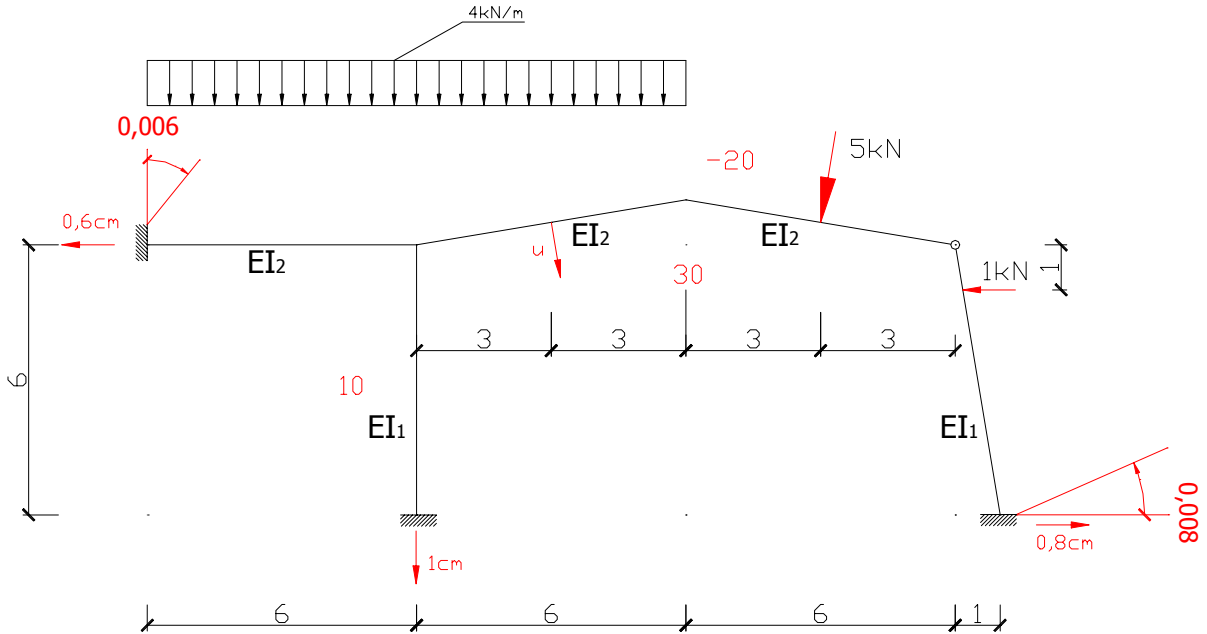
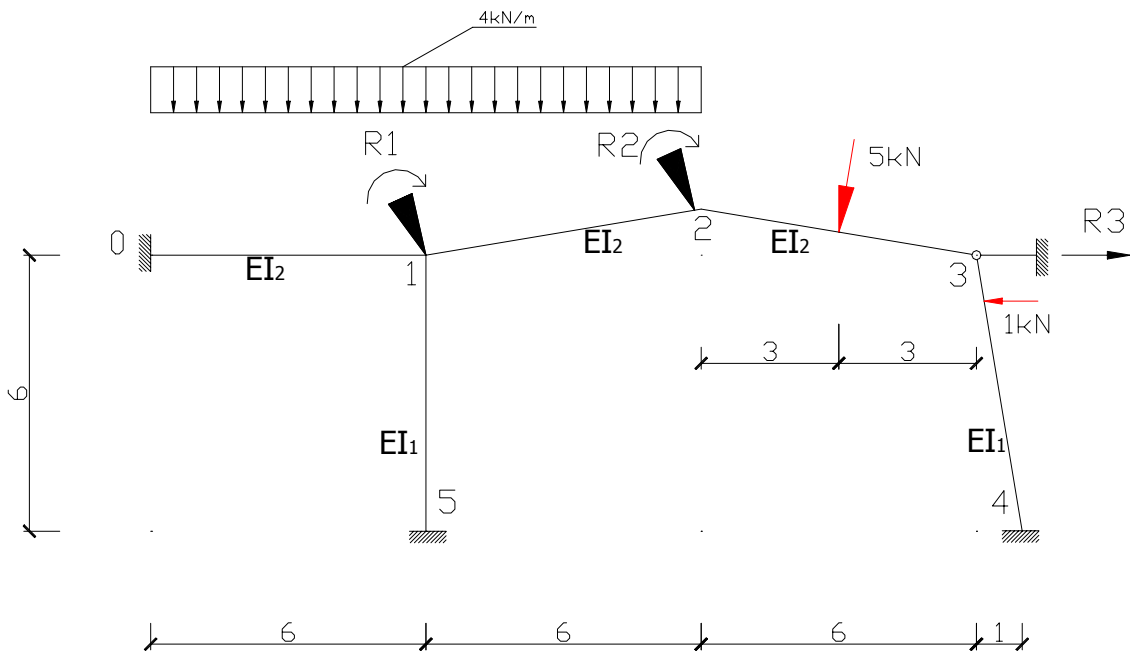


## OBLICZANIE UKŁADÓW STATYCZNIE NIEWYZNACZALNYCH METODĄ PRZEMIESZCZEŃ.

Zadana rama wygląda następująco:



Dobieram schemat podstawowy i zapisuję układ równań kanonicznych:



$$\begin{cases} r_{11} \cdot \varphi_1 + r_{12} \cdot \varphi_2 + r_{13} \cdot \Delta_3 + R_{1P} = 0 \\ r_{21} \cdot \varphi_1 + r_{22} \cdot \varphi_2 + r_{23} \cdot \Delta_3 + R_{2P} = 0 \\ r_{31} \cdot \varphi_1 + r_{32} \cdot \varphi_2 + r_{33} \cdot \Delta_3 + R_{3P} = 0 \end{cases}$$

Przyjmuję współczynnik porównawczy sztywności:

$$EI_1 = 4243,5 \text{ [kNm}^2 \text{]}$$

$$EI_2 = 8712,5 \text{ [kNm}^2 \text{]}$$

$$EI_0 = EI_2 = 8712,5 \text{ [kNm}^2 \text{]}$$

$$EI_1 = 0,487 \cdot EI_0$$

Równanie łańcucha kinematycznego dla przedstawienia obrotu cięciwy przez przemieszczenie  $\Delta$ :

015  $\rightarrow$

$$\psi_{01} \cdot 0 + \psi_{15} \cdot 6 = 0 \quad \psi_{15} = 0$$

510  $\uparrow$

$$\psi_{15} \cdot 0 + \psi_{10} \cdot 6 = 0 \quad \psi_{10} = 0$$

43  $\rightarrow$

$$\psi_{43} \cdot 6 = \Delta \quad \psi_{34} = \frac{\Delta}{6}$$

51234  $\uparrow$

$$\psi_{15} \cdot 0 - \psi_{12} \cdot 6 - \psi_{12} \cdot 6 - \psi_{34} \cdot 1 = 0 \quad \psi_{12} = -\psi_{23} - \psi_{34} \cdot \frac{1}{6}$$

5123  $\rightarrow$

$$\psi_{51} \cdot 0 + \psi_{12} \cdot 1 - \psi_{12} \cdot 1 = \Delta \quad \psi_{23} = -\frac{37}{72} \Delta$$

$$\psi_{12} = \frac{35}{72} \Delta$$

Rysuję stany od zadanych jednostkowych przesunięć:

**Stan 1:**  $\varphi_1 = 1 \quad \varphi_2 = 0 \quad \Delta = 0$

$$M_{01} = \frac{2EI_2}{l} \cdot (2 \cdot \varphi_0 + \varphi_1 - 3 \cdot \psi_{01}) = \frac{2EI_0}{6} \cdot (2 \cdot 0 + 1 - 3 \cdot 0) = \frac{1}{3} \cdot EI_0$$

$$M_{10} = \frac{2EI_2}{l} \cdot (2 \cdot \varphi_1 + \varphi_0 - 3 \cdot \psi_{01}) = \frac{2EI_0}{6} \cdot (2 \cdot 1 + 0 - 3 \cdot 0) = \frac{2}{3} \cdot EI_0$$

$$M_{15} = \frac{2EI_1}{l} \cdot (2 \cdot \varphi_1 + \varphi_5 - 3 \cdot \psi_{15}) = \frac{2EI_0 \cdot 0,487}{6} \cdot (2 \cdot 1 + 0 - 3 \cdot 0) = 0,3247 \cdot EI_0$$

$$M_{51} = \frac{2EI_1}{l} \cdot (2 \cdot \varphi_5 + \varphi_1 - 3 \cdot \psi_{15}) = \frac{2EI_0 \cdot 0,487}{6} \cdot (2 \cdot 0 + 1 - 3 \cdot 0) = 0,16235 \cdot EI_0$$

$$M_{12} = \frac{2EI_2}{l} \cdot (2 \cdot \varphi_1 + \varphi_2 - 3 \cdot \psi_{12}) = \frac{2EI_0}{\sqrt{37}} \cdot \left( 2 \cdot 1 + 0 - 3 \cdot \frac{35}{72} \cdot 0 \right) = 0,65759 \cdot EI_0$$

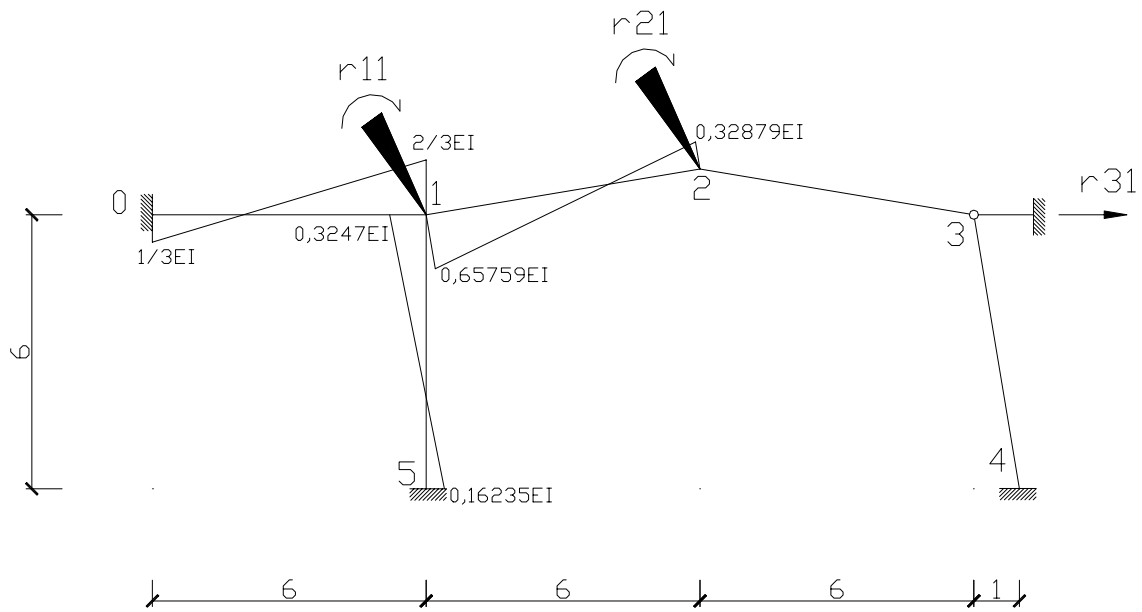
$$M_{21} = \frac{2EI_2}{l} \cdot (2 \cdot \varphi_2 + \varphi_1 - 3 \cdot \psi_{12}) = \frac{2EI_0}{\sqrt{37}} \cdot \left( 2 \cdot 0 + 1 - 3 \cdot \frac{35}{72} \cdot 0 \right) = 0,32879 \cdot EI_0$$

$$M_{23} = \frac{3EI_2}{l} \cdot (\varphi_2 - \psi_{23}) = \frac{3EI_0}{\sqrt{37}} \cdot \left( 0 + \frac{37}{72} \cdot 0 \right) = 0$$

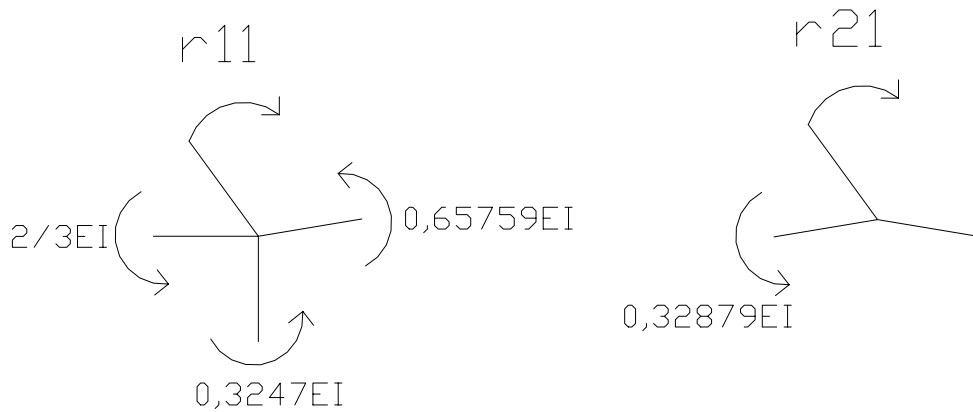
$$M_{32} = 0$$

$$M_{34} = 0$$

$$M_{43} = \frac{3EI_2}{l} \cdot (\varphi_4 - \psi_{43}) = \frac{3EI_0}{\sqrt{37}} \cdot \left( 0 - \frac{1}{6} \cdot 0 \right) = 0$$



Wyznaczenie reakcji  $r_{11}$  i  $r_{21}$  z równowagi węzłów:



$$\mathbf{r_{11} = 1,64896 EI}$$

$$\mathbf{r_{21} = 0,32879 EI}$$

Reakcje  $r_{31}$  obliczę korzystając z równania pracy wirtualnej (obrotu  $\psi$  ze strony 2):

$$r_{31} \cdot \bar{\Delta} + (0,65759 + 0,32879) \cdot EI_0 \cdot \psi_{12} = 0$$

$$r_{31} \cdot \bar{\Delta} + (0,65759 + 0,32879) \cdot EI_0 \cdot \frac{35}{72} \cdot \bar{\Delta} = 0$$

$$\mathbf{r_{31} = -0,47949 EI}$$

**Stan 2:**  $\varphi_1 = 0$   $\varphi_2 = 1$   $\Delta = 0$

$$M_{01} = \frac{2EI_2}{l} \cdot (2 \cdot \varphi_0 + \varphi_1 - 3 \cdot \psi_{01}) = \frac{2EI_0}{6} \cdot (2 \cdot 0 + 0 - 3 \cdot 0) = 0$$

$$M_{10} = \frac{2EI_2}{l} \cdot (2 \cdot \varphi_1 + \varphi_0 - 3 \cdot \psi_{01}) = \frac{2EI_0}{6} \cdot (2 \cdot 0 + 0 - 3 \cdot 0) = 0$$

$$M_{15} = \frac{2EI_1}{l} \cdot (2 \cdot \varphi_1 + \varphi_5 - 3 \cdot \psi_{15}) = \frac{2EI_0 \cdot 0,487}{6} \cdot (2 \cdot 0 + 0 - 3 \cdot 0) = 0$$

$$M_{51} = \frac{2EI_1}{l} \cdot (2 \cdot \varphi_5 + \varphi_1 - 3 \cdot \psi_{15}) = \frac{2EI_0 \cdot 0,487}{6} \cdot (2 \cdot 0 + 0 - 3 \cdot 0) = 0$$

$$M_{12} = \frac{2EI_2}{l} \cdot (2 \cdot \varphi_1 + \varphi_2 - 3 \cdot \psi_{12}) = \frac{2EI_0}{\sqrt{37}} \cdot \left( 2 \cdot 0 + 1 - 3 \cdot \frac{35}{72} \cdot 0 \right) = 0,32879 \cdot EI_0$$

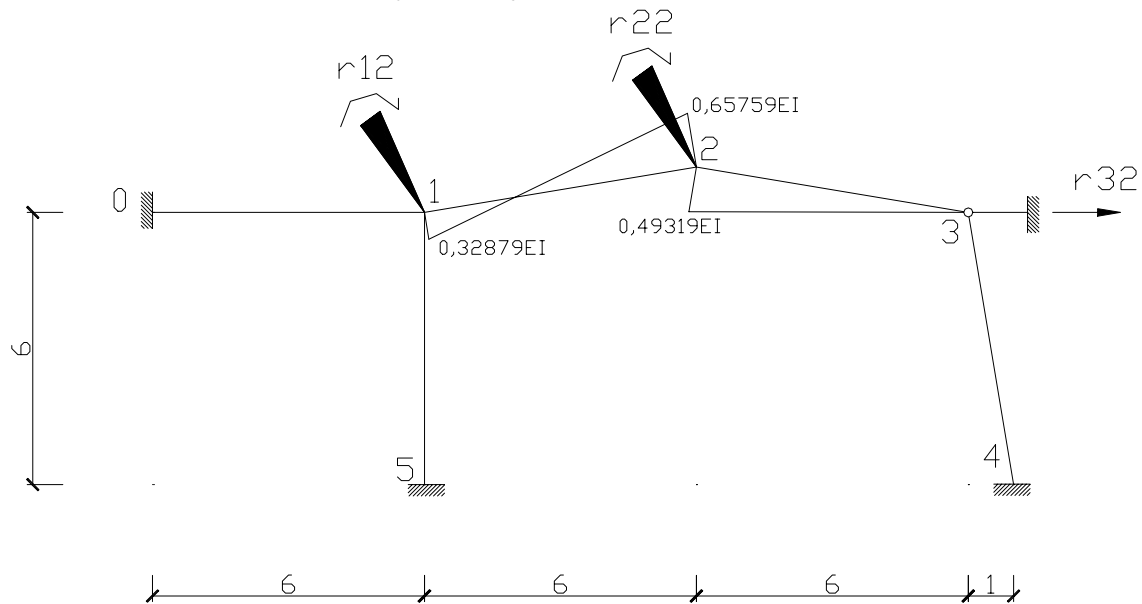
$$M_{21} = \frac{2EI_2}{l} \cdot (2 \cdot \varphi_2 + \varphi_1 - 3 \cdot \psi_{12}) = \frac{2EI_0}{\sqrt{37}} \cdot \left( 2 \cdot 1 + 0 - 3 \cdot \frac{35}{72} \cdot 0 \right) = 0,65759 \cdot EI_0$$

$$M_{23} = \frac{3EI_2}{l} \cdot (\varphi_2 - \psi_{23}) = \frac{3EI_0}{\sqrt{37}} \cdot \left( 1 + \frac{37}{72} \cdot 0 \right) = 0,49319 \cdot EI_0$$

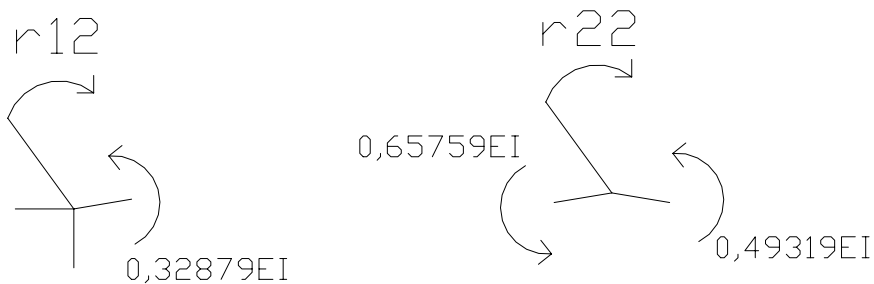
$$M_{32} = 0$$

$$M_{34} = 0$$

$$M_{43} = \frac{3EI_2}{l} \cdot (\varphi_4 - \psi_{43}) = \frac{3EI_0}{\sqrt{37}} \cdot \left( 0 - \frac{1}{6} \cdot 0 \right) = 0$$



Wyznaczenie reakcji  $r_{12}$  i  $r_{22}$  z równowagi węzłów:



**$r_{12} = 0,32879 EI$**

**$r_{22} = 1,15078 EI$**

Reakcje  $r_{32}$  obliczę korzystając z równania pracy wirtualnej (obroty  $\psi$  ze strony 2):

$$r_{32} \cdot \bar{\Delta} + (0,65759 + 0,32879) \cdot EI_0 \cdot \psi_{12} + 0,49319 \cdot EI_0 \cdot \psi_{23} = 0$$

$$r_{32} \cdot \bar{\Delta} + (0,65759 + 0,32879) \cdot EI_0 \cdot \frac{35}{72} \cdot \bar{\Delta} + 0,49319 \cdot EI_0 \cdot \left(-\frac{37}{72}\right) \cdot \bar{\Delta} = 0$$

**$r_{32} = -0,22604 EI$**

**Stan 3:**  $\varphi_1 = 0$   $\varphi_2 = 0$   $\Delta = 1$  (obroty  $\psi$  ze strony 2):

$$M_{01} = \frac{2EI_2}{l} \cdot (2 \cdot \varphi_0 + \varphi_1 - 3 \cdot \psi_{01}) = \frac{2EI_0}{6} \cdot (2 \cdot 0 + 0 - 3 \cdot 0) = 0$$

$$M_{10} = \frac{2EI_2}{l} \cdot (2 \cdot \varphi_1 + \varphi_0 - 3 \cdot \psi_{01}) = \frac{2EI_0}{6} \cdot (2 \cdot 0 + 0 - 3 \cdot 0) = 0$$

$$M_{15} = \frac{2EI_1}{l} \cdot (2 \cdot \varphi_1 + \varphi_5 - 3 \cdot \psi_{15}) = \frac{2EI_0 \cdot 0,487}{6} \cdot (2 \cdot 0 + 0 - 3 \cdot 0) = 0$$

$$M_{51} = \frac{2EI_1}{l} \cdot (2 \cdot \varphi_5 + \varphi_1 - 3 \cdot \psi_{15}) = \frac{2EI_0 \cdot 0,487}{6} \cdot (2 \cdot 0 + 0 - 3 \cdot 0) = 0$$

$$M_{12} = \frac{2EI_2}{l} \cdot (2 \cdot \varphi_1 + \varphi_2 - 3 \cdot \psi_{12}) = \frac{2EI_0}{\sqrt{37}} \cdot \left(2 \cdot 0 + 0 - 3 \cdot \frac{35}{72} \cdot 1\right) = -0,47949 \cdot EI_0$$

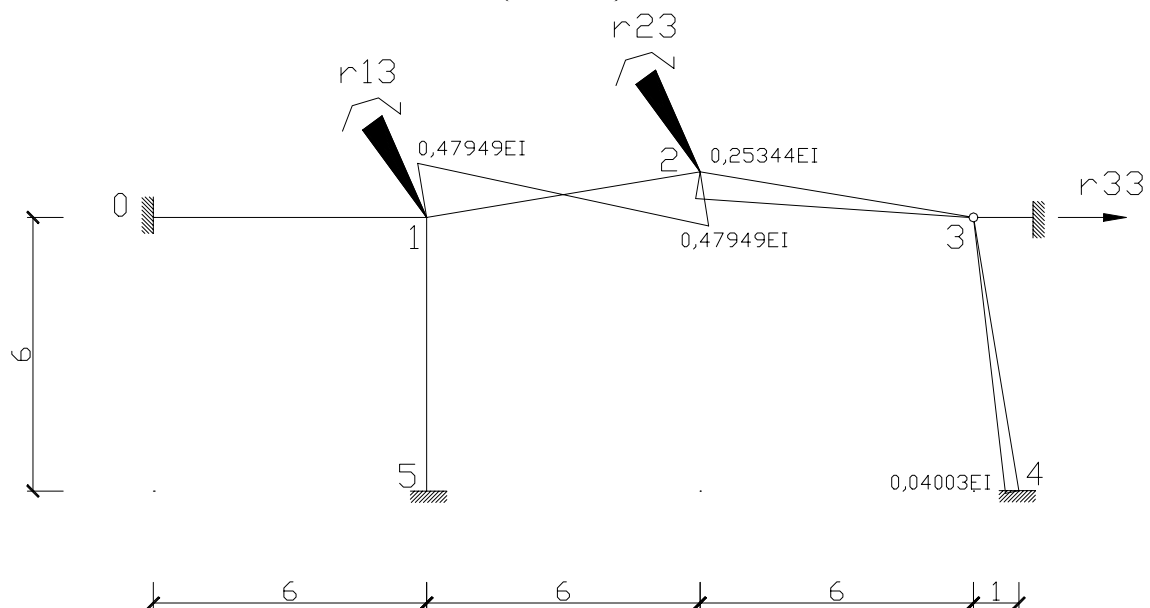
$$M_{21} = \frac{2EI_2}{l} \cdot (2 \cdot \varphi_2 + \varphi_1 - 3 \cdot \psi_{12}) = \frac{2EI_0}{\sqrt{37}} \cdot \left(2 \cdot 0 + 1 - 3 \cdot \frac{35}{72} \cdot 0\right) = -0,47949 \cdot EI_0$$

$$M_{23} = \frac{3EI_2}{l} \cdot (\varphi_2 - \psi_{23}) = \frac{3EI_0}{\sqrt{37}} \cdot \left(0 + \frac{37}{72} \cdot 1\right) = 0,25344 \cdot EI_0$$

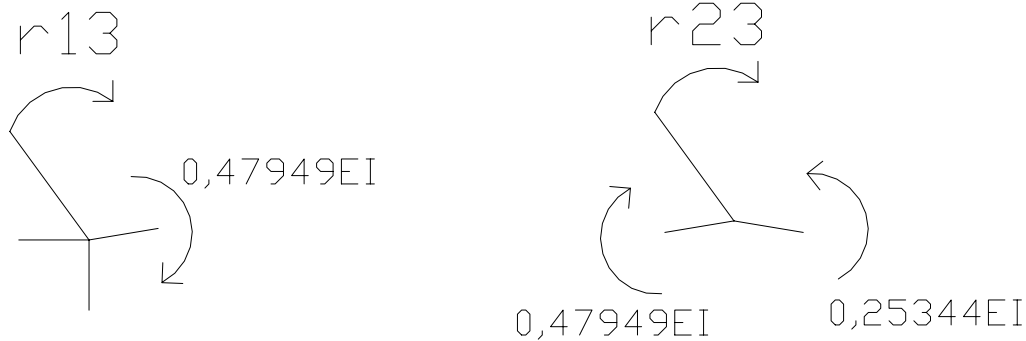
$M_{32} = 0$

$M_{34} = 0$

$$M_{43} = \frac{3EI_1}{l} \cdot (\varphi_4 - \psi_{43}) = \frac{3EI_0 \cdot 0,487}{\sqrt{37}} \cdot \left(0 - \frac{1}{6} \cdot 1\right) = -0,04003 \cdot EI_0$$



Wyznaczenie reakcji  $r_{13}$  i  $r_{23}$  z równowagi węzłów (równoczesne sprawdzenie wcześniej otrzymanych wyników, bo  $r_{13} = r_{31}$  a  $r_{23} = r_{32}$ ):



$$\mathbf{r_{13} = -0,47949 EI}$$

$$\mathbf{r_{23} = -0,22604 EI}$$

Reakcje  $r_{33}$  obliczę korzystając z równania pracy wirtualnej (obroty  $\psi$  ze strony 2):

$$r_{33} \cdot \bar{\Delta} - (2 \cdot 0,47949) \cdot EI_0 \cdot \psi_{12} + 0,25344 \cdot EI_0 \cdot \psi_{23} - 0,04003 \cdot \psi_{34} = 0$$

$$r_{33} \cdot \bar{\Delta} - (2 \cdot 0,47949) \cdot EI_0 \cdot \frac{35}{72} \cdot \bar{\Delta} + 0,25344 \cdot EI_0 \cdot \left(-\frac{37}{72}\right) \cdot \bar{\Delta} - 0,04003 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \bar{\Delta} = 0$$

$$\mathbf{r_{33} = 0,60308 EI}$$

**Stan P:**

$$M_{01} = -\frac{q \cdot l^2}{12} = -\frac{4 \cdot 6^2}{12} = -12 [kNm]$$

$$M_{10} = -\frac{q \cdot l^2}{12} = -\frac{4 \cdot 6^2}{12} = -12 [kNm]$$

$$M_{15} = 0 [kNm]$$

$$M_{51} = 0 [kNm]$$

$$M_{12} = -\frac{q \cdot l^2}{12} = -\frac{4 \cdot 6^2}{12} = -12$$

$$M_{21} = -\frac{q \cdot l^2}{12} = -\frac{4 \cdot 6^2}{12} = -12 [kNm]$$

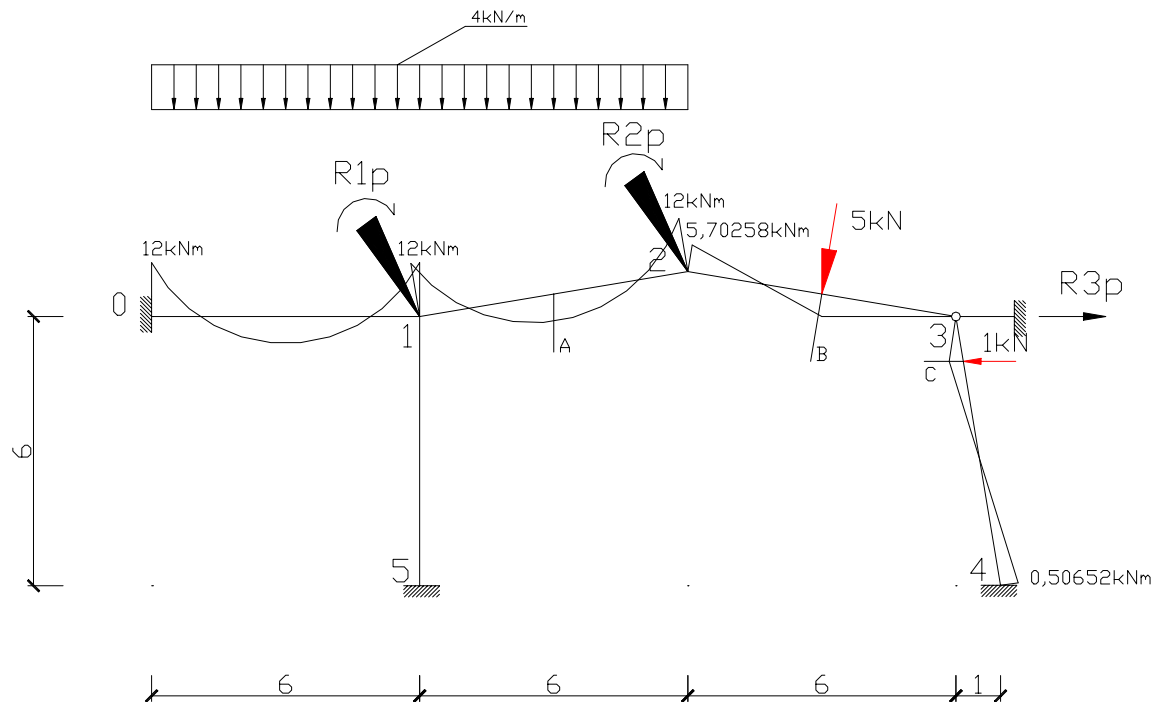
$$M_{23} = \frac{3}{16} \cdot P \cdot l = \frac{3}{16} \cdot 5 \cdot \sqrt{37} = 5,70258 [kNm]$$

$$M_{32} = 0 [kNm]$$

$$M_{34} = 0 [kNm]$$

$$M_{43} = \frac{P \cdot a}{2 \cdot l^3} \cdot (2 \cdot l^3 - 3 \cdot l^3 - a \cdot l) = -0,50625 [kNm]$$

$M_p^0$  [kNm]



Wyznaczenie reakcji  $R_{1p}$  i  $R_{2p}$  z równowagi węzłów:

$R_{1p} = 0 \text{ kNm}$

$R_{2p} = 6,29742 \text{ kNm}$

Reakcje  $r_{33}$  obliczę korzystając z równania pracy wirtualnej (obroty  $\psi$  ze strony 2):

$$R_{33} \cdot 1 - 5,70258 \cdot \psi_{23} + 0,50652 \cdot \psi_{34} + 4 \cdot 6 \cdot \delta_A + 5 \sin \alpha \cdot \delta_B^y + 5 \cos \alpha \cdot \delta_B^x + 1 \cdot \delta_C = 0$$

Równanie łańcucha kinematycznego:

01A ↓

$$\psi_{01} \cdot 6 + \psi_{12} \cdot 3 = \delta_A \qquad \delta_A = \frac{105}{72} \cdot \bar{\Delta}$$

43B ↑

$$\psi_{43} \cdot 1 + \psi_{32} \cdot 3 = -\delta_B^y \qquad \delta_B^y = \frac{99}{72} \cdot \bar{\Delta}$$

43B →

$$\psi_{43} \cdot 6 + \psi_{32} \cdot 0,5 = -\delta_B^x \qquad \delta_B^x = -\frac{107}{144} \cdot \bar{\Delta}$$

4C →

$$\psi_{43} \cdot 5 = -\delta_C \qquad \delta_C = -\frac{5}{6} \cdot \bar{\Delta}$$

$R_{3p} = -43,35224 \text{ kNm}$

Obliczone współczynniki podstawiam do układu równań i obliczam przemieszczenia:

$$\begin{bmatrix} 1,64896 \cdot EI_0 & 0,32879 \cdot EI_0 & -0,47949 \cdot EI_0 \\ 0,32879 \cdot EI_0 & 1,15078 \cdot EI_0 & -0,22604 \cdot EI_0 \\ -0,47949 \cdot EI_0 & -0,22604 \cdot EI_0 & 0,60308 \cdot EI_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1,64896 \cdot EI_0 \cdot \varphi_1 + 0,32879 \cdot EI_0 \cdot \varphi_2 - 0,47949 \cdot EI_0 \cdot \Delta_3 = 0 \\ 0,32879 \cdot EI_0 \cdot \varphi_1 + 1,15078 \cdot EI_0 \cdot \varphi_2 - 0,22604 \cdot EI_0 \cdot \Delta_3 + 6,29742 = 0 \\ -0,47949 \cdot EI_0 \cdot \varphi_1 - 0,22604 \cdot EI_0 \cdot \varphi_2 + 0,60308 \cdot EI_0 \cdot \Delta_3 - 43,35224 = 0 \end{cases}$$

Należy zwrócić uwagę, że współczynniki  $r_{ik}$  są mnożone przez  $EI$  a  $R_{ip}$  są policzone w [kNm].

Rozwiązanie układu równań daje wyniki:

$$\varphi_1 = 3.0447277255891052036 \cdot 10^{-3}$$

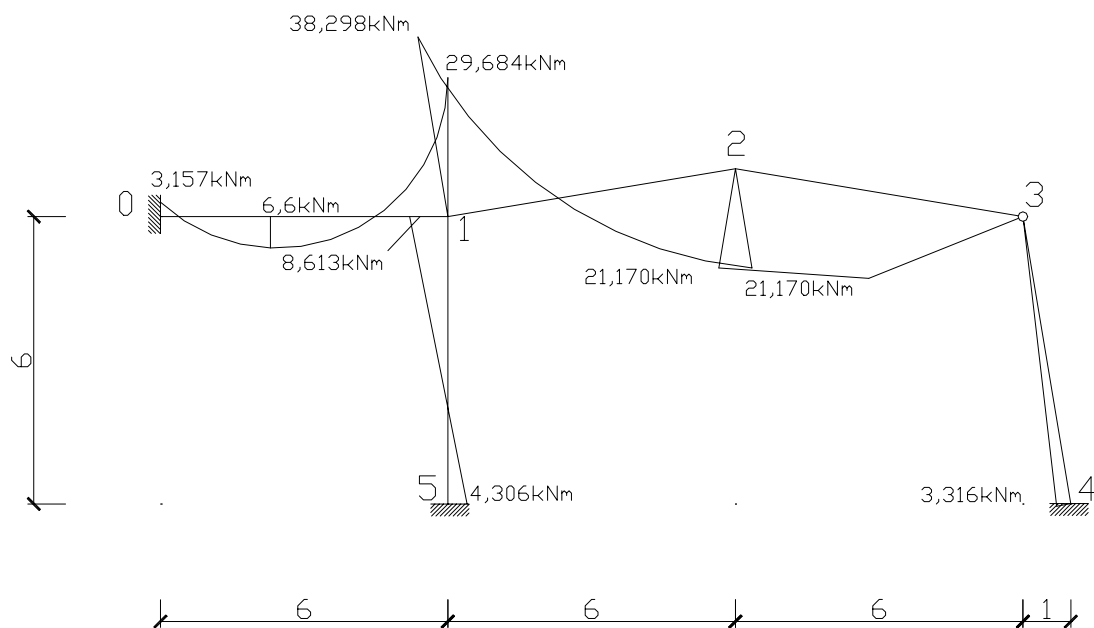
$$\varphi_2 = 6.4571122700114886147 \cdot 10^{-4}$$

$$\Delta_3 = 1.0913549030664077772 \cdot 10^{-2}$$

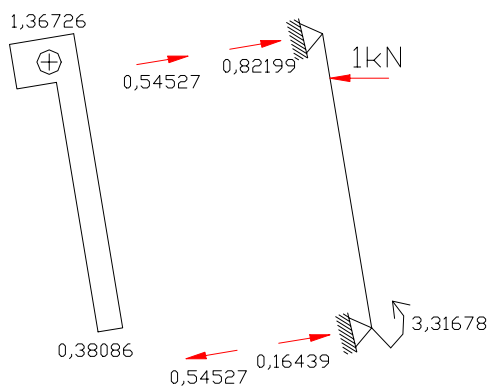
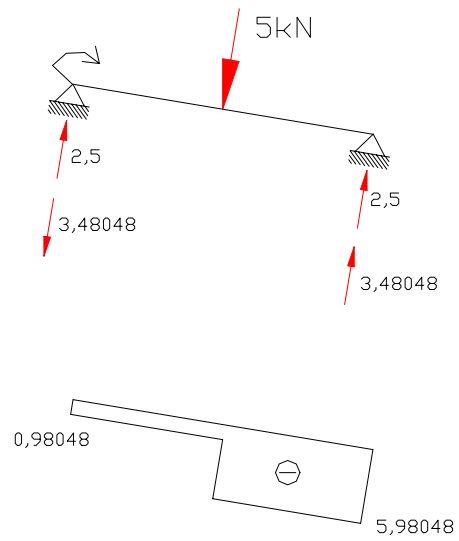
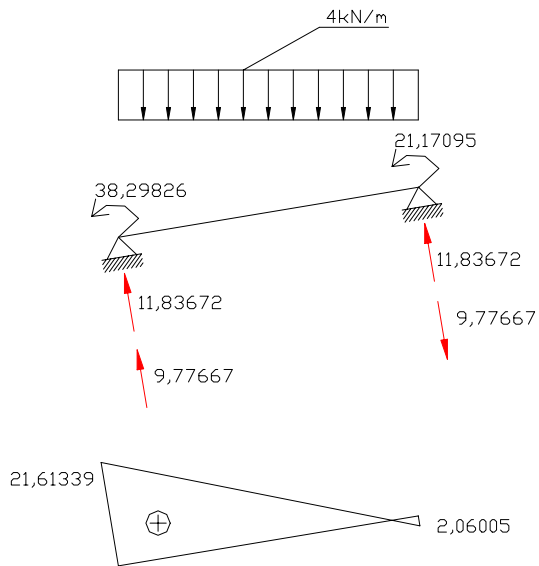
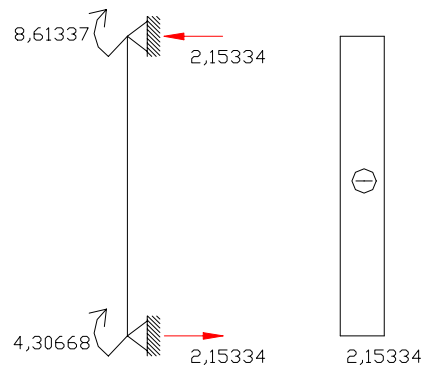
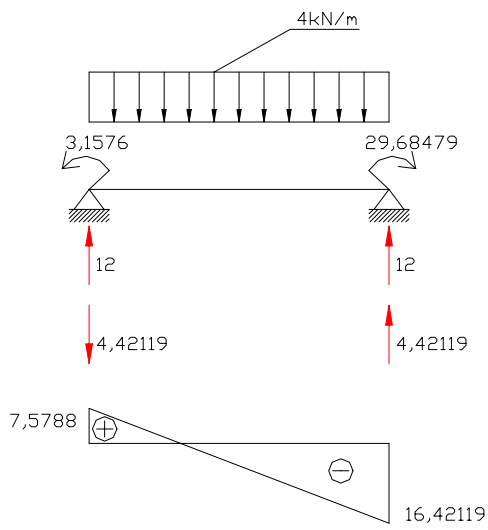
Korzystając ze wzoru superpozycyjnego rysuję końcowy wykres momentów:

$$M_P^n = M_P^0 + M_1 \cdot \varphi_1 + M_2 \cdot \varphi_2 + M_3 \cdot \Delta_3$$

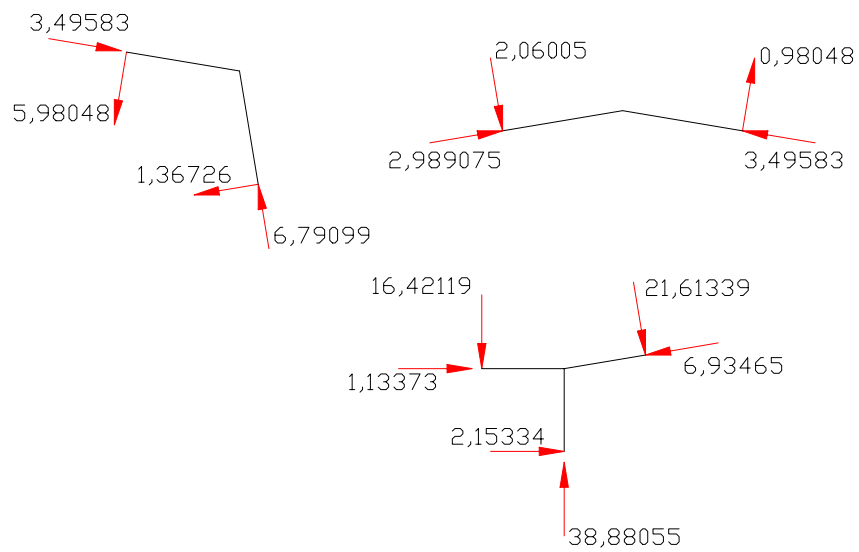
**$M_P^n$  [kNm]**



Obliczenie wartości sił tnących:

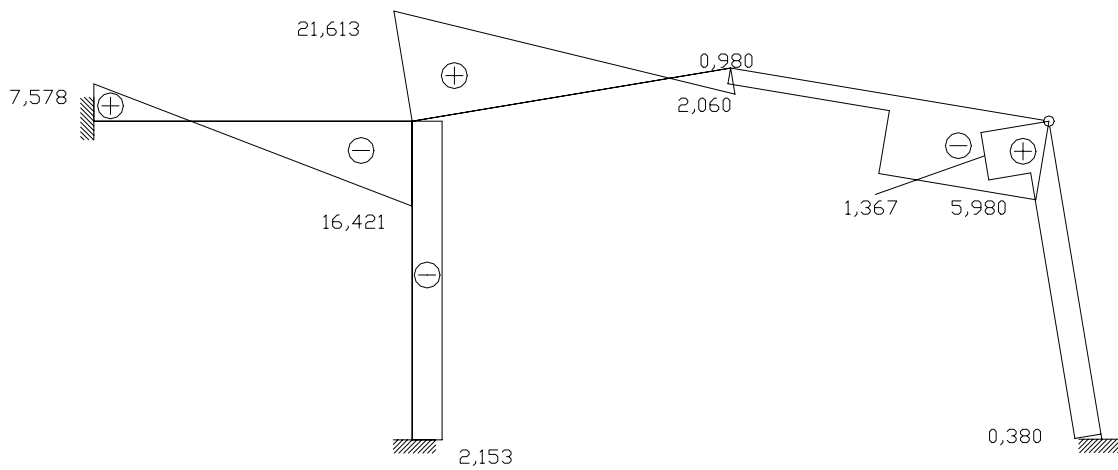


Obliczenie siły normalnej z równowagi węzłów:



Sprawdzenie węzła 2 po osi  $\sum y = 0,0012$

**T [kN]**



**N [kN]**

