

Olga Kopacz, Adam Łodygowski, Wojciech Pawłowski,  
Michał Płotkowiak, Krzysztof Tymber  
Konsultacje naukowe: prof. dr hab. JERZY RAKOWSKI  
Poznań 2002/2003

## MECHANIKA BUDOWLI 2

### PRACA SIŁ WEWNĘTRZNYCH W PRĘTACH

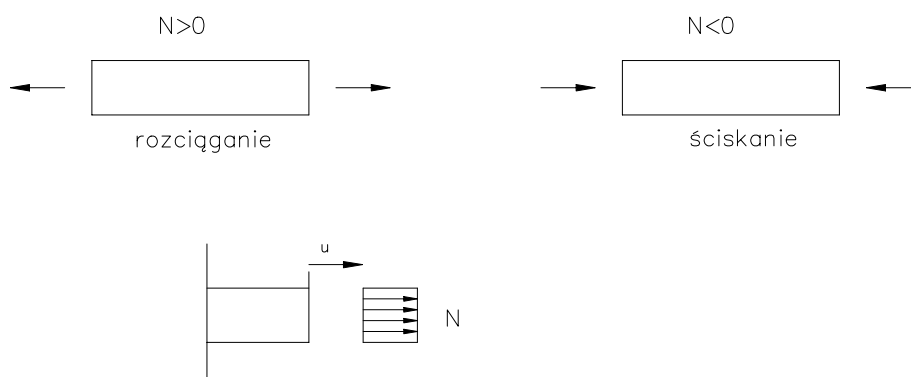
#### Praca sił normalnych

Siła normalna przypomnienie (N):

Jest to siła działająca wzdłuż osi pręta, decydując o rozciąganiu bądź ścisnaniu elementu.

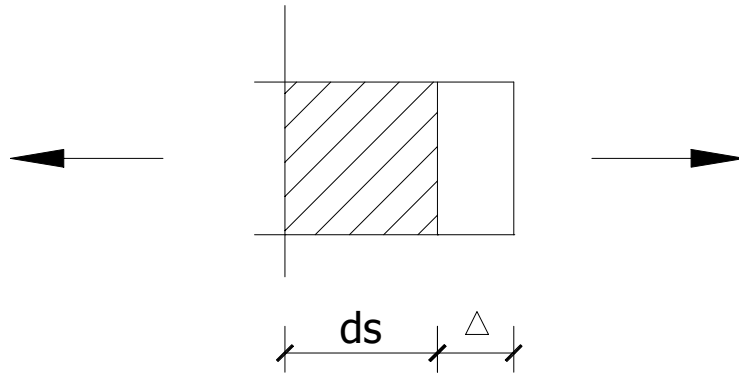
Innymi słowy, to suma naprężeń normalnych na powierzchni całego przekroju:

$$N = \int_A \sigma dA \quad (2.1)$$



**Rys. 1.** Umowne znakowanie siły normalnej

Korzystając ze wzoru (2.1) i prawa Hooke'a można napisać zależności dla wycinka pręta o długości  $ds$ :



**Rys. 2.** Przyrost długości pręta

$$N = \int_A \sigma_N dA = \sigma_N \cdot A$$

$$\varepsilon_N = \frac{\Delta u}{u} = \frac{\Delta}{ds} \leftrightarrow \varepsilon_N = \frac{\sigma_N}{E} = \frac{N}{E \cdot A}$$

$$dL_N = \frac{1}{2} \cdot N \cdot \Delta = \frac{1}{2} \cdot N \cdot \frac{N}{E \cdot A} ds$$

Gdzie  
E- moduł Younga  
A- pole powierzchni przekroju

Całkowita praca siły normalnej w pręcie o długości l:

$$L_N = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{E \cdot A} ds \quad (2.2)$$

Element pracy siły normalnej:

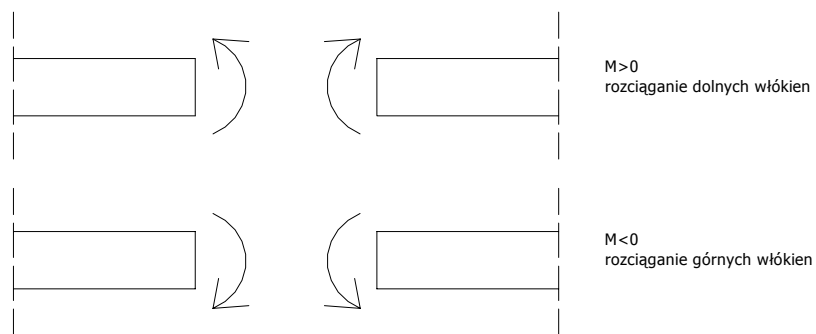
$$dL_N = \frac{1}{2} \frac{N^2}{E \cdot A} ds \quad (2.3)$$

### Praca momentów zginających

Moment zginający przypomnienie: Def

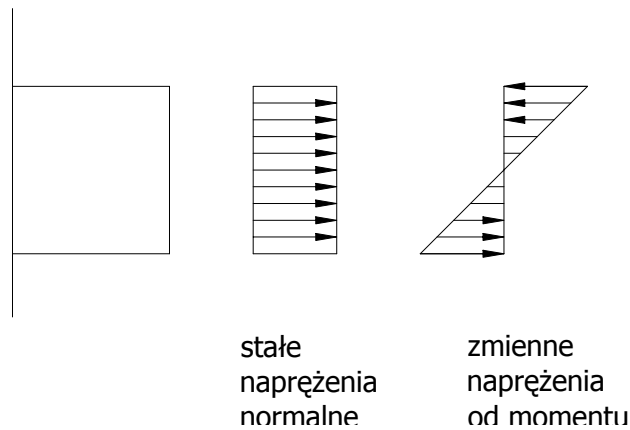
$$M = \int_A \sigma(z) \cdot z dA \quad (2.4)$$

Jest to para sił równo oddalonych od siebie, których wynikiem działania jest ściskanie części włókien i rozciąganie pozostałych.:



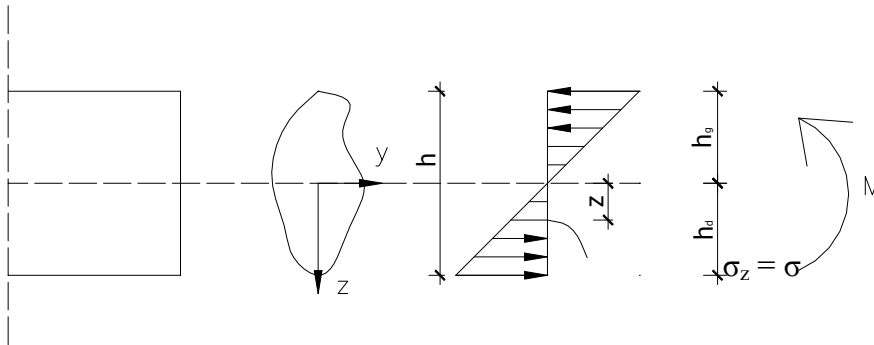
Rys. 3. Umowne znakowanie momentó zginających

W przekroju występują naprężenia stałe (od siły normalnej) i zmienne (od momentu zginającego)



Rys. 4. Naprężenia stałe i zmienne

Naprężenia występujące od momentu zginającego decydują o ścisnaniu części włókien i rozciąganiu pozostałej części:



Rys. 5. Naprężenia zmienne od momentu zginającego

Górna rzędna naprężenia od momentu  $\sigma_g$

Górna rzędna naprężenia od momentu  $\sigma_d$

Korzystając ze wzoru (2.4) i zależności geometrycznych (twierdzenie Talesa) otrzymujemy:

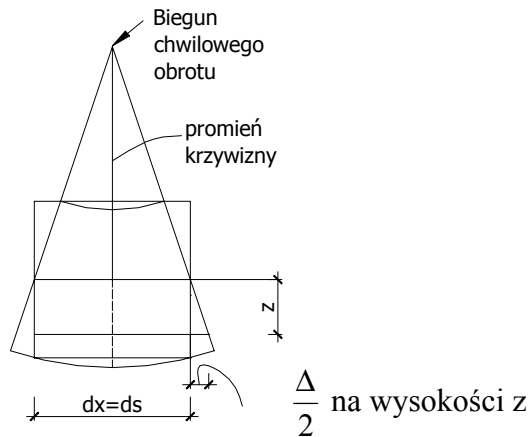
$$\frac{\sigma_z}{\sigma_d} = \frac{z}{h_d} \rightarrow \sigma = \frac{z}{h_d} \sigma_d \quad (2.5)$$

$$M = \int_A \sigma_z z dA = \int_A \frac{\sigma_d}{h_d} \cdot z^2 dA = \frac{\sigma_d}{h_d} I_y \quad (2.6)$$

Wobec tego:

$$\frac{\sigma_d}{h_d} = \frac{\sigma}{z} \quad (2.7)$$

$$\sigma = \frac{M}{I_y} \cdot z$$



Rys. 6. Nieskończenie mały element, poddany momentowi zginającemu

$\rho$ - promień krzywizny,  $\frac{d\varphi}{2}$  - połowa kąta zawartego między promieniami krzywizny,

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi} \rightarrow d\varphi = \frac{ds}{\rho} \quad (2.8)$$

Przyrost długości  $ds$  jest symetryczny względem promienia krzywizny, dlatego przyrost po jednej stronie wynosi:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{2z} &= \frac{d\varphi}{2} \\ \Delta &= zd\varphi \\ d\varphi &= \frac{\Delta}{z} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Przyrost  $ds$  jest odkształceniem liniowym, dlatego korzystając z prawa Hooke'a można zapisać relacje między przyrostem włókna a naprężeniami.

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{ds} &= \varepsilon_z \\ \varepsilon_{(z)} &= \frac{\sigma_z}{E} = \frac{\Delta}{ds} \\ \Delta &= \frac{\sigma_z}{E} ds\end{aligned}\quad (2.10)$$

Podstawiając wzór na naprężenie (2.7) i na kąt obrotu (2.9) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{M \cdot z}{E \cdot I_y} ds \\ d\varphi &= \frac{\Delta}{z} \\ d\varphi &= \frac{M}{E \cdot I_y} ds\end{aligned}\quad (2.11)$$

Wykorzystując wzór (2.11) i prawo Hooke'a otrzymujemy relację między krzywizną ( $\chi$ ) a momentem:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho} = \chi = \frac{M}{E \cdot I_y} \quad (2.12)$$

$\chi$ - to odwrotność promienia krzywizny.

Element pracy momentu zginającego, który działa na obrocie wynosi:

$$dL_M = \frac{1}{2} \cdot M d\varphi = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \frac{M}{E \cdot I_y} ds = \frac{1}{2} \frac{M^2}{E \cdot I_y} ds \quad (2.13)$$

Całkowita praca momentu w pręcie o długości  $l$ :

$$L_M = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{E \cdot I_y} ds \quad (2.14)$$

### Praca sił poprzecznych

Siła poprzeczna przypomnienie

Siła poprzeczna jest sumą wszystkich naprężeń stycznych w przekroju

Indeks pierwszy określa płaszczyznę na jakiej działa siła

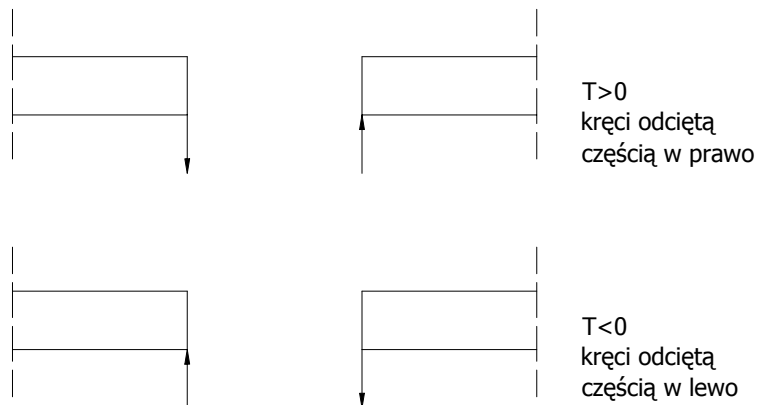
Indeks drugi określa kierunek dodatniej osi naprężeń stycznych

$$T_{xz} = \int_A \tau_{xz} dA$$

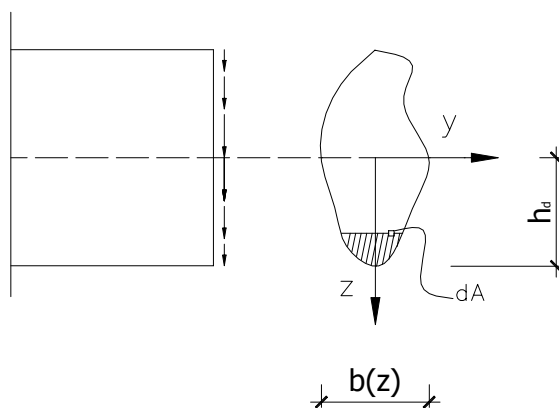
$$\tau_{xz} = \frac{T_{xz} \cdot S_y(z)}{I_y \cdot b(z)} \quad (2.15)$$

W powyższym siła działa na płaszczyźnie x o kierunku z.

System znakowania siły poprzecznej

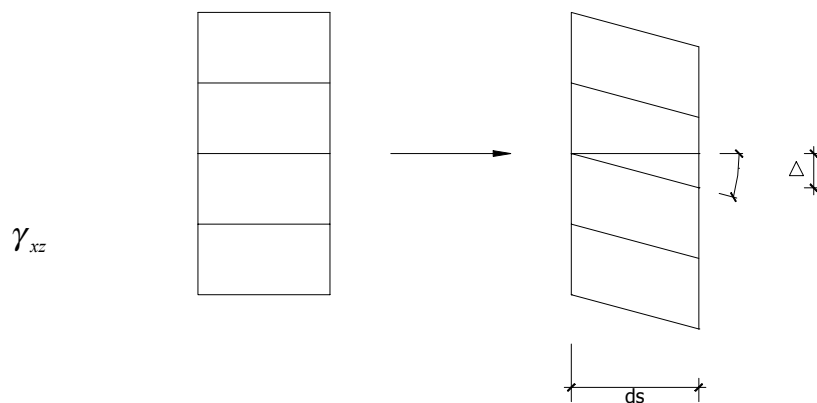


Rys. 7. System znakowania siły poprzecznej



Rys. 8. Rysunek poglądowy działania siły poprzecznej

Wynikiem działania sił stycznych jest deformacja przedstawiona na rysunku (w zdecydowanej przesadzie)



Rys. 9. Rezultaty działania siły poprzecznej na elemencie: a)  $\gamma$ - kąt odkształcenia postaciowego, b)  $\Delta$ - wynik działania sił stycznych

$$\Delta t = \gamma_{xz} ds$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (2.16)$$

We wzorze (2.16)  $G$  jest modułem odkształcenia postaciowego Kirchhoffa.

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (2.17)$$

E- moduł Younga,  $\nu$ - współczynnik Poissona  
Równanie pracy jest przedstawione wyłącznie dla poletka  $dA$ , w którym występują elementy siły poprzecznej. Jeżeli chciałoby się otrzymać całkowitą pracę, należałoby zsumować wszystkie poletka  $dA$ - czyli scałkować.

$$\begin{aligned} dT &= \tau dA \\ dL_T &= \frac{1}{2} dT \Delta_T \end{aligned} \quad (2.18)$$

Przyrost pracy elementu siły poprzecznej przypadającej na poletko  $dA$  leżące na włóknie  $b(z)$  dla elementarnego wycinka pręta o długości  $ds$ .

$$\begin{aligned} d^3 L_T &= \frac{1}{2} \tau_{xz} dA \cdot \gamma_{xz} ds \\ d^3 L_T &= \frac{1}{2} \frac{T_{xz} \cdot S_y(z)}{I_y \cdot b(z)} \cdot \frac{1}{G} \cdot \frac{T_{xz} \cdot S_y(z)}{I_y \cdot b(z)} dA ds \\ d^3 L_T &= \frac{1}{2} \frac{T^2}{GA} \cdot \frac{A}{I_y} \cdot \frac{S^2(z)}{b^2(z)} dA ds \end{aligned} \quad (2.19)$$

Przyrost pracy całej siły poprzecznej w przekroju dla wycinka  $ds$ :

$$dL_T = \frac{1}{2} \left[ \frac{T^2}{GA} \cdot \left( \frac{A}{I_y} \cdot \int_A \frac{S^2(z)}{b^2(z)} dA \right) \right] \quad (2.20)$$

Wprowadzamy upraszczający zapis na ścinanie:

$$\kappa = \frac{A}{I_y} \cdot \int \frac{S^2(z)}{b^2(z)} dA \quad (2.21)$$

$$dL_T = \frac{1}{2} \cdot T \cdot \frac{T\kappa}{GA} ds = \frac{1}{2} \cdot T \cdot \gamma_{\text{śr}} ds \quad (2.22)$$

Wzór (2.23) w nawiązaniu do poprzednich (praca N i praca M) można przez analogię zinterpretować jako pracę siły poprzecznej na uśrednionym przemieszczeniu wwołanym odkształceniem postaciowym ( $\gamma_{sr} ds$ )

$$\gamma_{sr} = \frac{1}{G} \tau_{sr} = \frac{1}{G} \cdot \frac{\kappa T}{A} \quad (2.23)$$

Całkowita praca na długości pręta z uwzględnieniem współczynnika ścinania wynosi:

$$L_T = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{T^2}{GA} \cdot \kappa ds \quad (2.24)$$

### Podsumowanie

Rodzaje występujących sił w przekroju

F- uogólniona siła,

$\Delta$ - uogólnione przemieszczenie

$$F(s) = \begin{cases} N(s) \\ M(s) \\ T(s) \end{cases} \rightarrow \delta(ds) = \Delta = \begin{cases} \varepsilon \cdot ds \\ \chi(s) \cdot ds \\ \gamma_{sr}(s) \cdot ds \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\Delta_N \\ d\varphi \\ d\Delta_T \end{cases} \quad (2.25)$$

Wszystkie współczynniki charakteryzują się bardzo podobną strukturą- siła/ sztywność (na rozciąganie, zginanie, ścinanie)

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{N}{EA} \\ \chi &= \frac{M}{EI} \\ \gamma_{sr} &= \frac{T\kappa}{GA} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Wzór na całkowitą pracę sił wewnętrznych jest sumą prac tych wszystkich sił w przecie:

$$L = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} \cdot ds + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EA} \cdot ds + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{T^2 \kappa}{GA} \cdot ds \quad (2.27)$$

