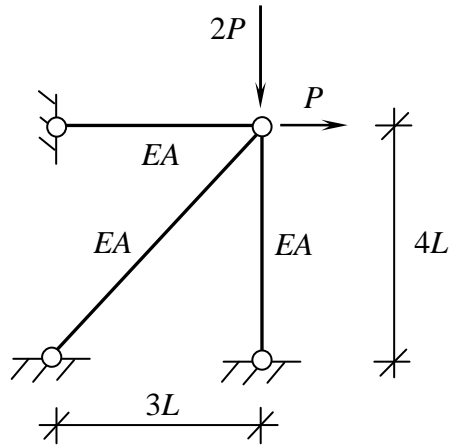


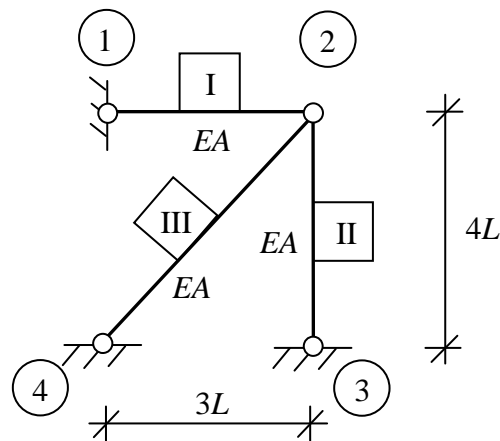
Zadanie 9.2

Wyznaczyć siły wewnętrzne dla układu prętów dwuprzegubowych o schemacie statycznym i obciążeniu przedstawionym na rysunku 9.13. Do rozwiązania zadania zastosować ujęcie macierzowe. Dane: $EA = \text{const.}$, P , L .



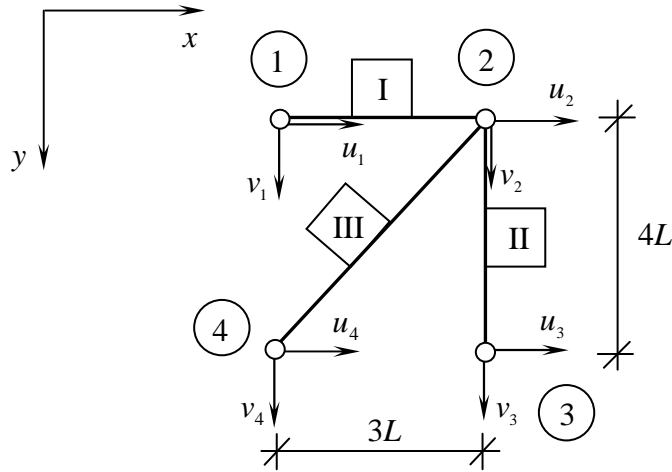
Rys. 9.13

Dzielimy konstrukcję na elementy i numerujemy węzły (rys. 9.14):



Rys. 9.14

W każdym węźle „ i ” wprowadzamy dwa przemieszczenia translacyjne opisane w globalnym układzie współrzędnych x, y w odniesieniu do całej konstrukcji (rys. 9.15):

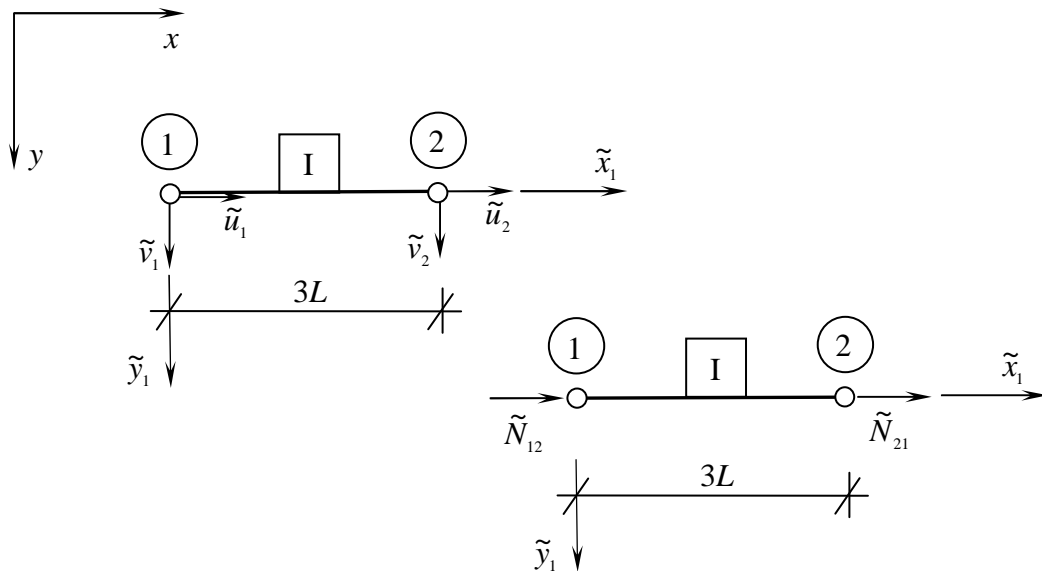


Rys. 9.15

Na poziomie poszczególnych składowych elementów konstrukcji (elementu I, II oraz III) występują przemieszczenia węzłów i stowarzyszone z nimi siły przywęzłowe opisane w lokalnym układzie współrzędnych, związanym z elementem.

- element pierwszy (rys. 9.16)

W każdym węźle wprowadzamy przemieszczenia translacyjne równoległe oraz prostopadłe do osi elementu oraz siły osiowe opisane w lokalnym układzie współrzędnych \tilde{x}_1, \tilde{y}_1 :

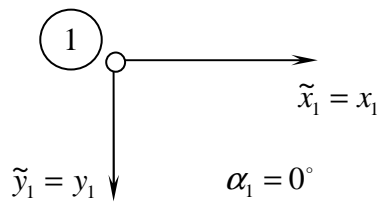


Rys. 9.16

Macierz sztywności pierwszego elementu kratowego określona jest w sposób ogólny zależnością (5.5). Dla elementu pierwszego o sztywności EA oraz długości $3L$, macierz sztywności ma postać:

$$\tilde{\mathbf{k}}_1^k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{3L} & 0 & -\frac{EA}{3L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{3L} & 0 & \frac{EA}{3L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.39)$$

Określmy teraz kąt obrotu lokalnego układu współrzędnych \tilde{x}_1, \tilde{y}_1 względem globalnego układu współrzędnych x, y . Element pierwszy ma swój początek w węźle pierwszym dlatego kąt obrotu α_1 jest równy zero stopni (rys. 9.17):



Rys. 9.17

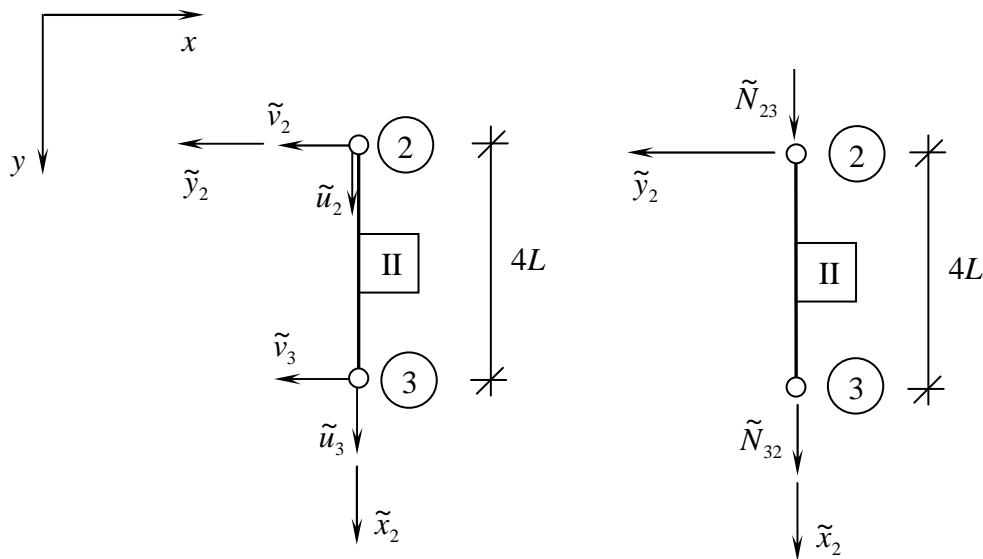
Wartości funkcji trygonometrycznych opisujących macierz transformacji T_1 są równe:

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 &= 0 \\ \cos \alpha_1 &= 1 \end{aligned} \quad (9.40)$$

Z uwagi na to, że odpowiadające sobie osie układu współrzędnych pokrywają się, transformacja macierzy sztywności elementu pierwszego ma charakter tożsamościowy, tzn.:

$$\mathbf{k}_1^k = \tilde{\mathbf{k}}_1^k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{3L} & 0 & -\frac{EA}{3L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{3L} & 0 & \frac{EA}{3L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.41)$$

- element drugi (rys. 9.18)



Rys. 9.18

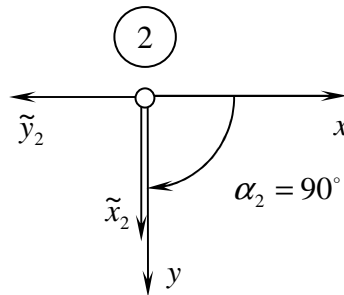
Macierz sztywności elementu drugiego o sztywności EA oraz długości $4L$ utworzona w lokalnym układzie współrzędnych \tilde{x}_2, \tilde{y}_2 ma postać:

$$\tilde{\mathbf{k}}_2^k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{4L} & 0 & -\frac{EA}{4L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{4L} & 0 & \frac{EA}{4L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.42)$$

Macierz transformacji pręta drugiego opisana zależnością (4.7) (z pominięciem trzeciego wiersza, trzeciej kolumny oraz szóstego wiersza i szóstej kolumny, ponieważ w zadaniu nie występuje obrotowy stopień swobody) będzie miała postać:

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 \\ 0 & 0 & -\sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (9.43)$$

Element drugi ma swój początek w węźle drugim dlatego kąt obrotu α_2 odmierzany jest następująco (rys. 9.19)



Rys. 9.19

Wartości funkcji trygonometrycznych opisujących macierz transformacji T_2 są równe:

$$\begin{aligned}\sin \alpha_2 &= 1 \\ \cos \alpha_2 &= 0\end{aligned}\tag{9.44}$$

Po podstawieniu do macierzy (9.43) zależności opisanych równaniami (9.44) otrzymamy:

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\tag{9.45}$$

Zbudujmy teraz macierz sztywności elementu drugiego opisaną w **globalnym** układzie współrzędnych x, y . Macierz ta zdefiniowana jest zależnością:

$$\mathbf{k}_2^k = \mathbf{T}_2^T \cdot \tilde{\mathbf{k}}_2^k \cdot \mathbf{T}_2\tag{9.46}$$

gdzie \mathbf{T}_2^T oznacza transponowaną macierz transformacji elementu pierwszego wyrażoną zależnością:

$$\mathbf{T}_2^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.47)$$

W pierwszej kolejności wykonajmy działanie:

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{T}_2^T \cdot \tilde{\mathbf{k}}_2^k \quad (9.48)$$

Zgodnie ze schematem Falka otrzymamy:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} \frac{EA}{4L} & 0 & -\frac{EA}{4L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{4L} & 0 & \frac{EA}{4L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{EA}{4L} & 0 & -\frac{EA}{4L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{4L} & 0 & \frac{EA}{4L} & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad (9.49)$$

W rezultacie otrzymujemy:

$$\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{EA}{4L} & 0 & -\frac{EA}{4L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{4L} & 0 & \frac{EA}{4L} & 0 \end{bmatrix} \quad (9.50)$$

Wykonajmy teraz działanie na macierzach, którego rezultatem jest określenie macierzy \mathbf{k}_2^k :

$$\mathbf{k}_2^k = \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{T}_2 \quad (9.51)$$

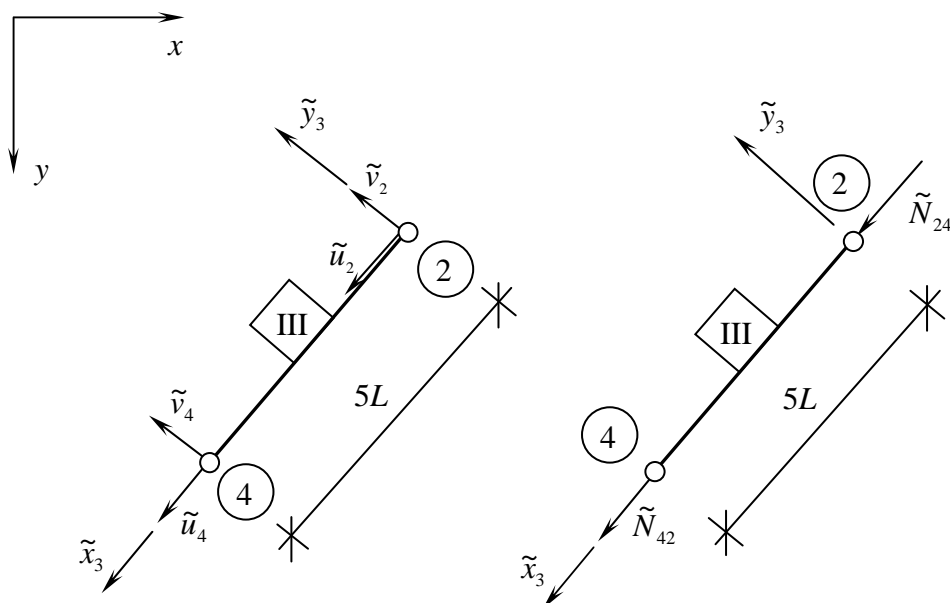
Zgodnie ze schematem Falka otrzymamy:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{EA}{4L} & 0 & -\frac{EA}{4L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{4L} & 0 & \frac{EA}{4L} & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{4L} & 0 & -\frac{EA}{4L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EA}{4L} & 0 & \frac{EA}{4L} \end{bmatrix} \end{array} \quad (9.52)$$

Macierz sztywności pręta drugiego opisana w globalnym układzie współrzędnych x, y ma postać:

$$\mathbf{k}_2^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{4L} & 0 & -\frac{EA}{4L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EA}{4L} & 0 & \frac{EA}{4L} \end{bmatrix} \quad (9.53)$$

- element trzeci (rys. 9.20)



Rys. 9.20

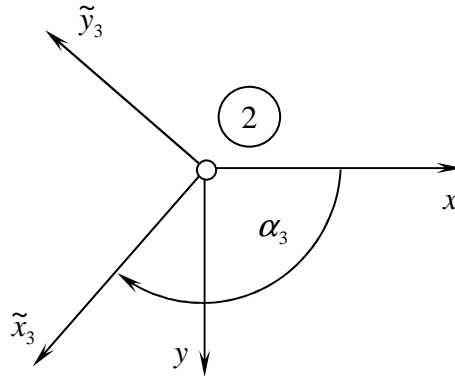
Macierz sztywności elementu trzeciego o sztywności EA oraz długości $5L$ ma postać:

$$\tilde{\mathbf{k}}_3^k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{5L} & 0 & -\frac{EA}{5L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{5L} & 0 & \frac{EA}{5L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.54)$$

Macierz transformacji pręta trzeciego opisana zależnością (4.7) (z pominięciem trzeciego wiersza, trzeciej kolumny oraz szóstego wiersza i szóstej kolumny, ponieważ w zadaniu nie występuje obrotowy stopień swobody) będzie miała postać:

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} \cos \alpha_3 & \sin \alpha_3 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha_3 & \sin \alpha_3 \\ 0 & 0 & -\sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (9.55)$$

Określmy teraz kąt obrotu lokalnego układu współrzędnych \tilde{x}_3, \tilde{y}_3 względem globalnego układu współrzędnych x, y . Element trzeci ma swój początek w węźle drugim dlatego kąt obrotu α_3 odmierzany jest następująco (rys. 9.21):



Rys. 9.21

Obliczmy wartości funkcji trygonometrycznych opisujących macierz transformacji T_3 . Ponieważ oś \tilde{x}_3 znajduje się w drugiej ćwiartce globalnego układu współrzędnych x, y , funkcje trygonometryczne $\sin \alpha_3$ i $\cos \alpha_3$ przyjmą wartości:

$$\begin{aligned}\sin \alpha_3 &= \frac{4}{5} \\ \cos \alpha_3 &= -\frac{3}{5}\end{aligned}\tag{9.56}$$

Macierz transformacji pręta trzeciego opisana zależnością (4.7) (z pominięciem trzeciego wiersza, trzeciej kolumny oraz szóstego wiersza i szóstej kolumny, ponieważ w zadaniu nie występuje obrotowy stopień swobody) będzie miała postać:

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} \cos \alpha_3 & \sin \alpha_3 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha_3 & \sin \alpha_3 \\ 0 & 0 & -\sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 \end{bmatrix}\tag{9.57}$$

Po podstawieniu do macierzy (9.57) zależności opisanych równaniami (9.56) otrzymamy:

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \quad (9.58)$$

Zbudujmy teraz macierz sztywności elementu trzeciego opisaną w **globalnym** układzie współrzędnych x, y . Macierz ta zdefiniowana jest zależnością:

$$\mathbf{k}_3^k = \mathbf{T}_3^T \cdot \tilde{\mathbf{k}}_3^k \cdot \mathbf{T}_3 \quad (9.59)$$

gdzie \mathbf{T}_3^T oznacza transponowaną macierz transformacji elementu pierwszego wyrażoną zależnością:

$$\mathbf{T}_3^T = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \quad (9.60)$$

W pierwszej kolejności wykonajmy działanie:

$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{T}_3^T \cdot \tilde{\mathbf{k}}_3^k \quad (9.61)$$

Zgodnie ze schematem Falka otrzymamy:

$$\begin{array}{c|c}
 \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} \frac{EA}{5L} & 0 & -\frac{EA}{5L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{5L} & 0 & \frac{EA}{5L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ \\ \left[\begin{array}{cccc} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{array} \right] \end{array} & \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} -\frac{3}{25} \frac{EA}{L} & 0 & \frac{3}{25} \frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{4}{25} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{4}{25} \frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{3}{25} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{3}{25} \frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{4}{25} \frac{EA}{L} & 0 & \frac{4}{25} \frac{EA}{L} & 0 \end{array} \right] \\ \\ \left[\begin{array}{cccc} -\frac{3}{25} \frac{EA}{L} & 0 & \frac{3}{25} \frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{4}{25} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{4}{25} \frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{3}{25} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{3}{25} \frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{4}{25} \frac{EA}{L} & 0 & \frac{4}{25} \frac{EA}{L} & 0 \end{array} \right] \end{array} \\
 \hline
 \end{array} \quad (9.62)$$

W rezultacie otrzymujemy:

$$\mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{25} \frac{EA}{L} & 0 & \frac{3}{25} \frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{4}{25} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{4}{25} \frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{3}{25} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{3}{25} \frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{4}{25} \frac{EA}{L} & 0 & \frac{4}{25} \frac{EA}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad (9.63)$$

Wykonajmy teraz działanie na macierzach, którego rezultatem jest określenie macierzy \mathbf{k}_3^k :

$$\mathbf{k}_3^k = \mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{T}_3 \quad (9.64)$$

Zgodnie ze schematem Falka otrzymamy:

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccc}
 -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\
 -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\
 0 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}
 \end{array} \right] \\
 \hline
 \left[\begin{array}{cccc}
 -\frac{3 EA}{25 L} & 0 & \frac{3 EA}{25 L} & 0 \\
 \frac{4 EA}{25 L} & 0 & -\frac{4 EA}{25 L} & 0 \\
 \frac{3 EA}{25 L} & 0 & -\frac{3 EA}{25 L} & 0 \\
 -\frac{4 EA}{25 L} & 0 & \frac{4 EA}{25 L} & 0
 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc}
 \frac{9 EA}{125 L} & -\frac{12 EA}{125 L} & -\frac{9 EA}{125 L} & \frac{12 EA}{125 L} \\
 -\frac{12 EA}{125 L} & \frac{16 EA}{125 L} & \frac{9 EA}{125 L} & -\frac{16 EA}{125 L} \\
 -\frac{9 EA}{125 L} & \frac{12 EA}{125 L} & \frac{9 EA}{125 L} & -\frac{12 EA}{125 L} \\
 \frac{12 EA}{125 L} & -\frac{16 EA}{125 L} & -\frac{12 EA}{125 L} & \frac{16 EA}{125 L}
 \end{array} \right] \quad (9.65)
 \end{array}$$

Macierz sztywności pręta trzeciego opisana w globalnym układzie współrzędnych x, y ma postać:

$$\mathbf{k}_3^k = \begin{bmatrix} \frac{9 EA}{125 L} & -\frac{12 EA}{125 L} & -\frac{9 EA}{125 L} & \frac{12 EA}{125 L} \\ -\frac{12 EA}{125 L} & \frac{16 EA}{125 L} & \frac{9 EA}{125 L} & -\frac{16 EA}{125 L} \\ -\frac{9 EA}{125 L} & \frac{12 EA}{125 L} & \frac{9 EA}{125 L} & -\frac{12 EA}{125 L} \\ \frac{12 EA}{125 L} & -\frac{16 EA}{125 L} & -\frac{12 EA}{125 L} & \frac{16 EA}{125 L} \end{bmatrix} \quad (9.66)$$

Układ równań algebraicznych dla całej konstrukcji w ogólnej notacji macierzowej przyjmie znaną formę:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{P} \quad (9.67)$$

a w bezpośrednim zapisie macierzowym będzie miał on postać:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} & K_{67} & K_{68} \\ K_{71} & K_{72} & K_{73} & K_{74} & K_{75} & K_{76} & K_{77} & K_{78} \\ K_{81} & K_{82} & K_{83} & K_{84} & K_{85} & K_{86} & K_{87} & K_{88} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1^{(x)} \\ P_1^{(y)} \\ P_2^{(x)} \\ P_2^{(y)} \\ P_3^{(x)} \\ P_3^{(y)} \\ P_4^{(x)} \\ P_4^{(y)} \end{Bmatrix} \quad (9.68)$$

gdzie

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} & K_{67} & K_{68} \\ K_{71} & K_{72} & K_{73} & K_{74} & K_{75} & K_{76} & K_{77} & K_{78} \\ K_{81} & K_{82} & K_{83} & K_{84} & K_{85} & K_{86} & K_{87} & K_{88} \end{bmatrix} \quad (9.69)$$

jest macierzą sztywności całej konstrukcji,

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (9.70)$$

jest wektorem przemieszczeń węzłowych w odniesieniu do *całej konstrukcji*, a

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} P_1^{(x)} \\ P_1^{(y)} \\ P_2^{(x)} \\ P_2^{(y)} \\ P_3^{(x)} \\ P_3^{(y)} \\ P_4^{(x)} \\ P_4^{(y)} \end{Bmatrix} \quad (9.71)$$

jest wektorem obciążenia (prawej strony) w odniesieniu do *całej konstrukcji*.

Macierz sztywności konstrukcji \mathbf{K} stanowi odpowiednie złożenie macierzy sztywności elementów \mathbf{k}_1^k , \mathbf{k}_2^k i \mathbf{k}_3^k . Na początku, wyzerujemy wszystkie elementy macierzy \mathbf{K} . Deformacją pręta pierwszego wywołana jest przemieszczeniami węzłów: pierwszego u_1 i v_1 oraz drugiego u_2 i v_2 . Stąd, macierz sztywności elementu pierwszego \mathbf{k}_1^k zajmuje w macierzy sztywności konstrukcji \mathbf{K} następujące miejsce:

$$\begin{bmatrix}
 \frac{EA}{3L} & 0 & -\frac{EA}{3L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{EA}{3L} & 0 & -\frac{EA}{3L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \tag{9.72}$$

Za deformację pręta drugiego odpowiadają przemieszczenia węzłów: drugiego u_2 i v_2 oraz trzeciego u_3 i v_3 . Dlatego macierz sztywności elementu drugiego \mathbf{k}_2^k zajmuje w macierzy sztywności konstrukcji \mathbf{K} następujące miejsce:

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{4L} & 0 & -\frac{EA}{4L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{4L} & 0 & \frac{EA}{4L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \tag{9.73}$$

Deformacja pręta trzeciego wywołana jest przemieszczeniami węzłów: drugiego u_2 i v_2 oraz czwartego u_4 i v_4 . Dlatego elementy macierzy sztywności pręta trzeciego \mathbf{k}_2^k zajmują w macierzy sztywności konstrukcji \mathbf{K} następujące miejsce:

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} \frac{9 EA}{125 L} & -\frac{12 EA}{125 L} \\ -\frac{12 EA}{125 L} & \frac{16 EA}{125 L} \end{matrix}} & 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} -\frac{9 EA}{125 L} & \frac{12 EA}{125 L} \\ \frac{9 EA}{125 L} & -\frac{16 EA}{125 L} \end{matrix}} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} -\frac{9 EA}{125 L} & \frac{12 EA}{125 L} \\ \frac{12 EA}{125 L} & -\frac{16 EA}{125 L} \end{matrix}} & 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} \frac{9 EA}{125 L} & -\frac{12 EA}{125 L} \\ -\frac{12 EA}{125 L} & \frac{16 EA}{125 L} \end{matrix}} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \tag{9.74}$$

W rezultacie, po nałożeniu na siebie macierzy opisanych zależnościami (9.72), (9.73) i (9.74) otrzymamy macierz sztywności konstrukcji w postaci:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
 \boxed{\begin{matrix} \frac{EA}{3L} & 0 & -\frac{EA}{3L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{EA}{3L} & 0 & \boxed{\begin{matrix} \frac{EA}{3L} + \frac{9 EA}{125 L} & -\frac{12 EA}{125 L} \\ -\frac{12 EA}{125 L} & \frac{EA}{4L} + \frac{16 EA}{125 L} \end{matrix}} & 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} -\frac{9 EA}{125 L} & \frac{12 EA}{125 L} \\ \frac{9 EA}{125 L} & -\frac{16 EA}{125 L} \end{matrix}} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{4L} & 0 & \frac{EA}{4L} & \frac{9 EA}{125 L} & -\frac{16 EA}{125 L} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{4L} & 0 & \frac{EA}{4L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} -\frac{9 EA}{125 L} & \frac{12 EA}{125 L} \\ \frac{12 EA}{125 L} & -\frac{16 EA}{125 L} \end{matrix}} & 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} \frac{9 EA}{125 L} & -\frac{12 EA}{125 L} \\ -\frac{12 EA}{125 L} & \frac{16 EA}{125 L} \end{matrix}} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9 EA}{125 L} & -\frac{16 EA}{125 L}
 \end{bmatrix} \tag{9.75}$$

Po wykonaniu sumowania elementów K_{33} , K_{34} , K_{43} i K_{44} otrzymamy:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
 \frac{EA}{3L} & 0 & -\frac{EA}{3L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{EA}{3L} & 0 & \frac{152EA}{375L} & -\frac{12EA}{125L} & 0 & 0 & -\frac{9EA}{125L} & \frac{12EA}{125L} \\
 0 & 0 & -\frac{12EA}{125L} & \frac{189EA}{500L} & 0 & -\frac{EA}{4L} & \frac{9EA}{125L} & -\frac{16EA}{125L} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{4L} & 0 & \frac{EA}{4L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{9EA}{125L} & \frac{12EA}{125L} & 0 & 0 & \frac{9EA}{125L} & -\frac{12EA}{125L} \\
 0 & 0 & \frac{12EA}{125L} & -\frac{16EA}{125L} & 0 & 0 & -\frac{12EA}{125L} & \frac{16EA}{125L}
 \end{bmatrix} \quad (9.76)$$

Macierz sztywności konstrukcji \mathbf{K} jest osobliwa, tzn. jej wyznacznik jest równy zero ponieważ nie uwzględniono jeszcze warunków brzegowych. Wprowadźmy teraz w odpowiedni sposób warunki brzegowe $u_1 = 0$, $v_1 = 0$, $u_3 = 0$, $v_3 = 0$, $u_4 = 0$ i $v_4 = 0$ oraz odpowiednie wartości wektora obciążenia. W rezultacie, układ równań (9.68) możemy zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{152EA}{375L} & -\frac{12EA}{125L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{12EA}{125L} & \frac{189EA}{500L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 u_1 \\
 v_1 \\
 u_2 \\
 v_2 \\
 u_3 \\
 v_3 \\
 u_4 \\
 v_4
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 P \\
 2 \cdot P \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{Bmatrix}
 \quad (9.77)$$

Układ równań (9.77) zapisany klasycznie ma postać:

$$\begin{aligned}
 1 \cdot u_1 + 0 \cdot v_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot u_3 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot u_4 + 0 \cdot v_4 &= 0 \\
 0 \cdot u_1 + 1 \cdot v_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot u_3 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot u_4 + 0 \cdot v_4 &= 0 \\
 0 \cdot u_1 + 0 \cdot v_1 + \frac{152EA}{375L} \cdot u_2 - \frac{12EA}{125L} \cdot v_2 + 0 \cdot u_3 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot u_4 + 0 \cdot v_4 &= P \\
 0 \cdot u_1 + 0 \cdot v_1 - \frac{12EA}{125L} \cdot u_2 + \frac{189EA}{500L} \cdot v_2 + 0 \cdot u_3 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot u_4 + 0 \cdot v_4 &= 2 \cdot P \\
 0 \cdot u_1 + 0 \cdot v_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot u_3 + 0 \cdot v_3 + 1 \cdot u_4 + 0 \cdot v_4 &= 0 \\
 0 \cdot u_1 + 0 \cdot v_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot u_3 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot u_4 + 1 \cdot v_4 &= 0
 \end{aligned}
 \quad (9.78)$$

W rezultacie otrzymujemy:

$$u_1 = 0$$

$$v_1 = 0$$

$$u_2 = \frac{95}{24} \cdot \frac{P \cdot L}{EA}$$

$$v_2 = \frac{170}{27} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \quad (9.79)$$

$$u_3 = 0$$

$$v_3 = 0$$

$$u_4 = 0$$

$$v_4 = 0$$

Wobec tego wektor przemieszczeń węzłowych konstrukcji ma postać:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{95}{24} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \\ \frac{170}{27} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9.80)$$

W następnej kolejności analizujemy konstrukcję na poziomie pojedynczych prętów. Wykorzystujemy znane relacje macierzowe, łączące przemieszczenia węzłów z siłami przywęzłowymi. Siły przywęzłowe wyrażamy za pomocą macierzy sztywności pręta

i obliczonych przemieszczeń węzłowych. Wektor przemieszczeń węzłowych elementu pierwszego \mathbf{u}_1 wyrażony za pomocą wektora przemieszczeń konstrukcji \mathbf{u} ma postać:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{95}{24} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \\ \frac{170}{27} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \end{Bmatrix} \quad (9.81)$$

Wektor przemieszczeń węzłowych pręta pierwszego $\tilde{\mathbf{u}}_1$ opisany w lokalnym układzie współrzędnych \tilde{x}_1, \tilde{y}_1 wyrażony jest zależnością:

$$\tilde{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{u}_1 \quad (9.82)$$

Ponieważ lokalny układ współrzędnych \tilde{x}_1, \tilde{y}_1 pokrywa się z globalnym układem współrzędnych x_1, y_1 (kąt obrotu $\alpha_1 = 0^\circ$) otrzymamy:

$$\tilde{\mathbf{u}}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{95}{24} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \\ \frac{170}{27} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \end{Bmatrix} \quad (9.83)$$

Wektor sił przywęzłowych $\tilde{\mathbf{R}}_1$ obliczamy mnożąc macierz sztywności elementu pierwszego $\tilde{\mathbf{k}}_1^k$ przez wektor przemieszczeń węzłowych $\tilde{\mathbf{u}}_1$:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{N}_{12} \\ \tilde{T}_{12} \\ \tilde{N}_{21} \\ \tilde{T}_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{3L} & 0 & -\frac{EA}{3L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{3L} & 0 & \frac{EA}{3L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{95}{24} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \\ \frac{170}{27} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \end{Bmatrix} \quad (9.84)$$

W zapisie bezpośrednim, układ równań (9.84) przyjmie formę:

$$\tilde{N}_{12} = \frac{EA}{3L} \cdot 0 + 0 \cdot 0 - \frac{EA}{3L} \cdot \left(\frac{95}{24} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + 0 \cdot \frac{170}{27} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} = -\frac{95}{72} \cdot P$$

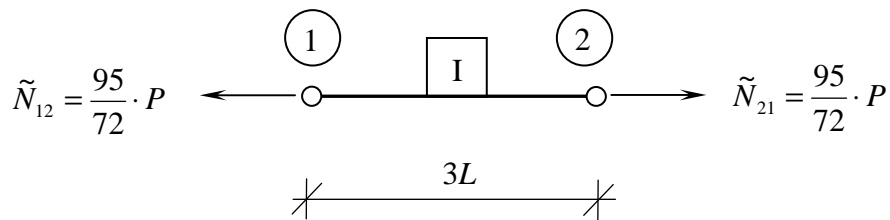
$$\tilde{T}_{12} = 0 \quad (9.85)$$

$$\tilde{N}_{21} = -\frac{EA}{3L} \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \frac{EA}{3L} \cdot \left(\frac{95}{24} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + 0 \cdot \frac{170}{27} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} = \frac{95}{72} \cdot P$$

$$\tilde{T}_{21} = 0$$

Dodatkowe siły przywęzłowe prostopadłe do osi pręta \tilde{T}_{12} oraz \tilde{T}_{21} mają wartości zerowe, ponieważ pręt z założenia pracuje wyłącznie osiowo.

Zwroty sił przywęzłowych elementu pierwszego po uwzględnieniu znaków przedstawia rysunek 9.22:



Rys. 9.22

Wektor przemieszczeń węzłowych elementu drugiego $\tilde{\mathbf{u}}_2$ wyrażony za pomocą wektora przemieszczeń konstrukcji \mathbf{u} ma postać:

$$\tilde{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{u}_2 \quad (9.86)$$

a w bezpośrednim zapisie macierzowym otrzymamy:

$$\tilde{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{95}{24} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \\ \frac{170}{27} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9.87)$$

Układ równań (9.87) w klasycznym zapisie ma postać:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_2 &= 0 \cdot \left(\frac{95}{24} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + 1 \cdot \left(\frac{170}{27} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = \frac{170}{27} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \\ \tilde{v}_2 &= -1 \cdot \left(\frac{95}{24} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + 0 \cdot \left(\frac{170}{27} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = -\frac{95}{24} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \\ \tilde{u}_3 &= 0 \cdot \left(\frac{95}{24} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + 0 \cdot \left(\frac{170}{27} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0 \\ \tilde{v}_3 &= 0 \cdot \left(\frac{95}{24} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + 0 \cdot \left(\frac{170}{27} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) - 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 \end{aligned} \quad (9.88)$$

Wektor sił przywęzłowych $\tilde{\mathbf{R}}_2$ obliczamy mnożąc macierz sztywności elementu drugiego $\tilde{\mathbf{k}}_2^k$ przez wektor przemieszczeń węzłowych $\tilde{\mathbf{u}}_2$:

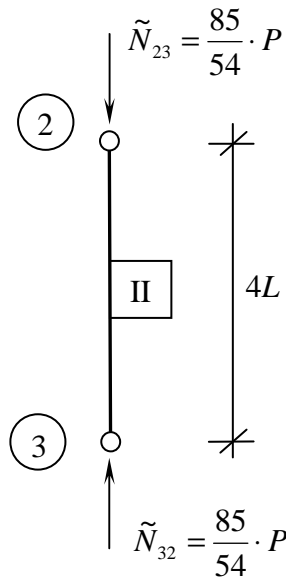
$$\begin{Bmatrix} \tilde{N}_{23} \\ \tilde{T}_{23} \\ \tilde{N}_{32} \\ \tilde{T}_{32} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{4L} & 0 & -\frac{EA}{4L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{4L} & 0 & \frac{EA}{4L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{170}{27} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \\ -\frac{95}{24} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9.89)$$

a w zapisie bezpośrednim, układ równań (9.89) będzie miał postać:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{23} &= \frac{EA}{4L} \cdot \left(\frac{170}{27} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + 0 \cdot \left(-\frac{95}{24} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) - \frac{EA}{4L} \cdot 0 + 0 \cdot 0 = \frac{85}{54} \cdot P \\ \tilde{T}_{23} &= 0 \cdot \left(\frac{170}{27} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + 0 \cdot \left(-\frac{95}{24} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 \\ \tilde{N}_{32} &= -\frac{EA}{4L} \cdot \left(\frac{170}{27} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + 0 \cdot \left(-\frac{95}{24} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + \frac{EA}{4L} \cdot 0 + 0 \cdot 0 = -\frac{85}{54} \cdot P \\ \tilde{T}_{32} &= 0 \cdot \left(\frac{170}{27} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + 0 \cdot \left(-\frac{95}{24} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 \end{aligned} \tag{9.90}$$

Dodatkowe siły przywęzłowe prostopadłe do osi pręta \tilde{T}_{23} oraz \tilde{T}_{32} mają wartości zerowe, ponieważ pręt z założenia pracuje wyłącznie osiowo.

Zwroty sił przywęzłowych elementu drugiego po uwzględnieniu znaków przedstawia rysunek 9.23:



Rys. 9.23

Wektor przemieszczeń węzłowych elementu trzeciego $\tilde{\mathbf{u}}_3$ wyrażony za pomocą wektora przemieszczeń konstrukcji \mathbf{u} ma postać:

$$\tilde{\mathbf{u}}_3 = \mathbf{T}_3 \cdot \mathbf{u}_3 \tag{9.91}$$

a w bezpośrednim zapisie macierzowym otrzymamy:

$$\tilde{\mathbf{u}}_3 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{95}{24} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \\ \frac{170}{27} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9.92)$$

Układ równań (9.92) w klasycznym zapisie ma postać:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_2 &= \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{95}{24} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{170}{27} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = \frac{575}{216} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \\ \tilde{v}_2 &= -\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{95}{24} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{170}{27} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = -\frac{125}{18} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \\ \tilde{u}_4 &= 0 \cdot \left(\frac{95}{24} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + 0 \cdot \left(\frac{170}{27} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + \frac{3}{5} \cdot 0 + \frac{4}{5} \cdot 0 = 0 \\ \tilde{v}_4 &= 0 \cdot \left(\frac{95}{24} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + 0 \cdot \left(\frac{170}{27} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) - \frac{4}{5} \cdot 0 + \frac{3}{5} \cdot 0 = 0 \end{aligned} \quad (9.93)$$

Wektor sił przywęzłowych $\tilde{\mathbf{R}}_3$ obliczamy mnożąc macierz sztywności elementu trzeciego $\tilde{\mathbf{k}}_3^k$ przez wektor przemieszczeń węzłowych $\tilde{\mathbf{u}}_3$:

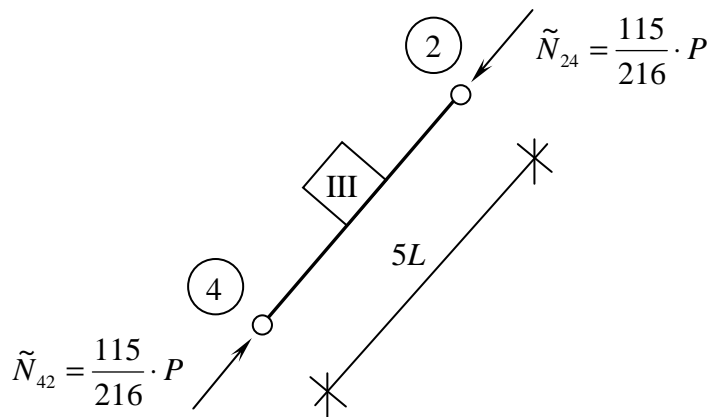
$$\begin{Bmatrix} \tilde{N}_{24} \\ \tilde{T}_{24} \\ \tilde{N}_{42} \\ \tilde{T}_{42} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{5L} & 0 & -\frac{EA}{5L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{5L} & 0 & \frac{EA}{5L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{575}{216} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \\ -\frac{125}{18} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9.94)$$

W zapisie bezpośrednim, układ równań (9.94) będzie miał postać:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{24} &= \frac{EA}{5L} \cdot \left(\frac{575}{216} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + 0 \cdot \left(-\frac{125}{18} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) - \frac{EA}{5L} \cdot 0 + 0 \cdot 0 = \frac{115}{216} \cdot P \\ \tilde{T}_{24} &= 0 \cdot \left(\frac{575}{216} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + 0 \cdot \left(-\frac{125}{18} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 \\ \tilde{N}_{42} &= -\frac{EA}{5L} \cdot \left(\frac{575}{216} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + 0 \cdot \left(-\frac{125}{18} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + \frac{EA}{5L} \cdot 0 + 0 \cdot 0 = -\frac{115}{216} \cdot P \\ \tilde{T}_{42} &= 0 \cdot \left(\frac{575}{216} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + 0 \cdot \left(-\frac{125}{18} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \right) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 \end{aligned} \tag{9.95}$$

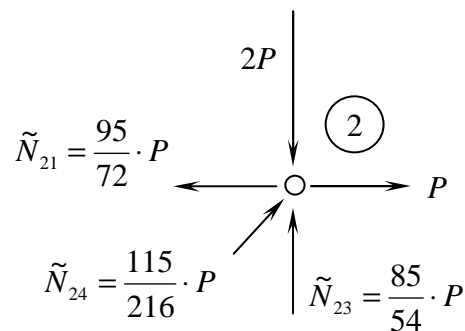
Dodatkowe siły przywęzłowe prostopadłe do osi pręta \tilde{T}_{23} oraz \tilde{T}_{32} mają wartości zerowe, ponieważ pręt z założenia pracuje wyłącznie osiowo.

Zwroty sił przywęzłowych elementu trzeciego po uwzględnieniu znaków przedstawia rysunek 9.23:



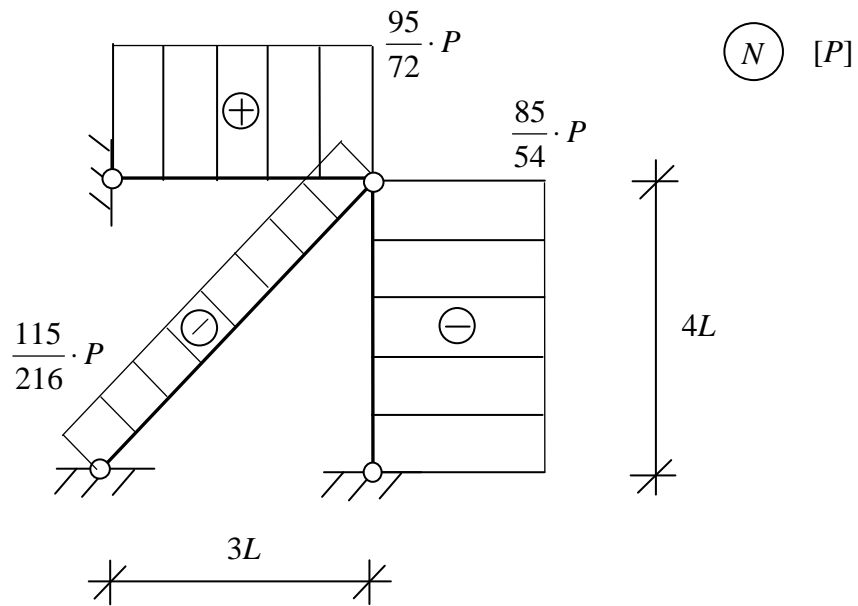
Rys. 9.23

Równowagę węzła drugiego ilustruje rysunek 9.24:



Rys. 9.24

Wykresy sił wewnętrznych przedstawia rysunek 9.25:



Rys. 9.25