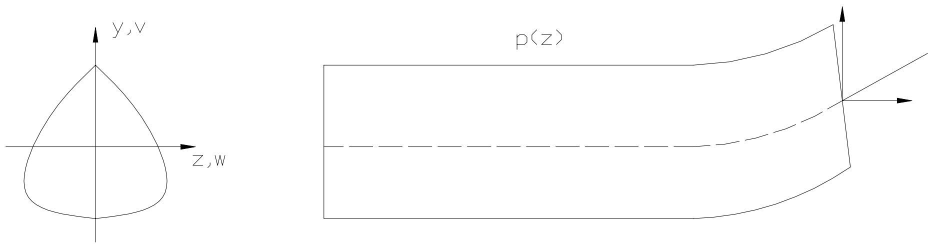
Michał PŁOTKOWIAK, Adam ŁODYGOWSKI
Konsultacje naukowe dr inz. Witold Kąkol
Poznań 2002/2003

METODY KOMPUTEROWE 14

Metoda elementów skończonych dla zginania belki



Zgodnie z prawem płaskich przekrojów Bernoulliego przekrój pozostaje płaski. Ponadto mamy:

$$\int ydA = 0$$
$$\phi = \frac{dv}{dy} = v' \tag{14.1}$$

Tak więc dla belki można zapisać:

$$w = w_0 - y\phi = w_0 - yv'(z) \tag{14.2}$$

Wektor przemieszczeń ma zatem postać:

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v(z) \\ w_o(z) - yv'(z) \end{bmatrix} \tag{14.3}$$

Odkształcenia takiej belki można zapisać w postaci:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_0' - yv'' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14.4}$$

Zatem jedyne niezerowe odkształcenie wynosi:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= w'_o - yv'' \\ \sigma_{zz} &= E \cdot \varepsilon_{zz} = (w_0' - yv'')E \end{aligned} \tag{14.5}$$

Korzystając z równania pracy wirtualnej i zależności (14.5) mamy:

$$\int_0^l \int_A E \cdot (w_0' - y \cdot v'') \cdot (\overline{w_0}' - y\overline{v}'') dA dz = \int_0^l p(z)\overline{v} dz \tag{14.6}$$

Należy pamiętać zależności na moment bezwładności i wzór na całkowanie przez części:

$$\begin{aligned} &\int y^2 dA = I \\ &\int u dv = uv - \int v du \end{aligned} \tag{14.7}$$

Przekształcając odpowiednio wzór (14.6) otrzymamy:

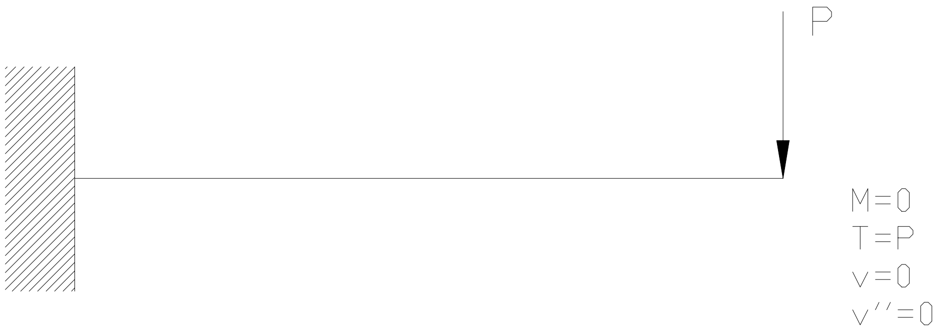
$$\int_0^l \left(E \cdot A \cdot w'_0 \cdot \overline{w}_0' + EI \cdot v'' \cdot \overline{v}'' - p\overline{v}\right) dz = 0 \tag{14.8}$$

$$\int_0^l \left(EI \cdot v'' \cdot \overline{v}'' - p\overline{v}\right) dz = 0 \tag{14.9}$$

$$(E \cdot I \cdot v'')'' = p(z) \tag{14.10}$$

Będziemy zakładać, że to równanie różniczkowe nie można rozwiązać analitycznie. Zastosujemy metodę elementów skończonych.

Np. mamy następującą belkę i odpowiednie warunki brzegowe:



(14.11)

Przyjmujemy funkcje próbne w postaci:

$$\underline{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$$
$$v(z) = v(0)\cdot N_1(z) + v'(0)\cdot N_2(z) + v(l)\cdot N_3(z) + v'(l)\cdot N_4(z)$$
$$N_1 = \frac{l}{4}\left(2 - 3\cdot\xi + \xi^3\right)$$
$$N_2 = \frac{l}{8}\left(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3\right) \tag{14.12}$$
$$N_3 = \frac{l}{4}\left(2 + 2\cdot\xi - \xi^3\right)$$
$$N_4 = \frac{l}{8}\left(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3\right)$$

Gdzie:

$$R = (1+\xi)\frac{l}{2}$$
$$\xi = \frac{2z}{l} - 1 \tag{14.13}$$

$$v = N_1\alpha_1 + N_2\alpha_2 + N_3\alpha_3 + N_4\alpha_4 = \underline{N}\alpha^T \tag{14.14}$$

$$\int_0^l \left(EI \cdot v''\cdot\bar{v}''\right)dz = \frac{8}{l^3}\int_{-1}^{+1} \underline{d}^T \left(N''\right)^T EI\,\underline{N}''\bar{\underline{d}}\,d\xi = \underline{d}^T\,\underline{u}\bar{\underline{d}}$$
$$\underline{\kappa} = \frac{8EI}{l^3}\int_{-1}^{1} \left(\underline{N}''\right)^T \cdot N''\,d\xi \tag{14.15}$$

Otrzymaliśmy macierz sztywności:

$$\underline{u} = \frac{2EI}{l^3}\begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \tag{14.16}$$

$$\int_0^l p\bar{v}dz = \frac{l}{2}\int_{-1}^{1} p(\xi)\underline{N}'\bar{\underline{d}} \cdot d\xi$$
$$\underline{p} = \frac{l}{2}\int_{-1}^{1} \underline{N}p(\xi)d\xi \tag{14.16}$$