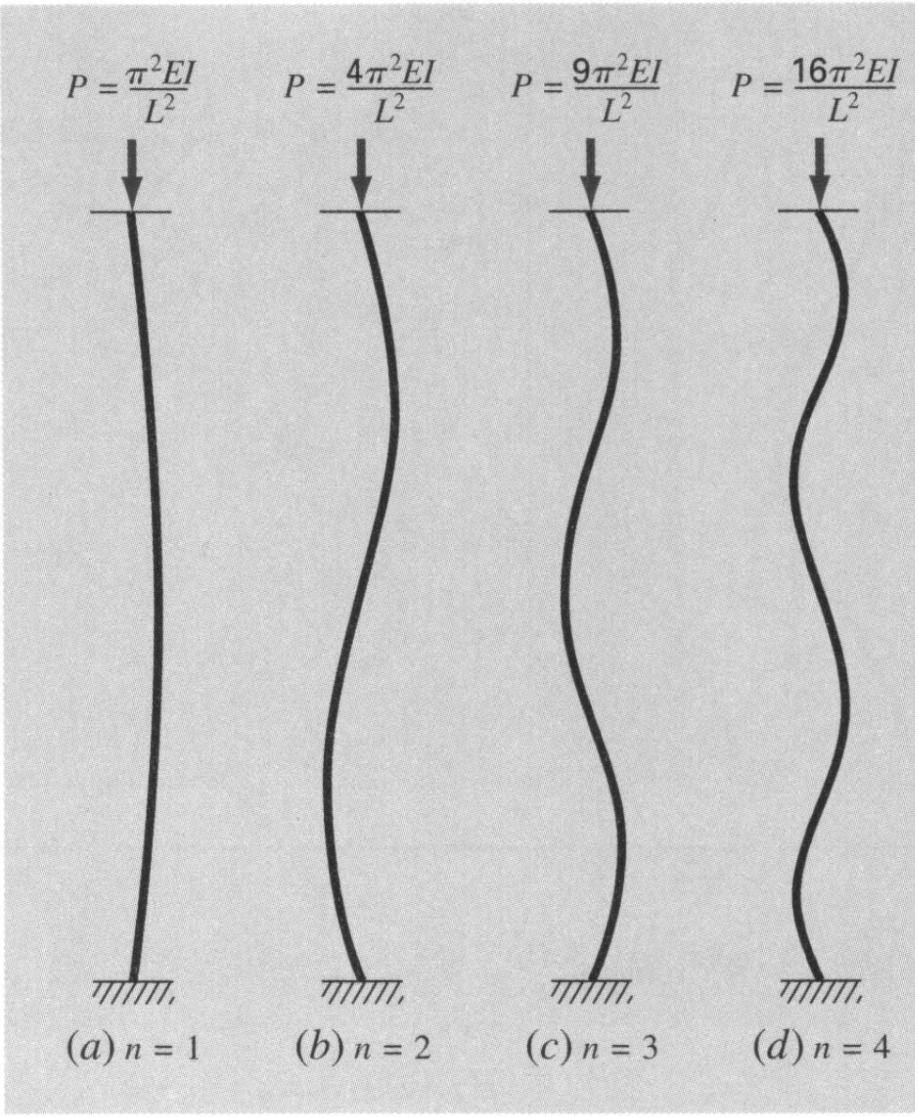
$$A\sin fl = 0 \Rightarrow \sin fl = 0$$

$$f \cdot l = n\pi$$

$$f = \frac{n\pi}{l}$$

$$f^2 = \frac{P}{EI}$$

$$P = f^2 EI = \frac{n^2\pi^2}{l^2} EI$$



Rys. 3. Wartości siły krytycznej w zależności od postaci wyboczenia dla n=1, 2, 3, 4