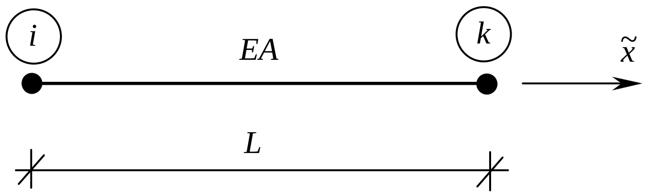
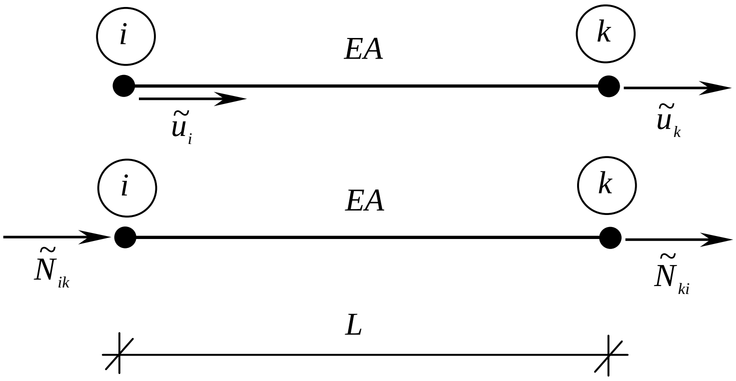
1. Macierz sztywności elementu prętowego, pracującego osiowo

Wyznaczyć macierz sztywności elementu prętowego, dwuwęzłowego, pracującego osiowo, przedstawionego na rys. 1.1. Dane: *EA* = const., *L*.



Rys. 1.1

Na początku, znajdźmy relacje między przemieszczeniami węzłowymi, a siłami przywęzłowymi. Wprowadzamy lokalny układ współrzędnych, który związany jest z analizowanym prętem i opisany jest za pomocą osi $\tilde{x}$. Wprowadzamy przemieszczenia $\tilde{u}_i$ i $\tilde{u}_k$ skierowane wzdłuż osi pręta oraz stowarzyszone z nimi siły przywęzłowe $\tilde{N}_{ik}$ i $\tilde{N}_{ki}$ zgodnie ze zwrotem osi $\tilde{x}$ (rys. 1.2).



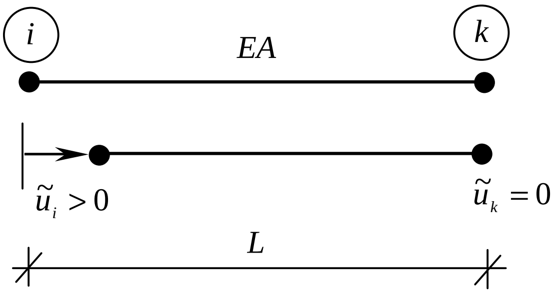
Rys. 1.2

Do wyprowadzenia elementów macierzy sztywności wykorzystamy prawo Hooke'a sprowadzone do postaci wzoru znanego z przedmiotu *wytrzymałość materiałów*, opisującego wydłużenie lub skrócenie pręta poddanego działaniu rozciągającej lub ściskającej siły osiowej *N*:

$$\Delta L = \frac{N \cdot L}{EA} \tag{1.1}$$

Zadanie rozwiążemy analizując pojedyncze, niezerowe stany przemieszczeń.

a) $\tilde{u}_i > 0$ i $\tilde{u}_k = 0$ (rys. 1.3)



Rys. 1.3

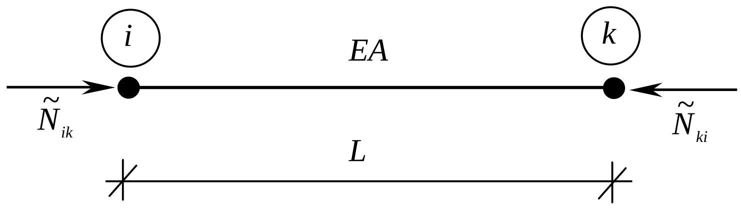
Przekształcając wzór (1.1) w odniesieniu do siły przywęzłowej $\tilde{N}_{ik}$ otrzymamy:

$$\tilde{N}_{ik}(\tilde{u}_i) = \frac{EA}{L} \cdot L = \frac{EA}{L} \cdot \tilde{u}_i \tag{1.2}$$

Warunek równowagi sił normalnych powinien być spełniony, stąd siła $\tilde{N}_{ki}$ będzie miała zwrot przeciwny do założonego:

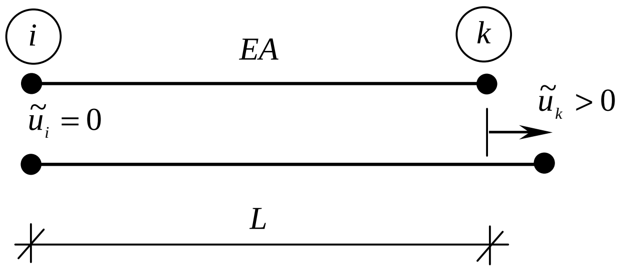
$$\tilde{N}_{ki}(\tilde{u}_i) = -\frac{EA}{L} \cdot \Delta L = -\frac{EA}{L} \cdot \tilde{u}_i \tag{1.3}$$

Zwroty sił $\tilde{N}_{ik}$ i $\tilde{N}_{ki}$ ilustruje rysunek 1.4:



Rys. 1.4

b) $\tilde{u}_i = 0$ i $\tilde{u}_k > 0$ (rys. 1.5)



Rys. 1.5

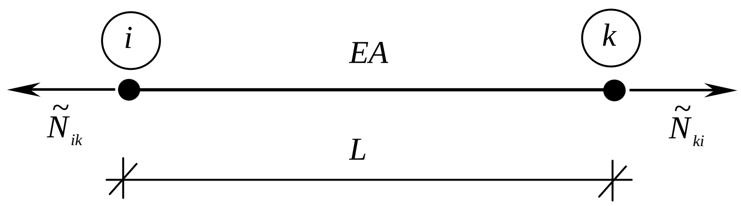
Przekształcając wzór (1.1) w odniesieniu do siły przywęzłowej $\tilde{N}_{ik}$ otrzymamy:

$$\tilde{N}_{ik}(\tilde{u}_k) = -\frac{EA}{L} \cdot \Delta L = -\frac{EA}{L} \cdot \tilde{u}_k \tag{1.4}$$

Warunek równowagi sił normalnych powinien być spełniony, stąd siła $\tilde{N}_{ki}$ będzie miała zwrot przeciwny do założonego:

$$\tilde{N}_{ki}(\tilde{u}_k) = \frac{EA}{L} \cdot \Delta L = \frac{EA}{L} \cdot \tilde{u}_k \tag{1.5}$$

Zwroty sił $\tilde{N}_{ik}$ i $\tilde{N}_{ki}$ ilustruje rysunek 1.6:



Rys. 1.6

Wykorzystując zasadę superpozycji otrzymamy:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{ik} &= \tilde{N}_{ik}(\tilde{u}_i) + \tilde{N}_{ik}(\tilde{u}_k) \\ \tilde{N}_{ki} &= \tilde{N}_{ki}(\tilde{u}_i) + \tilde{N}_{ki}(\tilde{u}_k) \end{aligned} \tag{1.6}$$

W rezultacie, wykorzystując związki (1.2), (1.3), (1.4) i (1.5) otrzymujemy relacje łączące siły przywęzłowe z przemieszczeniami węzłów:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{ik} &= \frac{EA}{L} \cdot \tilde{u}_i - \frac{EA}{L} \cdot \tilde{u}_k \\ \tilde{N}_{ki} &= -\frac{EA}{L} \cdot \tilde{u}_i + \frac{EA}{L} \cdot \tilde{u}_k \end{aligned} \tag{1.7}$$

Równania (1.7) można zapisać w prostszej postaci:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{ik} &= \frac{EA}{L} \cdot [\tilde{u}_i - \tilde{u}_k] \\ \tilde{N}_{ki} &= \frac{EA}{L} \cdot [-\tilde{u}_i + \tilde{u}_k] \end{aligned} \tag{1.8}$$

Związki (1.8) możemy nazwać inaczej *wzorami transformacyjnymi*. Równania (1.7) można zapisać macierzowo w pełnej postaci:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{u}_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{N}_{ik} \\ \tilde{N}_{ki} \end{Bmatrix} \tag{1.9}$$

lub inaczej

$$\left[\tilde{k}_{ik}\right] \cdot \left\{\tilde{u}_k\right\} = \left\{\tilde{N}_{ik}\right\} \tag{1.10}$$

gdzie:

$$\left[\tilde{k}_{ik}^{p}\right] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{k}}_e^p \tag{1.11}$$

jest macierzą sztywności elementu prętowego, pracującego osiowo,

$$\left\{\tilde{u}_k^p\right\} = \begin{Bmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{u}_k \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{q}}_e^p \tag{1.12}$$

jest wektorem przemieszczeń węzłowych, a

$$\left\{\tilde{N}_{ik}^p\right\} = \begin{Bmatrix} \tilde{N}_{ik} \\ \tilde{N}_{ki} \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{R}}_e^p \tag{1.13}$$

jest wektorem sił przywęzłowych oraz indeks dolny „*e*” oznacza przyporządkowanie *elementowi*, tzn.: macierz sztywności *elementu prętowego*, wektor przemieszczeń *elementu prętowego*, wektor sił przywęzłowych *elementu prętowego*.