

Michał PŁOTKOWIAK, Adam ŁODYGOWSKI
Konsultacje naukowe dr inż. Witold Kąkol
Poznań 2002/2003

METODY KOMPUTEROWE 11

METODA WAŻONYCH REZIDUÓW

Metoda ważonych reziduów jest silnym narzędziem znajdowania przybliżonych rozwiązań równań różniczkowych często spotykanych w problemach inżynierskich.

Wprowadzenie

Równania różniczkowe w ogólny sposób można zapisać jako:

$$\begin{aligned} A(\underline{\phi}) = 0 & \quad \text{dziedzina } D \frac{d}{dx}(\mathbb{K}) \\ B(\underline{\phi}) = 0 & \quad \text{warunek brzegowy} \end{aligned} \quad \begin{aligned} x(x_a) = \varphi_A \\ x(x_b) = \varphi_B \end{aligned} \quad (11.1)$$

gdzie ϕ - rozwiązanie dokładne.

Na przykład równanie postaci:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \lambda^2 \phi = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (11.2)$$

z warunkiem brzegowym:

$$\phi(x, y) = \phi_b \quad (11.3)$$

Oznaczmy rozwiązanie przybliżone jako $\tilde{\phi}$:

$$\begin{aligned} A(\tilde{\phi}) &\neq 0 \\ A(\tilde{\phi}) &= R \end{aligned} \quad (11.4)$$

stąd R nazywamy residuum (reszta, błąd).
Ponieważ rozwiązanie dokładne pomnożone przez macierz daje 0:

$$A(\underline{\tilde{\phi}}) = 0 \quad (11.5)$$

to samo rozwiązanie pomnożone przez pewną liczbę (funkcję):

$$v \cdot A(\underline{\tilde{\phi}}) = 0 \quad (11.6)$$

Operator mnożymy przez v (liczbę, funkcję).
Całkujemy po obszarze (dziedzinie D):

$$\int_D A(\underline{\tilde{\phi}}) dD = 0$$
$$\int_D v \cdot A(\underline{\tilde{\phi}}) dD = 0 \quad (11.7)$$

Z racji, że rozwiązanie przybliżone jest różne od zera to całka z tego rozwiązania również spełnia zależność:

$$\int_D v \cdot A(\underline{\tilde{\phi}}) dD \neq 0 \quad (11.8)$$

CEL METODY WAŻONYCH REZIDUÓW

Celem metody jest dobranie funkcji v , którą zastępuje tu funkcja wagowa w_i , aby spełniony był warunek:

$$\int_D w_i \cdot A(\underline{\tilde{\phi}}) dD = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (11.9)$$

Wybór funkcji wagowych różnicuje wersje metody ważonych reziduów np.:
w metodzie RITZA przyjmujemy funkcję $w_i=1$, a $\tilde{\phi}$ spełnia dodatkowe warunki brzegowe.

Warunki brzegowe dla całki (11.9):

$$\begin{aligned}
 B(\tilde{\phi}) &= R_b \\
 \int_D w_i \cdot R_b dD &= 0 \\
 \int_D w_i \cdot R_b dD + \int_D w_i \cdot R dD &= 0
 \end{aligned}
 \tag{11.10}$$

Zakładamy, że $\tilde{\phi}$ spełnia warunki brzegowe.
Rozwiązanie dokładne:

$$\begin{aligned}
 A(\tilde{\phi}) &= 0 \\
 \int_D w_i \cdot R dD &= 0
 \end{aligned}
 \tag{11.11}$$

Metoda ważonych reziduíw:

$$\int_D w_i \cdot R_b dD + \int_D w_i \cdot R dD = 0
 \tag{11.12}$$

Funkcje wagowe dobieramy w ten sposób, aby suma możliwych błędów, po wycalkowaniu po całej dziedzinie wynosiła 0.

Przykład:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + x^2 \varphi &= 0 & \varphi(x_a) &= \varphi_a & x_a &= 1 \\
 & & \varphi(x_b) &= \varphi_b & x_b &= 3
 \end{aligned}$$

Rozwiązanie dokładne:

$$y = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)$$

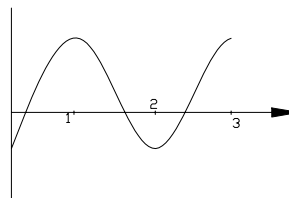
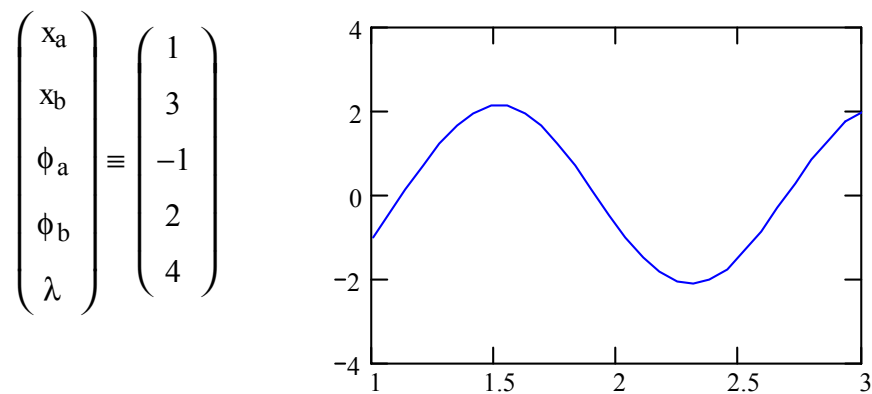


Figure 1: Exact Solution



Rozwiązanie przybliżone przyjmujemy w postaci:

$$\varphi(x) = \Theta_1(x) + \Theta_2(x)\alpha_1 + \Theta_3(x)\alpha_2$$

Θ - ma spełniać warunki brzegowe $\Theta(x_1) = -1$ i być możliwie najmniejszego rzędu:
 $\Theta(x_2) = 2$

$$\Theta(\alpha) = \begin{vmatrix} \varphi_a + \frac{x - x_a}{x_b - x_a}(\varphi_b - \varphi_a) \\ (x - x_a)(x_b - x_a)x \\ (x - x_b)(x - x_a) \end{vmatrix}$$

$$\Theta(x) = \Theta(1, \alpha_1, \alpha_2)^T = [\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Do równania różniczkowego podstawiamy przybliżone funkcje:

$$\frac{d^2\Theta(x)}{dx^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha x - 2x_b - 2x_a \\ 2 \end{bmatrix} \alpha \quad R(x, \alpha_1, \alpha_2) = \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda^2\Theta \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

Postulujemy by:

$$\int_D w_i \cdot R dD = 0 \quad i = 1, 2 \quad \text{i- liczba funkcji próbnych}$$

$$\int_{x_a}^{x_b} w_i \cdot R dx = 0$$

$$R = \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda^2\Theta \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

METODA PUNKTU KOŁOKACJI

W tej wersji metody ważonych rezyduów za funkcję wagi przyjmuje się wyrażenie:

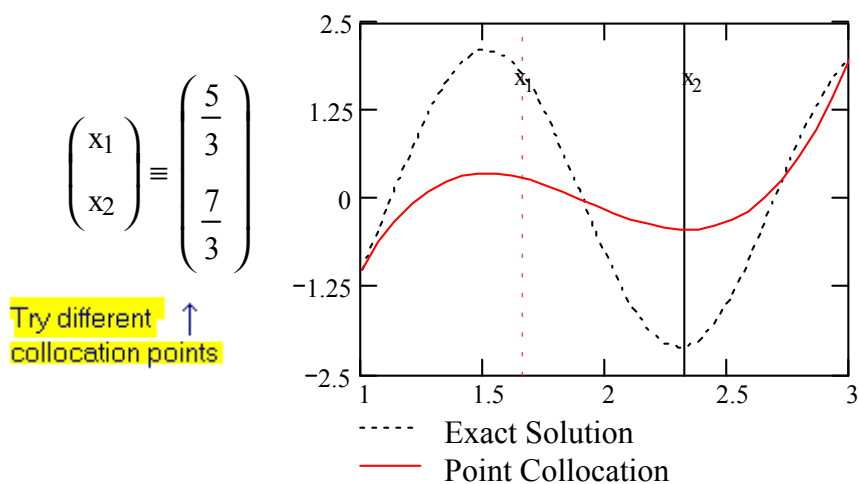
$$w_i = \delta(x - x_i) = \begin{cases} 0 & x \neq x_i \\ 1 & x = x_i \end{cases} \quad (11.13)$$

gdzie δ pełni funkcję delty Kroneckera.

c.d. przykładu

$$\left. \begin{array}{l} \int_1^3 R(x, \alpha_1, \alpha_2) dx = 0 \\ \int_1^3 R(x, \alpha_1, \alpha_2) dx = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \alpha_1 = 2,919 \\ \alpha_2 = -5,183 \end{array}$$

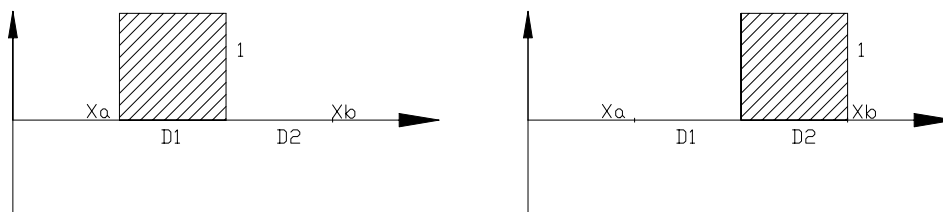
Figure 1: Solution Using the Point Collocation Method

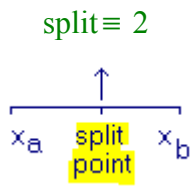


METODA PODOBSZARÓW KOLOKACJI:

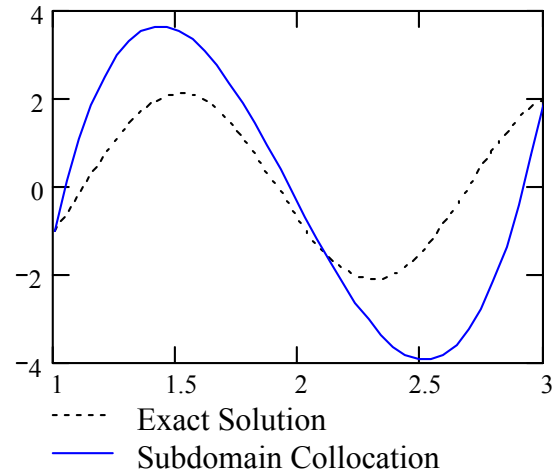
Funkcje wagi w tej metodzie dobiera się w taki sposób, że ich wartości są równe 1 w danej części obszaru D_i , natomiast w pozostałej części obszaru są równe 0. Podobszarów kolokacji definiuje się tyle ile jest przyjętych funkcji próbnych.

$$w_i \begin{cases} 1 & x \in D \\ 0 & x \notin D \end{cases} \quad (11.14)$$





$$\lambda \equiv 4 \quad \frac{d^2 \cdot \phi}{d \cdot x^2} + \lambda^2 \cdot \phi = 0$$



METODA GALERKINA

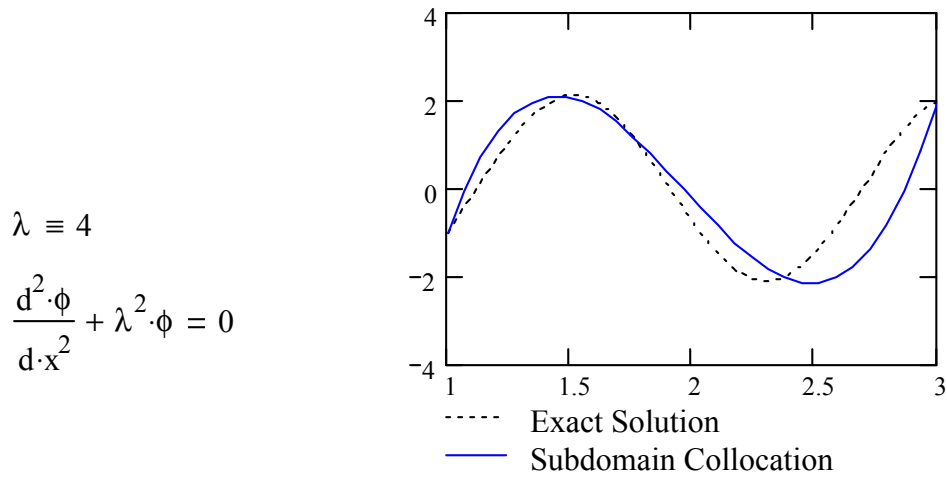
W metodzie Galerkina rolę funkcji wagowej pełni funkcja próbna. Zakładamy więc, że $w_i(x) = Q_{i+1}(x)$.

$$\underline{\varnothing}(x) = \Theta(x) + \Theta_2(x)\alpha_1 + \Theta_3(x)\alpha_2 + \dots + \Theta_{m+1}(x)\alpha_m \quad (11.15)$$

$\underline{\varnothing}(x)$ - funkcja próbna określająca rozwiązanie przybliżone.

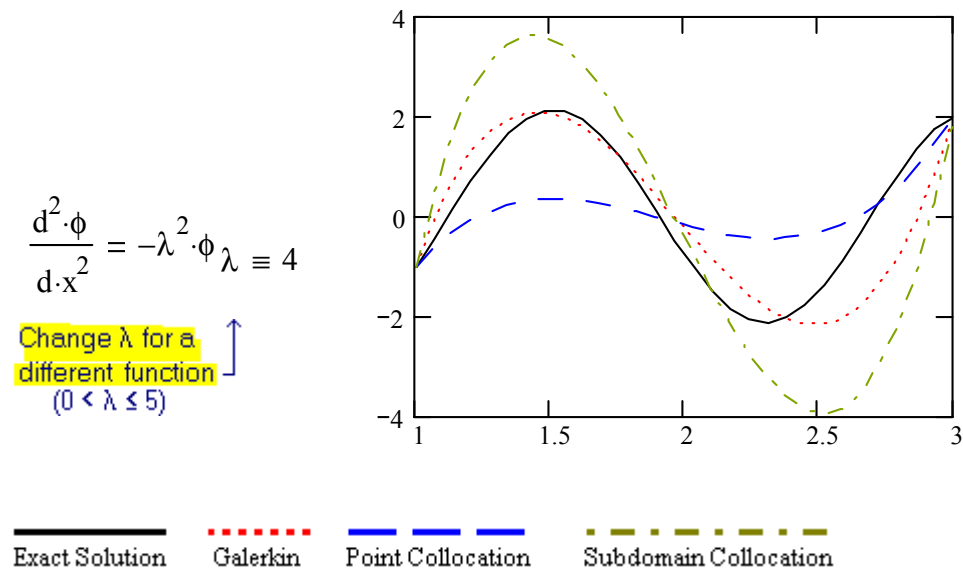
$$w_i(x) = Q_{i+1}(x)$$

Figure 1: Solution Using Galerkin's Method



PORÓWNANIE WSZYSTKICH METOD:

Figure 1: Plot of the Approximate Solution



c.d. kolejny wykład

W przypadku wątpliwości zapraszam na stronę instytutową

www.ikb.poznan.pl

gdzie można znaleźć skrypt PP

**Tomasz Łodygowski, Witold Kąkol „Metoda elementów skończonych w
wybranych zagadnieniach mechaniki konstrukcji inżynierskich”**

W rozdz.3 można znaleźć więcej na ten temat.