

## 14.



## 14. NOŚNOŚĆ GRANICZNA

## 14.1. Wstęp

Nośność graniczna – wartość obciążenia, przy którym konstrukcja traci zdolność do jego przenoszenia i staje się układem geometrycznie zmiennym.

Zastosowanie teorii nośności w praktyce pozwala na pełniejsze wykorzystanie konstrukcji, przy zachowaniu granic bezpieczeństwa.

## 14.2. Przegub plastyczny

Rozważania ograniczmy do zginania prętów sprężysto-plastycznych. Pręty pod wpływem narastających naprężeń osiągają stan plastyczności (po osiągnięciu  $\sigma = \sigma_0$ ). Towarzyszy temu deformacja belki - występuje obrót sąsiednich części pręta względem osi obojętnej przekroju. W przekroju krytycznym (maksymalna wartość momentu zginającego) następuje bardzo duża koncentracja odkształceń na małym obszarze. Przyjmuje się, że w przekroju krytycznym powstał przegub plastyczny. Charakteryzuje się on możliwością obrotu oraz tym, że przenosi moment zginający równy momentowi plastycznemu  $M_0$ .

Przeguby plastyczne powstają w liczbie  $n+1$  ( $n$ -stopień statycznej niewyznaczalności układu)

Określenie obciążenia granicznego:

Do określenia obciążeń granicznych służą dwa podejścia:

- Podejście statyczne – dla którego spełnione muszą być następujące warunki:
  - warunek równowagi wewnętrznej i zewnętrznej
  - w żadnym przekroju nie może być przekroczony warunek granicznego naprężenia

$$-M_0 \leq M(x) \leq M_0 \quad (14.1)$$

- Podejście kinematyczne

Nie interesują nas warunki równowagi lecz przyjęcie przez układ dopuszczalnego pola przemieszczeń (powstanie mechanizmu) – niezerowe krzywizny i kąty obrotu w przegubie plastycznym

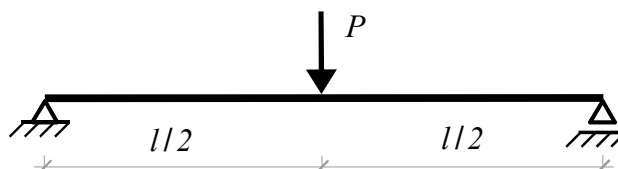
Musi istnieć dodatnia moc obciążeń zewnętrznych.

Kompletne rozwiązanie polega na spełnieniu obu warunków: statycznego i kinematycznego

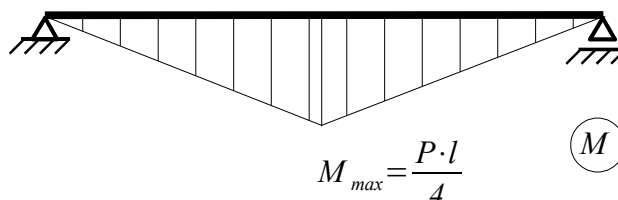
### 14.3. Zadanie 1

#### 14.3.1. Podejście statyczne

Rozpatrujemy belkę z materiału sprężysto - idealnie plastycznego, obciążoną siłą skupioną  $P$  w środku swojej rozpiętości (Rys. 14.1.).



Rys. 14.1. Belka swobodnie podparta



Rys. 14.2. Wykres momentów dla belki od obciążenia siłą  $P$

Znana jest wartość naprężenia plastycznego  $\sigma_0$ .

Układ osiągnie niebezpieczny stan gdy (Rys. 14.2.):

$$M_0 = \frac{Pl}{4} \quad (14.2)$$

Siła graniczna wynosi:

$$P_{gr} = \frac{4M_0}{l} \quad (14.3)$$

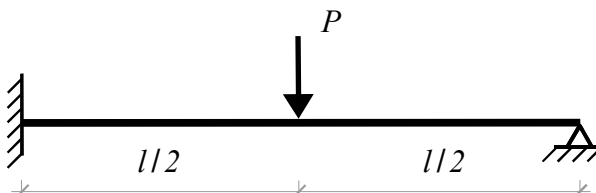
#### 14.3.2. Podejście statyczne

Potrzebne jest określenie położenia przekroju krytycznego. Przegub plastyczny wystąpi pod siłą  $P$ . W przypadku trudności określania miejsca jego występowania trzeba tak go przemieszczać, aby ostateczny wynik pokrył się z wynikiem z podejścia statycznego.

## 14.4. Zadanie 2

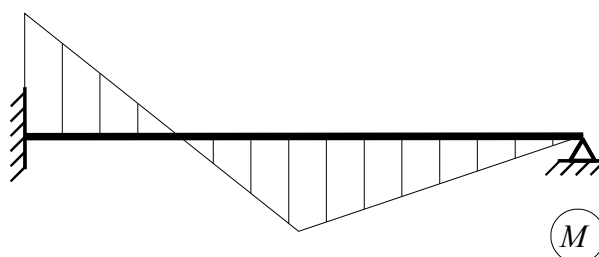
## 14.4.1. Podejście statyczne

Rozpatrzmy belkę wspornikową podpartą na jednym końcu (Rys. 14.3.) i obciążoną siłą skupioną  $P$ .



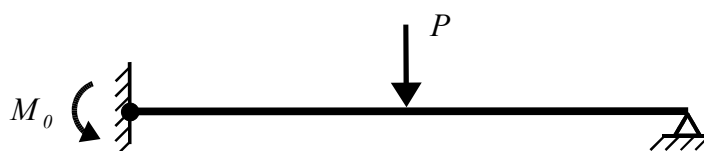
Rys. 14.3. Belka wspornikowa podparta na prawym końcu.

Wykres momentów od obciążenia  $P$  przedstawiono na Rys. 14.4.

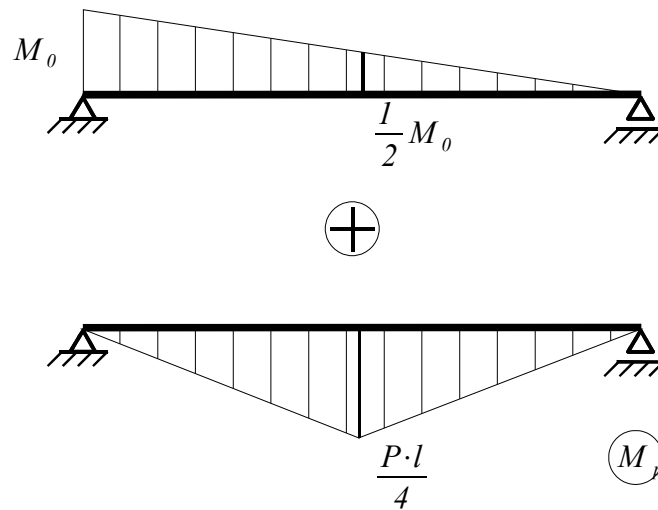


Rys. 14.4. Wykres momentów od obciążenia siłą skupioną  $P$  dla belki wspornikowej podpartej na prawym końcu

Gdy na lewym końcu belki w utwierdzeniu pojawi się przegub plastyczny (Rys.14.5.) wykresy momentów będą wyglądać następująco (Rys. 14.6.):



Rys. 14.5. Pojawienie się przegubu plastycznego w utwierdzeniu



Rys. 14.6. Wykres momentów

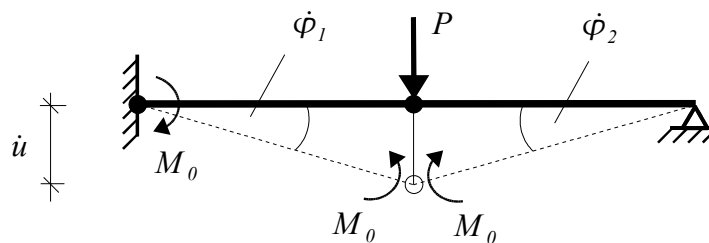
Jeżeli teraz w środku rozpiętości belki dojdzie do uplastycznienia się przekroju (pojawienie się przegubu plastycznego) to belka ulegnie zniszczeniu, dlatego:

$$\frac{P \cdot l}{4} - \frac{l}{2} \cdot M_0 = M_0 \quad (14.4)$$

$$P_{gr} = 6 \cdot \frac{M_0}{l} \quad (14.5)$$

#### 14.4.2. Podejście kinematyczne

Bazuje na tym, że belka tworzy łańcuch kinematyczny (mechanizm).



Rys. 14.7. Belka – mechanizm

$$\dot{\phi}_1 = \frac{2 \dot{u}}{l}$$

$$\dot{\phi}_2 = \frac{2 \dot{u}}{l}$$

Wprowadzamy pojęcie mocy, mówiące o tym, że moc sił wewnętrznych jest równa mocy sił zewnętrznych (wzór 14.6.)

$$\dot{L}_z = \dot{L}_w \quad (14.6)$$

Moc jest iloczynem siły oraz prędkości przemieszczenia, co możemy zapisać kolejno wzorami

$$\dot{L}_z = P \cdot \dot{u} \quad (14.7)$$

$$\dot{L}_w = M_0 \cdot \dot{\phi}_2 + M_0 \cdot \dot{\phi}_2 + M_0 \cdot \dot{\phi}_1 \quad (14.8)$$

Po podstawieniu wzorów 14.7. oraz 14.8. do wzoru 14.6. otrzymamy:

$$P \cdot \dot{u} = M_0 \cdot \frac{2\dot{u}}{l} + M_0 \cdot \frac{2\dot{u}}{l} + M_0 \cdot \frac{2\dot{u}}{l} \quad (14.9)$$

Dokonując odpowiednich przekształceń, uzyskamy wartość siły krytycznej:

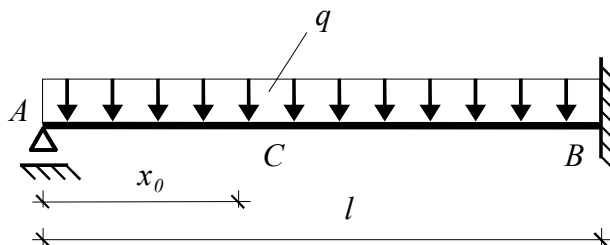
$$P_{gr} = \frac{6 M_0}{l} \quad (14.10)$$

Wartość 14.10. jest identyczna z otrzymaną z podejścia statycznego (14.5.)

### 14.5. Zadanie 3

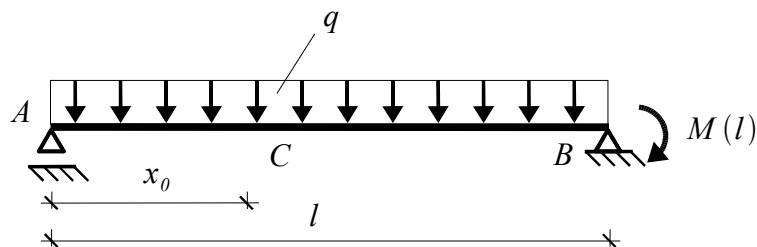
#### 14.5.1. Podejście statyczne

Rozpatrzmy belkę wspornikową podpartą podporą przesuną na lewym końcu (Rys. 14.8.) i obciążoną siłą równomiernie rozłożoną  $q$ .

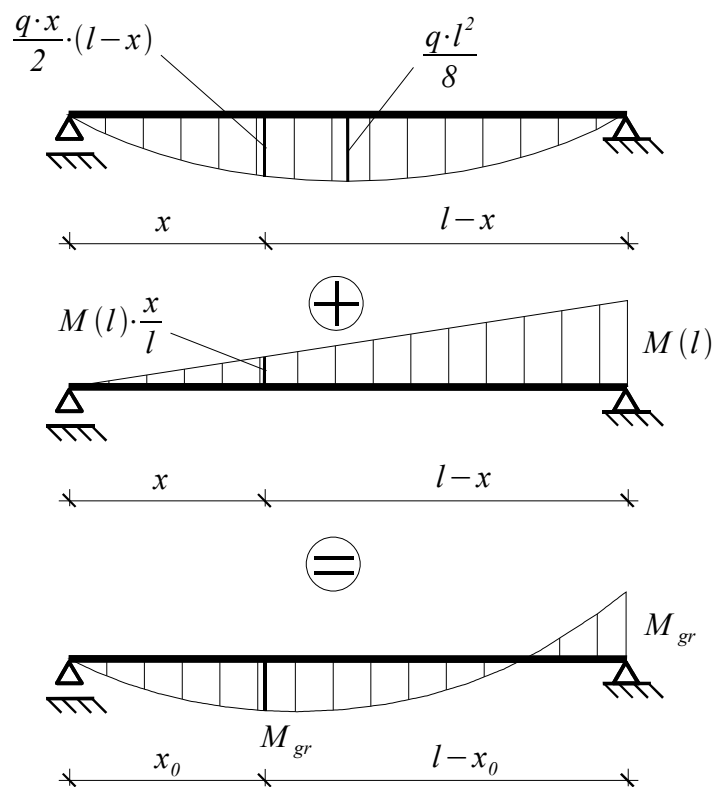


Rys. 14.8. Belka wspornikowa podparta przegubem przesunym i obciążona siłą równomiernie rozłożoną  $q$ .

Gdy na prawym końcu belki w utwierdzeniu pojawi się przegub plastyczny (Rys.14.9.) wykresy momentów będą wyglądać następująco (Rys. 14.10.):



Rys. 14.9. Pojawienie się przegubu plastycznego w utwierdzeniu



Rys. 14.10. Wykres momentów

Warunek stanu granicznego musi być spełniony w punkcie B i C belki. Położenie punktu C określa nieznaną parametr  $x_0$ .

Równanie momentu możemy zapisać w następujący sposób:

$$M(x) = \frac{q \cdot x}{2} \cdot (l - x) - M(l) \cdot \frac{x}{l} \quad (14.11)$$

Poszukujemy maksymalnej wartości funkcji (14.11), co możemy zapisać:

$$\frac{dM(x)}{dx} \Big|_{x=x_0} = \frac{q \cdot l}{2} - q \cdot x_0 - \frac{M(l)}{l} = 0 \quad (14.12)$$

Następnie przyjmujemy:

$$M(x_0) = M_{gr} \quad (14.13)$$

$$M(l) = M_{gr} \quad (14.14)$$

Podstawiamy wzory (14.13) i (14.14) do wzoru (14.12)

$$\frac{q_{gr} \cdot l}{2} - q_{gr} \cdot x_0 - \frac{M_{gr}}{l} = 0 \quad (14.15)$$

Ze wzoru (14.15) wyznaczamy  $x_0$

$$x_0 = \frac{\frac{q_{gr} \cdot l}{2} - \frac{M_{gr}}{l}}{q_{gr}} \quad (14.16)$$

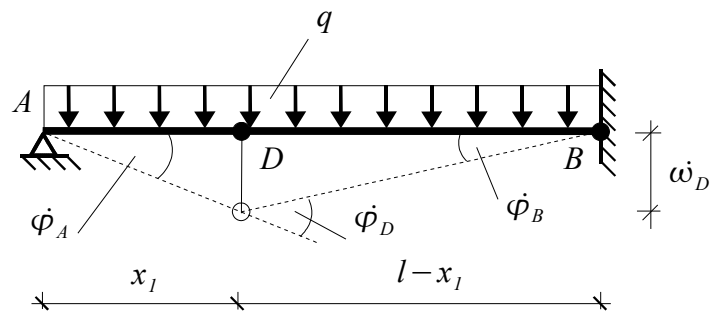
Następnie podstawiając wartość (14.16) do równania momentu (14.11) otrzymamy:

$$x_0 = (\sqrt{2} - 1) \cdot l = 0,41 \cdot l \quad (14.17)$$

$$q_{gr} = \frac{2 \cdot M_{gr}}{l^2} \cdot (3 + 2\sqrt{2}) = 11,656 \frac{M_{gr}}{l} \quad (14.18)$$

## 14.5.2. Podejście kinematyczne

Przyjmujemy kinematycznie dopuszczalny mechanizm zniszczenia. Położenie przęsłowego przegubu plastycznego ustalamy za pomocą parametru  $x_1$ .



Rys. 14.11. Kinematycznie dopuszczalny mechanizm zniszczenia

Analityczny zapis pola prędkości przemieszczeń.

- dla  $0 \leq x \leq x_1$

$$\dot{w} = \dot{\omega}_D \cdot \frac{x}{x_1} \quad (14.19)$$

- dla  $x_1 \leq x \leq l$

$$\dot{w} = \dot{\omega}_D \cdot \frac{l-x}{l-x_1} \quad (14.20)$$

Moc sił zewnętrznych wyraża się wzorem:

$$\dot{L}_z = \int_0^l \dot{w} \cdot q \, dx = q \int_0^l \dot{w} \, dx = q \cdot \Omega = \left(\frac{l}{2}\right) \cdot \dot{\omega}_D \cdot l \cdot q \quad (14.21)$$

Gdzie  $\Omega$  jest polem  $\triangle ABD$ .

Moc sił wewnętrznych wynosi:

$$\dot{L}_w = M_{gr}^D \cdot \dot{\varphi}_D + M_{gr}^B \cdot \dot{\varphi}_B \quad (14.22)$$

Możemy zapisać

$$M_{gr}^D = M_{gr}^B = M_{gr} \quad (14.23)$$

Z równania 14.20. oraz na podstawie Rys. 14.11. otrzymamy

$$\dot{\varphi}_B = \frac{\dot{\omega}_D}{l - x_1} \quad (14.24)$$

$$\dot{\varphi}_D = \frac{\dot{\omega}_D}{l - x_1} + \frac{\dot{\omega}_D}{x_1} \quad (14.25)$$

Podstawiając wzory (14.23), (14.24) oraz (14.25) do wzoru (14.22) uzyskamy

$$\dot{L}_w = M_{gr} \cdot \left[ \frac{2 \cdot \dot{\omega}_D}{l - x_1} + \frac{\dot{\omega}_D}{x_1} \right] = M_{gr} \cdot \dot{\omega}_D \cdot \left[ \frac{l + x_1}{x_1 \cdot (l - x_1)} \right] \quad (14.26)$$

Korzystając z tego, że moc sił zewnętrznych równa się mocy sił wewnętrznych

$$\dot{L}_z = \dot{L}_w$$

Otrzymamy

$$\left( \frac{l}{2} \cdot \dot{\omega}_D \cdot l \right) \cdot q = M_{gr} \cdot \dot{\omega}_D \cdot \left[ \frac{l + x_1}{x_1 \cdot (l - x_1)} \right] \quad (14.27)$$

Przekształcając powyższy wzór wyznaczamy  $q_{gr}$

$$q_{gr} = \frac{2 \cdot M_{gr}}{l} \cdot \frac{l + x_1}{x_1 \cdot (l - x_1)} \quad (14.28)$$

Szukamy minimalnej wartości siły  $q_{gr}$

$$\frac{dq_{gr}}{dx_1} = 0 \quad (14.29)$$

Po przekształceniach otrzymamy

$$x_0 = (\sqrt{2} - 1) \cdot l = 0,41 \cdot l \quad (14.30)$$

$$q_{gr} = \frac{2 \cdot M_{gr}}{l^2} \cdot (3 + 2\sqrt{2}) = 11,656 \frac{M_{gr}}{l} \quad (14.31)$$

Wartości wyznaczone w podejściu statycznym (14.17 oraz 14.18) pokrywają się z wynikami uzyskanymi w podejściu kinematycznym (14.30 i 14.31).