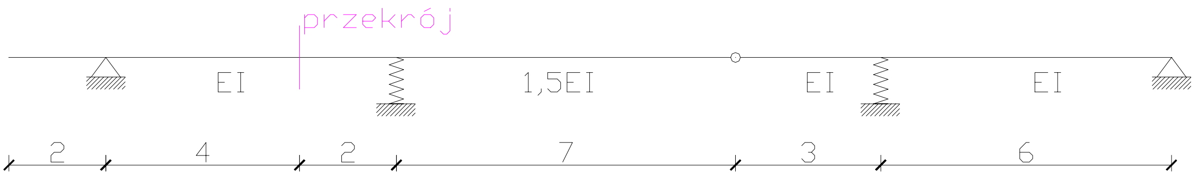
LINIE WPŁYWOWE SIŁ W BELKACH CIĄGŁYCH

Dla zadanej belki wyznaczyć linie wpływowe momentów i reakcji podporowych oraz momentów zginających i sił poprzecznych w zaznaczonych przekrojach.
Zadana belka:



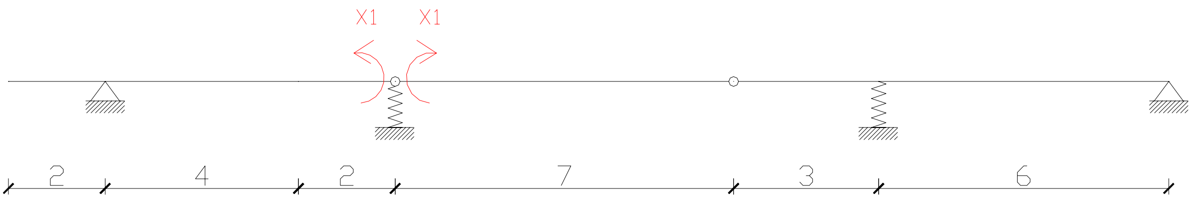
Linie wpływowe sił z belkach ciągłych statycznie niewyznaczalnych oblicza się zgodnie ze wzorem superpozycyjnym:

$$LwM_\alpha = LwM_\alpha{}^0 + M_\alpha{}^{x_1=1} LwX_1 + M_\alpha{}^{x_2=1} LwX_2 + \ldots + M_\alpha{}^{x_n=1} LwX_n$$

$$LwT_\alpha = LwT_\alpha{}^0 + T_\alpha{}^{x_1=1} LwX_1 + T_\alpha{}^{x_2=1} LwX_2 + \ldots + T_\alpha{}^{x_n=1} LwX_n$$

$$LwR_2 = LwR_2{}^0 + R_2{}^{x_1=1} LwX_1 + R_2{}^{x_2=1} LwX_2 + \ldots + R_2{}^{x_n=1} LwX_n$$

Układ jest statycznie niewyznaczalny więc należy dobrać układ podstawowy i zapisać układ równań kanonicznych:

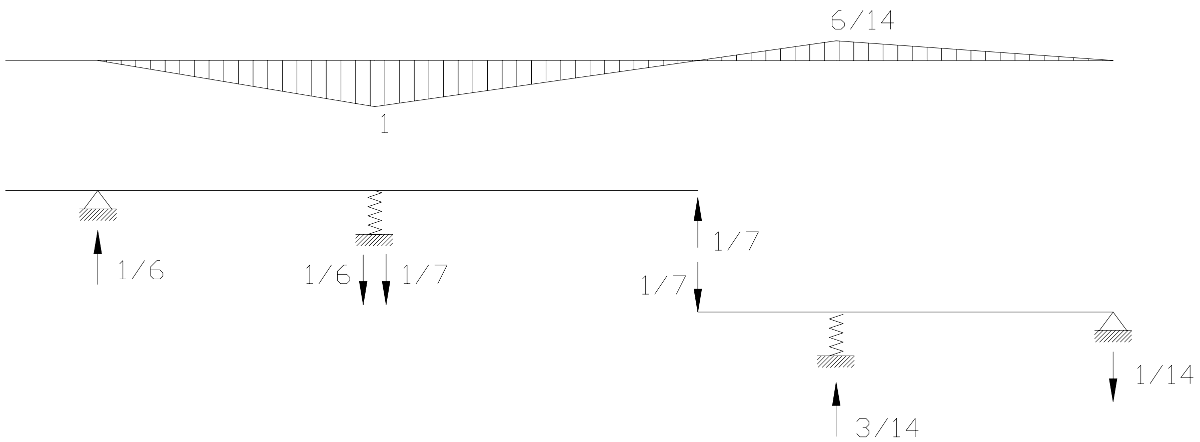


$$\{\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{ik} = \int \frac{M_i \cdot M_k}{EI} ds + \sum R \cdot R \cdot \frac{1}{k} \qquad gdzie\, k = 0{,}8 \cdot EI_0 \qquad \Delta_{iP} = \int \frac{M_P \cdot M_i}{EI} ds$$

Obciążenie P jest jedynkowe dlatego zgodnie z konwencją oznaczamy je jako δ.
Rysuję wykresy momentów od poszczególnych sił jednostkowych:

M_1 [-]



Korzystając z metody Wereszczegina- Mohra całkowania iloczynu dwóch funkcji (w tym jednej prostoliniowej) otrzymuje się:

$$\delta_{11}=\int\frac{M_1\cdot M_1}{EI}ds=\frac{1}{EI_0}\left[\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 1\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 1\right)+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{6}{14}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{14}\right)+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\frac{6}{14}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{14}\right)\right]+$$

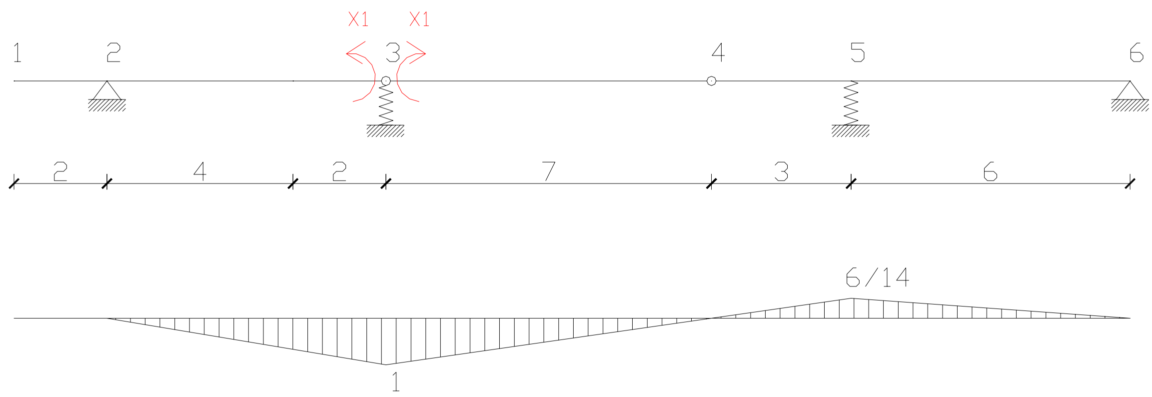
$$+\frac{1}{1{,}5EI_0}\left[\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 1\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 1\right)\right]+\frac{1}{0{,}8EI_0}\cdot\left[\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)^2+\left(\frac{3}{14}\right)^2\right]=\frac{1}{EI_0}\cdot 4{,}21995$$

Należy wykorzystać twierdzenie Maxwella:

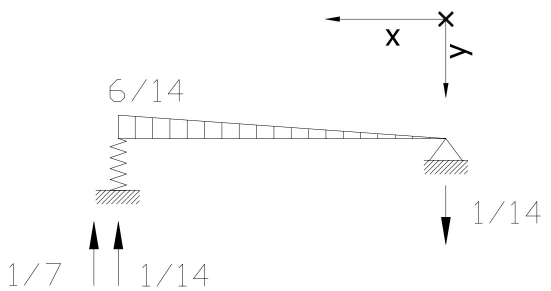
$$\delta_{1P}(x)=\delta_{P1}(x)$$

Zamiast obliczać przemieszczenie w danym punkcie od poruszającej się siły P, obliczamy przemieszczenia wszystkich punktów nad którymi stanie siła P (czyli linię ugięcia) od założonej siły jedynkowej $X_1=1$

Aby obliczyć linię wpływu X_1 należy obliczyć linie ugięcia w każdym z przedziałów wykorzystując równanie różniczkowe linii ugięcia.



ODCINEK $x\in\langle 5{,}6\rangle$



$$EI_0\frac{d^2y}{dx^2}=-M(x)$$

$$EI_0\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{14}\cdot x$$

$$EI_0\frac{dy}{dx}=C+\frac{1}{14}\cdot\frac{x^2}{2}$$

$$EI_0y=D+Cx+\frac{1}{14}\cdot\frac{x^3}{6}$$

Warunki brzegowe:

$x=0 \quad y=0 \qquad\qquad \rightarrow \qquad D=0$

$$x=6 \quad y=1\cdot\frac{3}{14}\cdot\frac{1}{k}=\frac{3}{14}\cdot\frac{1}{0{,}8\cdot EI_0}$$

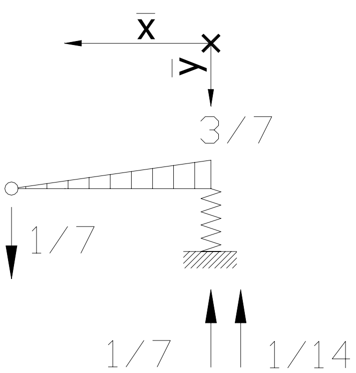
$$EI_0\cdot\frac{3}{14}\cdot\frac{1}{0{,}8\cdot EI_0}=D+Cx+\frac{1}{14}\cdot\frac{x^3}{6}$$

$$\frac{3}{14}\cdot\frac{10}{8}=6\cdot C+\frac{36}{14} \qquad\qquad \rightarrow \qquad C=-\frac{43}{112}$$

Znając stałe można napisać równanie różniczkowe linii ugięcia:

$$y=\frac{1}{EI_0}\left(-\frac{43}{112}\cdot x+\frac{x^3}{84}\right)$$

ODCINEK $x\in\langle 4{,}5\rangle$



$$EI_0\frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2}=-M(\bar{x})$$

$$EI_0\frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2}=\frac{3}{7}-\frac{1}{7}\cdot\bar{x}$$

$$EI_0\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}=C+\frac{3}{7}\cdot\bar{x}+\frac{1}{7}\cdot\frac{\bar{x}^2}{2}$$

$$EI_0\bar{y}=D+C\bar{x}+\frac{3}{7}\cdot\frac{\bar{x}^2}{2}-\frac{1}{7}\cdot\frac{\bar{x}^3}{6}$$

Warunki brzegowe:

$$\bar{x}=0 \quad \bar{y}=\frac{3}{14}\cdot\frac{1}{0{,}8\cdot EI_0} \qquad \rightarrow \qquad D=EI_0\cdot\frac{3}{14}\cdot\frac{1}{0{,}8\cdot EI_0}=\frac{30}{112}$$

$\bar{x}=0$

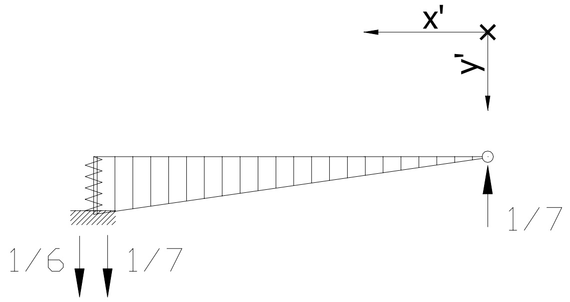
$\varphi(\bar{x}=0)=\varphi(x=6)$

$$C=-\frac{43}{112}+\frac{1}{14}\cdot\frac{6^2}{2} \qquad \rightarrow \qquad C=\frac{101}{112}$$

Znając stałe można napisać równanie różniczkowe linii ugięcia:

$$\bar{y}=\frac{1}{EI_0}\left(\frac{30}{112}+\frac{101}{112}\cdot\bar{x}+\frac{3}{14}\cdot\bar{x}^2-\frac{1}{42}\cdot\bar{x}^3\right)$$

ODCINEK $x \in \langle 3,4 \rangle$



$$EI_0 \frac{d^2 y'}{d(x')^2} = -M(x')$$

$$1{,}5 \cdot EI_0 \frac{d^2 y'}{d(x')^2} = \frac{1}{7} \cdot (x')^2$$

$$1{,}5 \cdot EI_0 \frac{dy'}{dx'} = C + \frac{1}{14} \cdot (x')^2$$

$$1{,}5 \cdot EI_0 y' = D + Cx' - \frac{1}{14} \cdot \frac{(x')^2}{3}$$

Warunki brzegowe:

$x' = 0 \quad y(x'=0) = y(\bar{x} = 3)$

$$\frac{1}{1{,}5EI_0} \cdot D = \frac{1}{EI_0}\left(\frac{30}{112} + \frac{101}{112} \cdot 3 + \frac{3}{14} \cdot 3^2 - \frac{1}{42} \cdot 3^3\right) \quad \rightarrow \quad D = \frac{1431}{224}$$

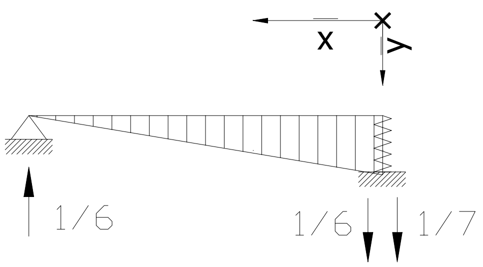
$x' = 7 \quad y' = -\frac{13}{42} \cdot \frac{1}{0{,}8 \cdot EI_0}$

$$1{,}5 \cdot EI_0 \cdot \left(-\frac{13}{42} \cdot \frac{1}{0{,}8 \cdot EI_0}\right) = \frac{1431}{224} + 7 \cdot C - \frac{1}{14} \cdot \frac{343}{3} \quad \rightarrow \quad C = \frac{115}{672}$$

Znając stałe można napisać równanie różniczkowe linii ugięcia:

$$y' = \frac{1}{1{,}5 \cdot EI_0}\left(\frac{1431}{224} + \frac{115}{672} \cdot x' - \frac{1}{14} \cdot \frac{x'^3}{3}\right)$$

ODCINEK $x \in \langle 2,3 \rangle$



$$EI_0 \frac{d^2 \underline{y}}{d\underline{x}^2} = -M(\underline{x})$$

$$EI_0 \frac{d^2 \underline{y}}{d\underline{x}^2} = -1 + \frac{1}{6} \cdot \underline{x}$$

$$EI_0 \frac{d\underline{y}}{d\underline{x}} = C - 1 \cdot \underline{x} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\underline{x}^2}{2}$$

$$EI_0 \underline{y} = D + C\underline{x} - \frac{\underline{x}^2}{2} + \frac{\underline{x}^3}{36}$$

Warunki brzegowe:

$\underline{x} = 0 \quad \underline{y} = -\frac{13}{42} \cdot \frac{1}{0{,}8 \cdot EI_0} \quad \rightarrow \quad D = -\frac{130}{336}$

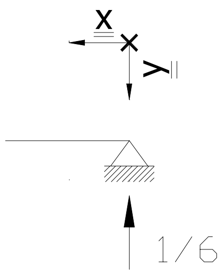
$\underline{x} = 6 \quad \underline{y} = 0$

$$0 = -\frac{130}{336} + 6 \cdot C - \frac{36}{2} + 6 \quad \rightarrow \quad C = \frac{2081}{1008}$$

Znając stałe można napisać równanie różniczkowe linii ugięcia:

$$\underline{y} = \frac{1}{EI_0}\left(-\frac{130}{336} + \frac{2081}{1008} \cdot \underline{x} - \frac{\underline{x}^2}{2} + \frac{\underline{x}^3}{36}\right)$$

ODCINEK $x \in \langle 1,2 \rangle$



$$EI_0 \frac{d^2 \bar{\bar{y}}}{d\bar{\bar{x}}^2} = -M\left(\bar{\bar{x}}\right)$$

$$EI_0 \frac{d^2 \bar{\bar{y}}}{d\bar{\bar{x}}^2} = 0$$

$$EI_0 \frac{d\bar{\bar{y}}}{d\bar{\bar{x}}} = C$$

$$EI_0 \bar{\bar{y}} = D + C\bar{\bar{x}}$$

Warunki brzegowe:

$\bar{\bar{x}} = 0 \quad \bar{\bar{y}} = 0 \qquad \rightarrow \qquad D = 0$

$\bar{\bar{x}} = 0 \quad \varphi\left(\bar{\bar{x}} = 0\right) = \varphi\left(\underline{x} = 6\right)$

$C = \frac{2081}{1008} - 6 + 3 \qquad \rightarrow \qquad C = -\frac{943}{1008}$

Znając stałe można napisać równanie różniczkowe linii ugięcia:

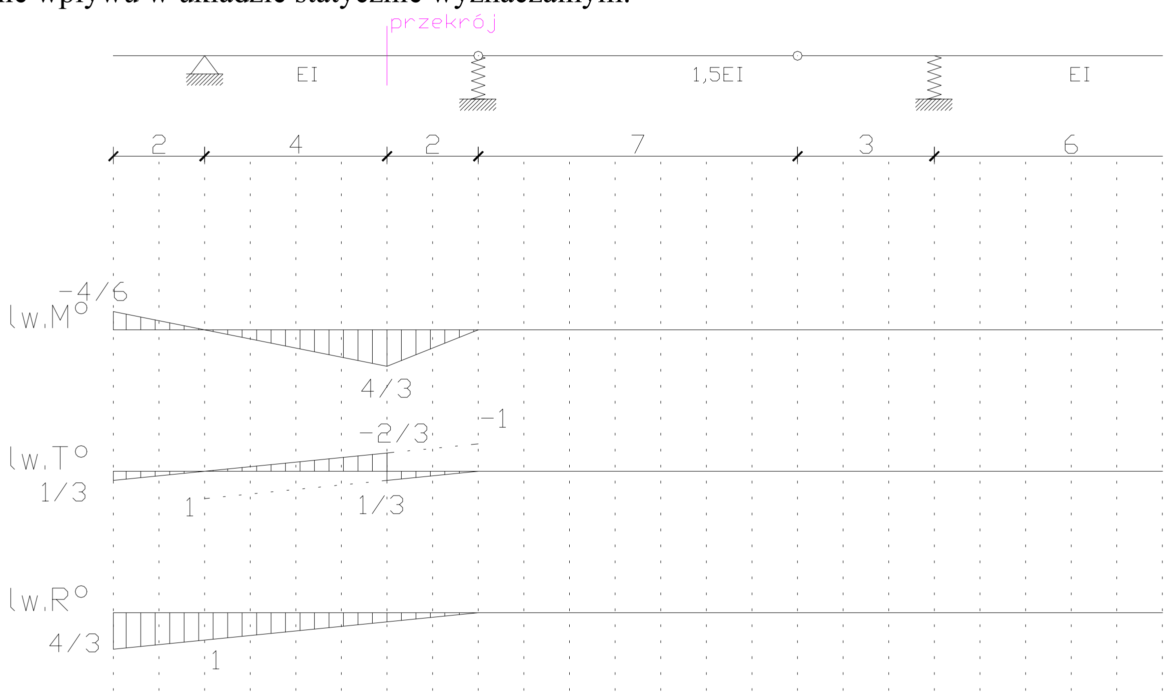
$$\bar{\bar{y}} = \frac{1}{EI_0}\left(-\frac{943}{1008} \cdot \bar{\bar{x}}\right)$$

Znając równania linii ugięcia belki można obliczyć linię wpływu X_1 zgodnie z zależnością:

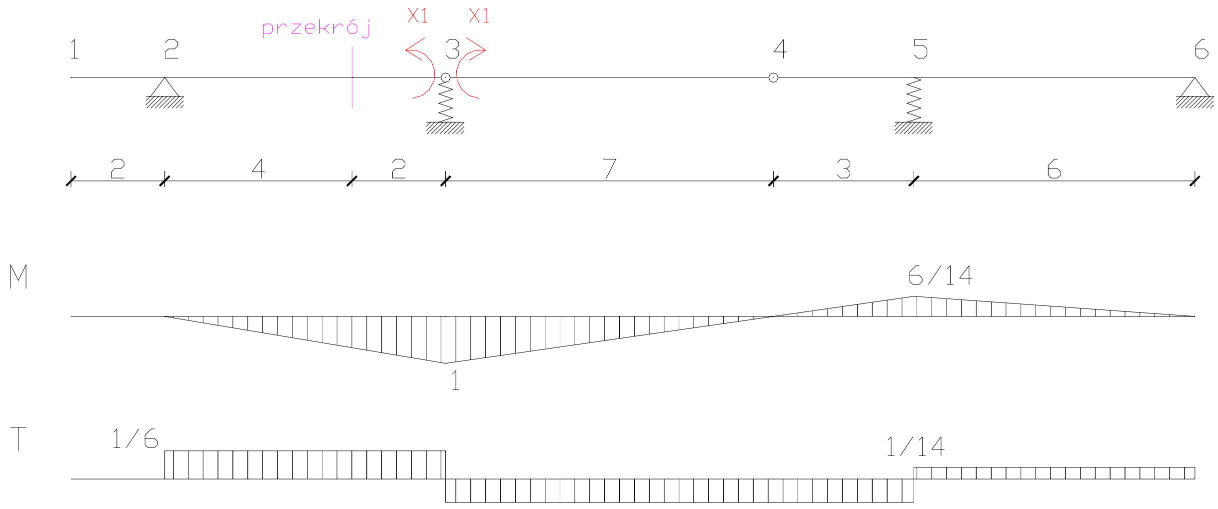
$$lwX_1 = -\frac{\delta_{1P}(x) \cdot EI_0}{\delta_{11}}$$

Do obliczenia linii wpływu potrzebne są jeszcze linie wpływu M^0, R^0, T^0 w układzie statycznie wyznaczalnym i wartości M, R, T w przekroju od wprowadzonej siły $X_1=1$. Całość na końcu zostanie zestawiona w tabeli.

Linie wpływu w układzie statycznie wyznaczalnym:



Wartości M, T i R od wprowadzonej siły X_1=1:



$$M_{\alpha}(X_1 = 1) = \frac{2}{3}$$

$$T_{\alpha}(X_1 = 1) = \frac{1}{6}$$

$$R(X_1 = 1) = \frac{1}{6}$$

	M_0	T_0	R_0	M od X=1	T 0d X=1	R od X=1		Lw. X_1	Lw. M	Lw. T	Lw. R
0	-0,667	0,333333	1,333333	0,666667	0,166667	0,166667	2	0,446925	-0,36872	0,407821	1,407821
1	-0,334	0,166667	1,166667	0,666667	0,166667	0,166667	1	0,223462	-0,18436	0,20391	1,20391
2	0	0	1	0,666667	0,166667	0,166667	0	0	0	0	1
3	0,334	-0,16667	0,833333	0,666667	0,166667	0,166667	5	-0,21511	0,189929	-0,20252	0,797482
4	0,667	-0,33333	0,666667	0,666667	0,166667	0,166667	4	-0,39072	0,406188	-0,39845	0,601547
5	1	-0,5	0,5	0,666667	0,166667	0,166667	3	-0,48734	0,675107	-0,58122	0,418777
6	1,334	-0,66667	0,333333	0,666667	0,166667	0,166667	2	-0,46548	1,023016	-0,74425	0,255754
	1,334	0,333333	0,333333	0,666667	0,166667	0,166667	2	-0,46548	1,023016	0,255754	0,255754
7	0,667	0,166667	0,166667	0,666667	0,166667	0,166667	1	-0,28563	0,476245	0,119061	0,119061
8	0	0	0	0,666667	0,166667	0,166667	0	0,091685	0,061123	0,015281	0,015281
9	0	0	0	0,666667	0,166667	0,166667	6	-0,35898	-0,23932	-0,05983	-0,05983
10	0	0	0	0,666667	0,166667	0,166667	5	-0,67424	-0,44949	-0,11237	-0,11237
11	0	0	0	0,666667	0,166667	0,166667	4	-0,87665	-0,58443	-0,14611	-0,14611
12	0	0	0	0,666667	0,166667	0,166667	3	-0,98878	-0,65919	-0,1648	-0,1648
13	0	0	0	0,666667	0,166667	0,166667	2	-1,03322	-0,68881	-0,1722	-0,1722
14	0	0	0	0,666667	0,166667	0,166667	1	-1,03251	-0,68834	-0,17209	-0,17209
15	0	0	0	0,666667	0,166667	0,166667	0	-1,00924	-0,67282	-0,16821	-0,16821
16	0	0	0	0,666667	0,166667	0,166667	2	-0,64885	-0,43256	-0,10814	-0,10814
17	0	0	0	0,666667	0,166667	0,166667	1	-0,32231	-0,21487	-0,05372	-0,05372
18	0	0	0	0,666667	0,166667	0,166667	0	-0,06347	-0,04232	-0,01058	-0,01058
19	0	0	0	0,666667	0,166667	0,166667	5	0,102264	0,068176	0,017044	0,017044
20	0	0	0	0,666667	0,166667	0,166667	4	0,183369	0,122246	0,030562	0,030562
21	0	0	0	0,666667	0,166667	0,166667	3	0,196769	0,13118	0,032795	0,032795
22	0	0	0	0,666667	0,166667	0,166667	2	0,15939	0,10626	0,026565	0,026565
23	0	0	0	0,666667	0,166667	0,166667	1	0,088158	0,058772	0,014693	0,014693
24	0	0	0	0,666667	0,166667	0,166667	0	0	0	0	0

LINIE WPŁYWOWE W UKŁADZIE STATYCZNIE NIEWYZNACZALNYM ZGODNIE Z WARTOŚCIAMI NA STRONIE 7: