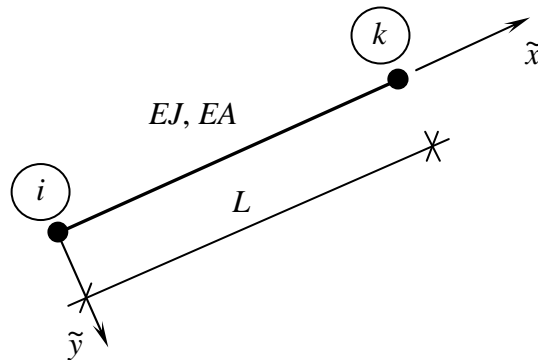


3. Macierz sztywności elementu ramowego

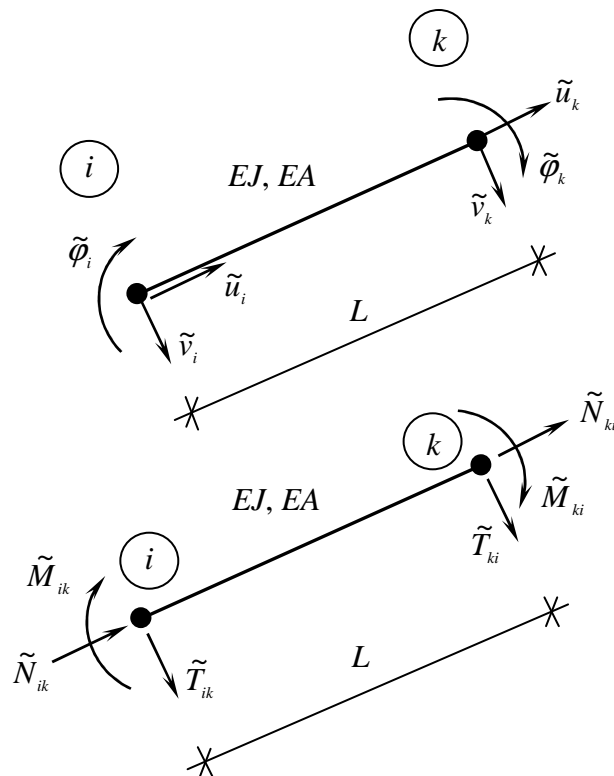
Wyznaczyć macierz sztywności elementu ramowego, dwuwęzłowego, przedstawionego na rys. 3.1. Dane: $EJ = \text{const.}$, $EA = \text{const.}$, L .



Rys. 3.1

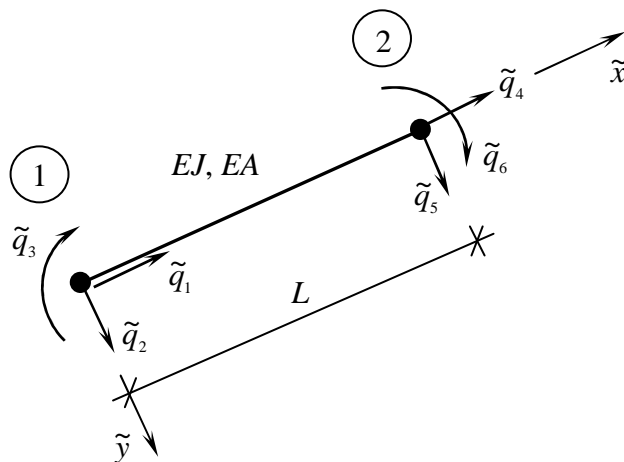
a) Koncepcja ogólna

Na rysunku 3.2 przedstawiono przemieszczenia węzłów $\tilde{u}_i, \tilde{v}_i, \tilde{\varphi}_i, \tilde{u}_k, \tilde{v}_k$ i $\tilde{\varphi}_k$ oraz stowarzyszone z nimi siły przywęzłowe $\tilde{N}_{ik}, \tilde{T}_{ik}, \tilde{M}_{ik}, \tilde{N}_{ki}, \tilde{T}_{ki}$ i \tilde{M}_{ki} .



Rys. 3.2

Można zauważyć, że dwuwęzłowy element ramowy stanowi złożenie elementu pracującego osiowo i elementu belkowego. W celu uproszczenia oznaczeń, przemieszczenia węzłów często oznacza się literą q , a węzłom „ i ” oraz „ k ” przyporządkowane zostaną etykiety „1” i „2” (rys. 3.3):

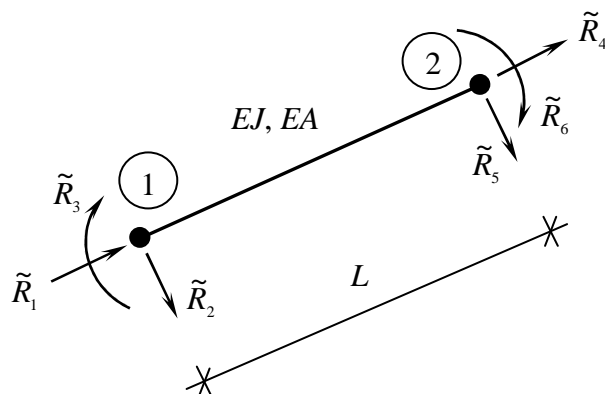


Rys. 3.3

czyli:

$$\tilde{\mathbf{q}}_e^r = \begin{Bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \\ \tilde{q}_4 \\ \tilde{q}_5 \\ \tilde{q}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{v}_i \\ \tilde{\varphi}_i \\ \tilde{u}_k \\ \tilde{v}_k \\ \tilde{\varphi}_k \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Siły przywęzłowe można oznaczyć następująco (rys. 3.4):



Rys. 3.4

czyli:

$$\tilde{\mathbf{R}}_e^r = \begin{Bmatrix} \tilde{R}_1 \\ \tilde{R}_2 \\ \tilde{R}_3 \\ \tilde{R}_4 \\ \tilde{R}_5 \\ \tilde{R}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{N}_{ik} \\ \tilde{T}_{ik} \\ \tilde{M}_{ik} \\ \tilde{N}_{ki} \\ \tilde{T}_{ki} \\ \tilde{M}_{ki} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Układ równań łączących przemieszczenia węzłów z siłami przywęzłowymi można zapisać macierzowo:

$$\begin{bmatrix} \tilde{k}_{11}^r & \tilde{k}_{12}^r & \tilde{k}_{13}^r & \tilde{k}_{14}^r & \tilde{k}_{15}^r & \tilde{k}_{16}^r \\ \tilde{k}_{21}^r & \tilde{k}_{22}^r & \tilde{k}_{23}^r & \tilde{k}_{24}^r & \tilde{k}_{25}^r & \tilde{k}_{26}^r \\ \tilde{k}_{31}^r & \tilde{k}_{32}^r & \tilde{k}_{33}^r & \tilde{k}_{34}^r & \tilde{k}_{35}^r & \tilde{k}_{36}^r \\ \tilde{k}_{41}^r & \tilde{k}_{42}^r & \tilde{k}_{43}^r & \tilde{k}_{44}^r & \tilde{k}_{45}^r & \tilde{k}_{46}^r \\ \tilde{k}_{51}^r & \tilde{k}_{52}^r & \tilde{k}_{53}^r & \tilde{k}_{54}^r & \tilde{k}_{55}^r & \tilde{k}_{56}^r \\ \tilde{k}_{61}^r & \tilde{k}_{62}^r & \tilde{k}_{63}^r & \tilde{k}_{64}^r & \tilde{k}_{65}^r & \tilde{k}_{66}^r \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \\ \tilde{q}_4 \\ \tilde{q}_5 \\ \tilde{q}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{R}_1 \\ \tilde{R}_2 \\ \tilde{R}_3 \\ \tilde{R}_4 \\ \tilde{R}_5 \\ \tilde{R}_6 \end{Bmatrix} \quad (3.3a)$$

gdzie górny indeks „r” każdego z elementów macierzy oznacza element macierzy sztywności dwuwęzłowego elementu ramowego. Zależność (3.3a) można zapisać posługując się uogólnioną notacją macierzową. Otrzymujemy:

$$\tilde{\mathbf{k}}_e^r \cdot \tilde{\mathbf{q}}_e^r = \tilde{\mathbf{R}}_e^r \quad (3.3b)$$

gdzie indeks dolny „e” oznacza przyporządkowanie *elementowi*, tzn.: macierz sztywności *elementu ramowego* $\tilde{\mathbf{k}}_e^r$, wektor przemieszczeń *elementu ramowego* $\tilde{\mathbf{q}}_e^r$, wektor sił przywęzłowych *elementu ramowego* $\tilde{\mathbf{R}}_e^r$. Macierz:

$$\tilde{\mathbf{k}}_e^r = [\tilde{k}_{ik}^r]_e = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11}^r & \tilde{k}_{12}^r & \tilde{k}_{13}^r & \tilde{k}_{14}^r & \tilde{k}_{15}^r & \tilde{k}_{16}^r \\ \tilde{k}_{21}^r & \tilde{k}_{22}^r & \tilde{k}_{23}^r & \tilde{k}_{24}^r & \tilde{k}_{25}^r & \tilde{k}_{26}^r \\ \tilde{k}_{31}^r & \tilde{k}_{32}^r & \tilde{k}_{33}^r & \tilde{k}_{34}^r & \tilde{k}_{35}^r & \tilde{k}_{36}^r \\ \tilde{k}_{41}^r & \tilde{k}_{42}^r & \tilde{k}_{43}^r & \tilde{k}_{44}^r & \tilde{k}_{45}^r & \tilde{k}_{46}^r \\ \tilde{k}_{51}^r & \tilde{k}_{52}^r & \tilde{k}_{53}^r & \tilde{k}_{54}^r & \tilde{k}_{55}^r & \tilde{k}_{56}^r \\ \tilde{k}_{61}^r & \tilde{k}_{62}^r & \tilde{k}_{63}^r & \tilde{k}_{64}^r & \tilde{k}_{65}^r & \tilde{k}_{66}^r \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

nosi nazwę macierzy sztywności dwuwęzłowego elementu ramowego.

Macierz sztywności elementu ramowego stanowi złożenie macierzy sztywności elementu prętowego i macierzy sztywności elementu belkowego:

$$\tilde{\mathbf{k}}_e^r = \tilde{\mathbf{k}}_e^p + \tilde{\mathbf{k}}_e^b \quad (3.5)$$

Z uwagi na to, że posługujemy się sześcioma niezależnymi stopniami swobody (sześć niezależnych przemieszczeń węzłowych) oraz faktu, że siły osiowe nie wpływają na proces zginania pręta (teoria pierwszego rzędu), macierze sztywności elementów prętowego i belkowego należy rozszerzyć do wymiaru 6×6 , tzn.:

$$\tilde{\mathbf{k}}_e^p = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

oraz

$$\tilde{\mathbf{k}}_e^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} & 0 & -\frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} & 0 & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} & 0 & \frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} & 0 & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Rozłączenie pracy osiowej pręta oraz zginania pręta uwzględniono wykorzystując zabieg matematyczny polegający na wstawieniu w wyrażeniu opisującym macierz sztywności elementu prętowego (3.6) w wierszach: drugim, trzecim, piątym i szóstym oraz w kolumnach: drugiej, trzeciej, piątej i szóstej wszystkich elementów równych zero. Wyrażenie opisujące macierz sztywności elementu belkowego (3.7) zostało zmodyfikowane przez wstawienie

zerowych wierszy: pierwszego i czwartego oraz zerowych kolumn: pierwszej i czwartej. Wtedy, wykonując proste dodawanie macierzy kwadratowych o tych samych wymiarach otrzymamy:

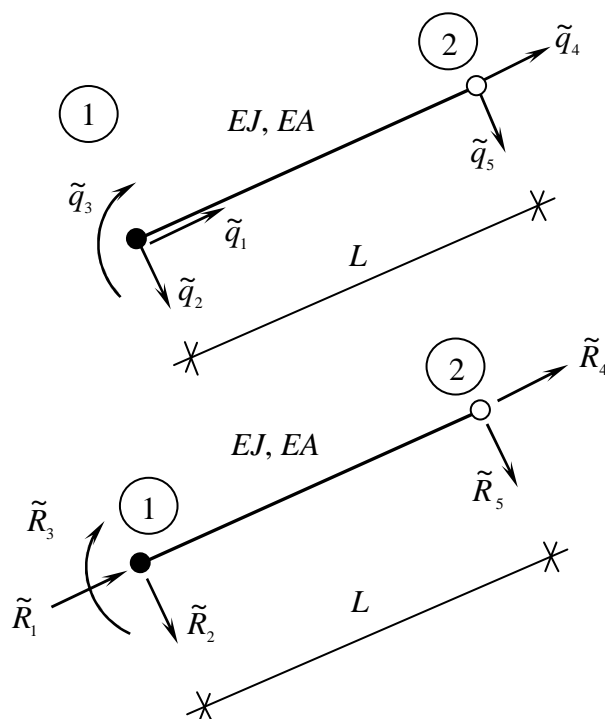
$$\tilde{\mathbf{k}}_e^r = [\tilde{k}_{ik}^r]_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} & 0 & -\frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} & 0 & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} & 0 & \frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} & 0 & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Układ równań (3.3a) przybierze teraz formę:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} & 0 & -\frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} & 0 & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} & 0 & \frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} & 0 & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \\ \tilde{q}_4 \\ \tilde{q}_5 \\ \tilde{q}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{R}_1 \\ \tilde{R}_2 \\ \tilde{R}_3 \\ \tilde{R}_4 \\ \tilde{R}_5 \\ \tilde{R}_6 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

b) Pręt z przegubem na prawym końcu

Podobnie możemy postąpić analizując element ramowy zakończony przegubem na prawym końcu. Macierz sztywności takiego elementu miałaby wymiar 5×5 . Jednakże, do celów praktycznych obliczeń często rozszerza się taką macierz sztywności do standardowego rozmiaru 6×6 przez wprowadzenie dodatkowego wiersza zerowego oraz kolumny zerowej. Na rysunku 3.5 przedstawiono przemieszczenia węzłów $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3, \tilde{q}_4$ i \tilde{q}_5 oraz stowarzyszone z nimi siły przywęzłowe $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \tilde{R}_3, \tilde{R}_4$ i \tilde{R}_5 .



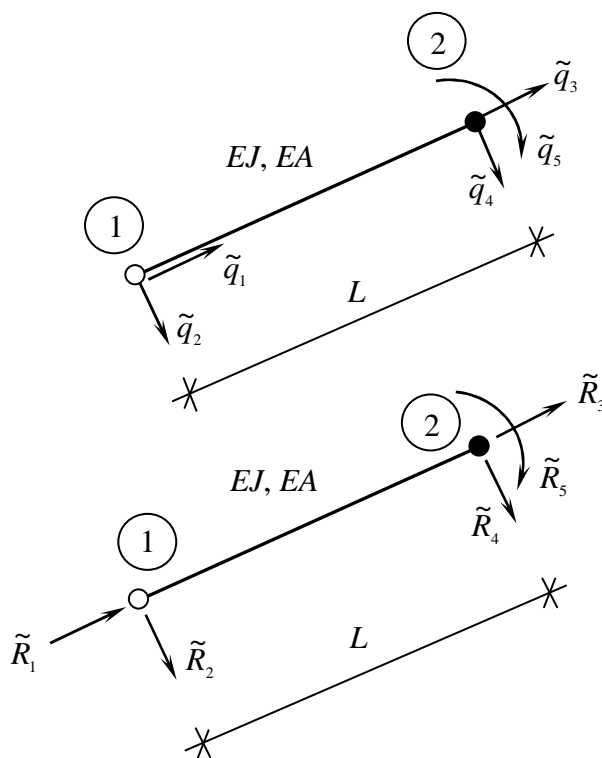
Rys. 3.5

Macierz sztywności elementu prętowego po uwzględnieniu rozłączności pracy osiowej i zginania opisana jest zależnością (3.6). Macierz sztywności elementu belkowego przy uwzględnieniu rozłączności tych dwóch zjawisk będzie miała postać:

$$\tilde{\mathbf{k}}_e^r = [\tilde{k}_{ik}^r]_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 \cdot EJ}{L^3} & \frac{3 \cdot EJ}{L^2} & 0 & -\frac{3 \cdot EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{3 \cdot EJ}{L^2} & \frac{3 \cdot EJ}{L} & 0 & -\frac{3 \cdot EJ}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3 \cdot EJ}{L^3} & -\frac{3 \cdot EJ}{L^2} & 0 & \frac{3 \cdot EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

c) Pręt z przegubem na lewym końcu

Macierz sztywności elementu ramowego zakończonego przegubem na lewym końcu powinna mieć wymiar 5×5 . Do celów praktycznych obliczeń, często rozszerza się tę macierz sztywności do standardowego wymiaru 6×6 podobnie, jak to miało miejsce poprzednio. Na rysunku 3.6 przedstawiono przemieszczenia węzłów $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3, \tilde{q}_4$ i \tilde{q}_5 oraz stowarzyszone z nimi siły przywęzłowe $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \tilde{R}_3, \tilde{R}_4$ i \tilde{R}_5 .



Rys. 3.6

Macierz sztywności elementu prętowego po uwzględnieniu rozłączności pracy osiowej i zginania opisana jest zależnością (3.6). Macierz sztywności elementu belkowego przy uwzględnieniu rozłączności tych dwóch zjawisk będzie miała postać:

$$\tilde{\mathbf{k}}_e^r = \left[\tilde{k}_{ik}^r \right]_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 \cdot EJ}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3 \cdot EJ}{L^3} & \frac{3 \cdot EJ}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3 \cdot EJ}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3 \cdot EJ}{L^3} & -\frac{3 \cdot EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{3 \cdot EJ}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{3 \cdot EJ}{L^2} & \frac{3 \cdot EJ}{L} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$