

Olga Kopacz, Adam Łodygowski, Wojciech Pawłowski,
Michał Płotkowiak, Krzysztof Tymber
Konsultacje naukowe: prof. dr hab. JERZY RAKOWSKI
Poznań 2002/2003

MECHANIKA BUDOWLI 4

RÓWNANIE PRACY WIRTUALNEJ

Rozdział ten poświęcony jest wyprowadzeniu twierdzenia o pracy wirtualnej, przygotowanej. W dalszej jego części omówimy praktyczne zastosowanie tego twierdzenia.

Słowa kluczowe: praca wirtualna, przemieszczenie wirtualne

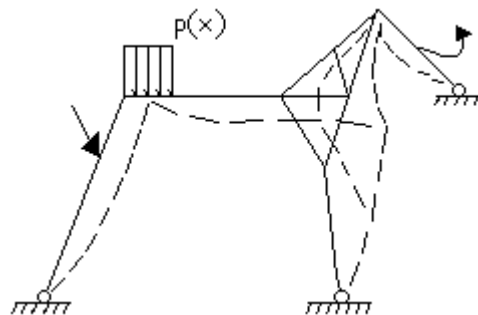
1. TWIERDZENIE 1

1.1. Twierdzenie

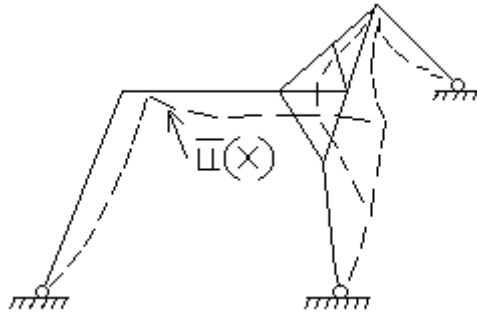
Jeżeli na układ działa obciążenie rzeczywiste spełniające (warunki równowagi), to obciążenie zewnętrzne wykonuje na przemieszczeniu wirtualnym pracę równą pracy uogólnionych sił przekrojowych na wirtualnych odkształceniach (na wirtualnych przemieszczeniach wewnętrznych).

1.2. Interpretacja

Przyjmujemy dowolny układ pozostający w równowadze



Rys.1.2.1. Rzeczywisty model układu prętowego, obciążony rzeczywistymi siłami $p(x)$ pod wpływem, których doznaje przemieszczeń



Rys.1.2.2. Ten sam układ ale z wymuszonym przemieszczeniem wirtualnym $\bar{u}(x)$ (kinematycznie dopuszczalnym)

$$\bar{L}_w = \bar{L}_z$$

\bar{L}_z - praca wszystkich rzeczywistych sił czynnych obciążających układ oraz biernych pracujących na przemieszczeniach wirtualnych (wymuszonych kinematycznie)

\bar{L}_w - praca wszystkich sił wewnętrznych rzeczywistych na odkształceniach wirtualnych (na wirtualnych przemieszczeniach wewnętrznych)

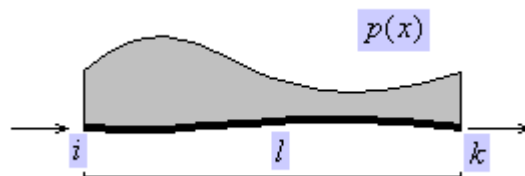
$$\begin{aligned} & \sum_n \int_s p(x) \bar{u}(x) dx + \sum_k R_k \bar{\Delta}_k = \\ & = \sum_n \left\{ \int_s N(x) \bar{\varepsilon}(x) dx + \int_s M(x) \bar{\chi}(x) dx + \int_s \kappa T(x) \bar{\gamma}(x) dx \right\} \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

przy czym:

$$\bar{\varepsilon}(x) = \frac{\bar{N}}{EA}, \quad \bar{\chi}(x) = \frac{\bar{M}}{EJ}, \quad \bar{\gamma}(x) = \frac{\bar{T}}{GA} \quad (1.2.2)$$

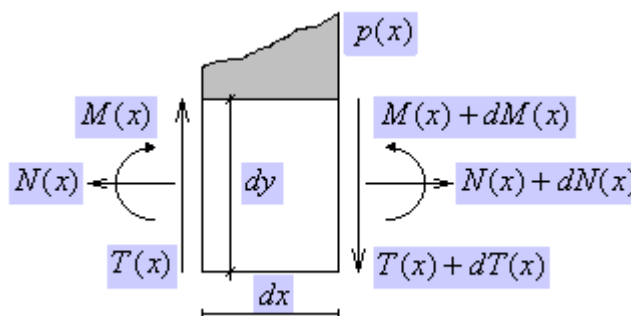
1.3. Wyprowadzenie

Przyjmujemy dowolny pręt (Rys.1.3.1.) o długości skończonej l i końcach i, k oraz dowolnie obciążony siłami zewnętrznymi $p(x)$:



Rys.1.3.1.

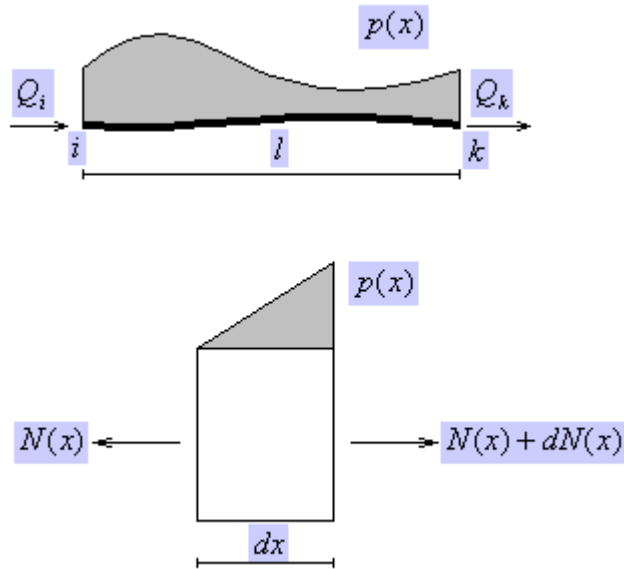
Wyobraźmy sobie następnie bardzo mały fragment tego pręta o długości dx (Rys.1.3.2.). Działają na niego siły uogólnione wewnętrzne przyjmujące dowolną kombinację normalnych, tnących i momentów.



Rys.1.3.2.

Upraszczając obliczenia sprowadzamy tę sytuację do następujących przypadków:

1) Zakładamy, że dowolne obciążenie pręta siłą $p(x)$ powoduje powstanie tylko sił biernych poziomych Q_i i Q_k , wobec czego na nasz element dx będzie działała tylko uogólniona siła normalna (podłużna, osiowa) $N(x)$ (Rys.1.3.3.):



Rys.1.3.3.

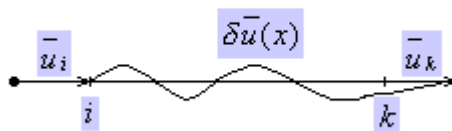
Zapisując równanie równowagi dla tego elementu (tzn. w każdym punkcie tego pręta) otrzymujemy zapis:

$$\sum X = 0 \Rightarrow N(x) + dN(x) - N(x) + p(x)dx = 0$$

$$dN(x) + p(x)dx = 0 / : dx$$

$$\frac{dN(x)}{dx} + p(x) = 0 \quad (1.3.1)$$

Następnie wprowadzamy do tego pręta pewne wirtualne przemieszczenie (Rys.1.3.4.), zgodne z działaniem uogólnionych sił normalnych. Pamiętajmy, że musi ono spełnić warunek kinematycznej dopuszczalności, musi być niezależne od wszelkich obciążeń zewnętrznych oraz od czasu, małe w porównaniu z wymiarami pręta i ciągle. Przyjmijmy jego wartość równą: $\delta \bar{u}(x)$



Rys.1.3.4.

Pomnóżmy równanie (1.3.1) obustronnie przez $\delta \bar{u}(x)$ i scałkujmy w granicach od $x = 0$ do $x = L$

$$\begin{aligned} \left[\frac{dN(x)}{dx} + p(x) \right] \delta \bar{u}(x) &= 0 \\ \int_0^l \delta \bar{u}(x) \left[\frac{dN(x)}{dx} + p(x) \right] dx &= 0 \\ \int_0^l \delta \bar{u}(x) \frac{dN(x)}{dx} dx + \int_0^l \delta \bar{u}(x) p(x) dx &= 0 \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

aby obliczyć całkę: $\int_0^l \delta \bar{u}(x) \frac{dN(x)}{dx} dx$ skorzystamy z całkowania przez części,

$$\left| \begin{array}{l} \int z dv = zv - \int v dz \\ z = \delta \bar{u}(x) \quad \quad \quad dv = \frac{dN(x)}{dx} dx \\ dz = \frac{d(\delta \bar{u}(x))}{dx} \quad \quad \quad v = \int \frac{dN(x)}{dx} dx = N(x) \\ \int_0^l \delta \bar{u}(x) \frac{dN(x)}{dx} = \delta \bar{u}(x) N(x) \Big|_0^l - \int_0^l N(x) \frac{d(\delta \bar{u}(x))}{dx} dx \end{array} \right|$$

Równanie (1.3.2) uzyska więc postać:

$$\begin{aligned} \delta \bar{u}(x) N(x) \Big|_0^l - \int_0^l N(x) \frac{d(\delta \bar{u}(x))}{dx} dx + \int_0^l p(x) \delta \bar{u}(x) dx &= 0 \\ N_L \delta \bar{u}_L - N_0 \delta \bar{u}_0 - \int_0^l N(x) \frac{d(\delta \bar{u}(x))}{dx} dx + \int_0^l p(x) \delta \bar{u}(x) dx &= 0 \\ Q_k \bar{u}_k - (-Q_i \bar{u}_i) + \int_0^l p(x) \delta \bar{u}(x) dx &= \int_0^l N(x) \frac{d(\delta \bar{u}(x))}{dx} dx \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Znaki wynikają z tego, że znak dodatni siły N_0 jest przeciwny do założonego dodatniego Q_i a znak dodatni siły N_L jest zgodny z założonym dodatnim Q_k (Na rys 1.3.5. przyjęto zasadę zgodności dodatnich zwrotów sił Q_i i Q_k oraz przemieszczeń im odpowiadających)



Rys.1.3.5. Znakowanie

$$Q_k \bar{u}_k + Q_i \bar{u}_i + \int_0^l p(x) \delta \bar{u}(x) dx = \int_0^l N(x) \bar{\epsilon}(x) dx \quad (1.3.4)$$

$Q_k \bar{u}_k + Q_i \bar{u}_i$ - całkowita praca sił zewnętrznych (biernych) na przemieszczeniach wirtualnych

$\int_0^l p(x) \delta \bar{u}(x) dx$ - całkowita praca sił zewnętrznych (czynnych) na przemieszczeniach wirtualnych

$\int_0^l N(x) \frac{d(\delta \bar{u}(x))}{dx} dx = \int_0^l N(x) \bar{\epsilon}(x) dx$ - całkowita praca sił wewnętrznych (normalnych) na odkształceniach wirtualnych (na wirtualnych przemieszczeniach wewnętrznych)

Wobec oznaczeń:

$$\bar{L}_z = Q_k \bar{u}_k + Q_i \bar{u}_i + \int_0^l p(x) \delta \bar{u}(x) dx$$

$$\bar{L}_w = \int_0^l N(x) \bar{\varepsilon}(x) dx$$

mamy:

$$\bar{L}_z = \bar{L}_w \quad (1.3.5)$$

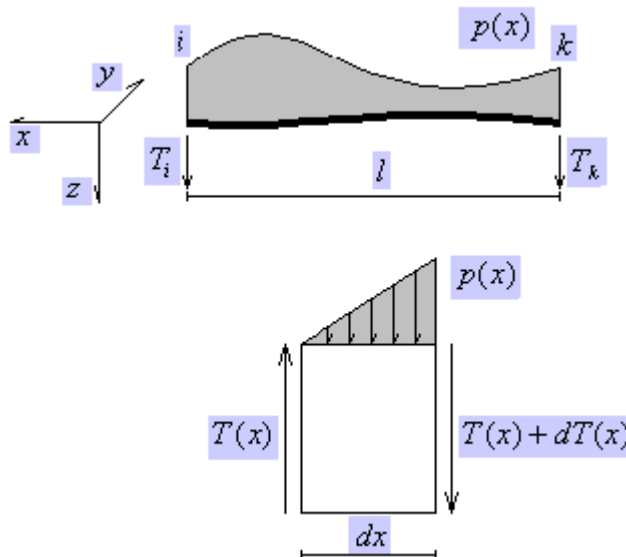
Wniosek:

$$\sum_j Q_j \bar{u}_j + \sum_i P_i \bar{u}_i + \sum_n q_n(x) \bar{u}_n(x) dx = \int_0^l N(x) \bar{\varepsilon}(x) dx \quad (1.3.6)$$

Warto zaznaczyć, że we wzorze tym nadal obowiązują zależności fizyczne odpowiadające stanowi wirtualnemu:

$$\bar{\varepsilon}(x) = \frac{\bar{N}(x)}{EA}$$

2) Zakładamy, że dowolne obciążenie pręta siłą $p(x)$ powoduje powstanie sił biernych pionowych T_i i T_k , wobec czego na nasz element dx będzie działała uogólniona siła tnąca (poprzeczna) $T(x)$ (Rys.1.3.6.):

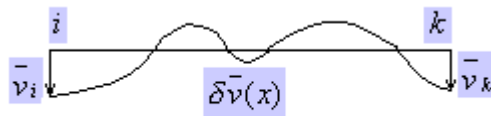


Rys.1.3.6.

Zapisując równanie równowagi dla tego elementu (tzn. w każdym punkcie tego pręta), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sum Z &= 0 \\ -T(x) + T(x) + dT(x) + p(x)dx &= 0 \\ dT(x) + p(x)dx &= 0 / dx \\ \frac{dT(x)}{dx} + p(x) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

Następnie wprowadzamy do tego pręta wirtualne przemieszczenie (spełniające te same warunki, co wcześniej) zgodne z działaniem uogólnionych sił poprzecznych (tnących), o niezerowej wartości równej: $\delta \bar{v}(x)$



Rys.1.3.7.

Pomnóżmy równanie (1.3.7) obustronnie przez $\delta \bar{v}(x)$ i scałkujmy w granicach od $x = 0$ do $x = L$

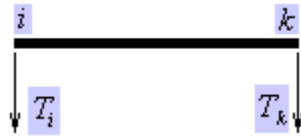
$$\left[\frac{dT(x)}{dx} + p(x) \right] \delta \bar{v}(x) = 0 \quad (1.3.8)$$

Stosując przekształcenia jak wcześniej z tym, że w całkowaniu przez części będzie:

$$\left| v = T(x) \right|$$

$$\begin{aligned} \delta \bar{v}(x)T(x) \Big|_0^l - \int_0^l T(x) \frac{d(\delta \bar{v}(x))}{dx} dx + \int_0^l p(x) \delta \bar{v}(x) dx &= 0 \\ T_L \delta \bar{v}_L(x) - T_0 \delta \bar{v}_0(x) - \int_0^l T(x) \frac{d(\delta \bar{v}(x))}{dx} dx + \int_0^l p(x) \delta \bar{v}(x) dx &= 0 \\ T_k \bar{v}_k - (-T_i \bar{v}_i) + \int_0^l p(x) \delta \bar{v}(x) dx = \int_0^l T(x) \frac{d(\delta \bar{v}(x))}{dx} dx & \quad (1.3.9) \end{aligned}$$

Znaki wynikają z tego, że znak dodatni siły T_0 jest przeciwny do założonego dodatniego T_i a znak dodatni siły T_L jest zgodny z założonym dodatnim T_k (Na rys 1.3.8. przyjęto zasadę zgodności dodatnich zwrotów sił T_i i T_k oraz przemieszczeń im odpowiadających)



Rys.1.3.8. Znakowanie

$$T_k \bar{v}_k + T_i \bar{v}_i + \int_0^l p(x) \delta \bar{v}(x) ds = \int_0^l T(x) \overline{\gamma_{sr}}(x) ds$$

Wobec oznaczeń:

$$\overline{L_z} = T_k \bar{v}_k + T_i \bar{v}_i + \int_0^l p(x) \delta \bar{v}(x) dx$$

$$\overline{L_w} = \int_0^l T(x) \overline{\gamma_{sr}}(x) dx$$

mamy:

$$\overline{L_z} = \overline{L_w} \quad (1.3.10)$$

Wniosek:

$$\sum_j T_j \bar{v}_j + \sum_i P_i \bar{v}_i + \sum_n q_n(x) \bar{v}_n(x) dx = \int_0^l T(x) \bar{\gamma}_{sr}(x) dx$$

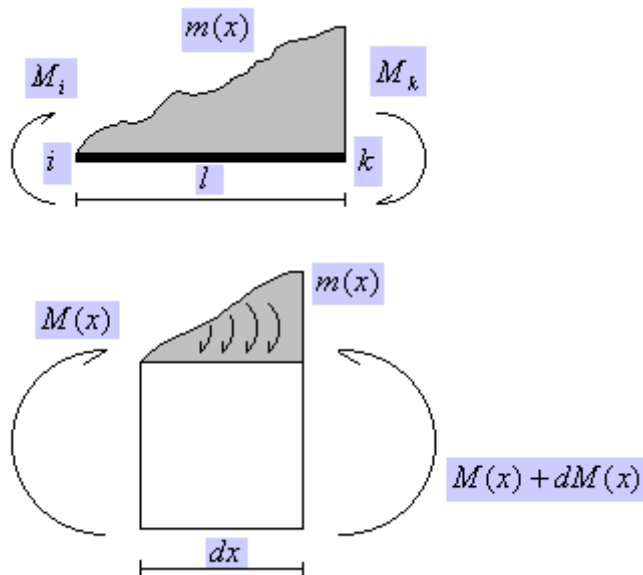
gdzie:

$$\bar{\gamma}_{sr} = \kappa \bar{\gamma} \quad (1.3.11)$$

Warto zaznaczyć, że we wzorze tym nadal obowiązują zależności fizyczne odpowiadające stanowi wirtualnemu:

$$\bar{\gamma}(x) = \frac{\bar{T}(x)}{EA}$$

3) Zakładamy czyste zginanie tzn. dowolne obciążenie pręta $m(x)$ powoduje powstanie tylko sił biernych w postaci momentów zginających M_i i M_k , stąd na nasz myślowo wycięty element będzie działał tylko uogólniony moment zginający $M(x)$ (Rys.1.3.9.):

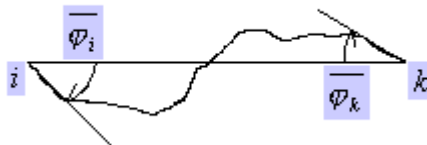


Rys.1.3.9.

Zapisując równanie równowagi otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sum M &= 0 \\ M(x) - M(x) - dM(x) + m(x)dx &= 0 \\ -dM(x) + m(x)dx &= 0 / (-dx) \\ \frac{dM(x)}{dx} - m(x) &= 0 \end{aligned} \tag{1.3.12}$$

Postępując analogicznie jak w poprzednich przypadkach, wprowadzamy wirtualne przemieszczenie zgodne z działaniem uogólnionych momentów zginających o wartości równej: $\delta\bar{\varphi}(x)$



Rys.1.3.10.

Pomnóżmy równanie (1.3.12) obustronnie przez $\delta\bar{\varphi}(x)$ i scałkujmy w granicach od $x = 0$ do $x = L$

$$\left[\frac{d\varphi}{dx} - m(x) \right] \delta\bar{\varphi}(x) = 0 \tag{1.3.13}$$

Stosując przekształcenia jak wcześniej z tym, że w całkowaniu przez części będzie:

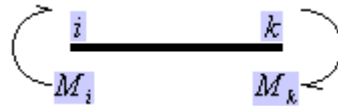
$$|v = M(x)|$$

$$\delta \bar{\varphi}(x) M(x) \Big|_0^l + \int_0^l M(x) \frac{d(\delta \bar{\varphi}(x))}{dx} dx - \int_0^l m(x) \delta \bar{\varphi}(x) dx = 0$$

$$M_L \delta \bar{\varphi}_L(x) - M_0 \delta \bar{\varphi}_0(x) + \int_0^l M(x) \frac{d(\delta \bar{\varphi}(x))}{dx} dx - \int_0^l m(x) \delta \bar{\varphi}(x) dx = 0$$

$$- M_k \bar{\varphi}_k - M_i \bar{\varphi}_i - \int_0^l m(x) \delta \bar{\varphi}(x) dx = - \int_0^l M(x) \frac{d(\delta \bar{\varphi}(x))}{dx} dx \quad /(-1)$$

Znaki wynikają z tego, że dodatni moment M_0 jest zgodny z założonym dodatnim momentem M_i a dodatni moment M_L jest przeciwny do założonego dodatniego M_k (Na rys 1.3.11. przyjęto zasadę zgodności dodatnich zwrotów M_i i M_k oraz przemieszczeń im odpowiadających)



Rys.1.3.11. Znakowanie

$$M_k \bar{\varphi}_k + M_i \bar{\varphi}_i + \int_0^l m(x) \delta \bar{\varphi}(x) dx = \int_0^l M(x) \frac{d(\delta \bar{\varphi}(x))}{dx} dx \quad (1.3.14)$$

$$M_k \bar{\varphi}_k + M_i \bar{\varphi}_i + \int_0^l m(x) \delta \bar{\varphi}(x) dx = \int_0^l M(x) \bar{\chi}(x) dx$$

Wobec oznaczeń:

$$\bar{L}_z = M_k \bar{\varphi}_k + M_i \bar{\varphi}_i + \int_0^l m(x) \delta \bar{\varphi}(x) dx$$

$$\bar{L}_w = \int_0^l M(x) \bar{\chi}(x) dx$$

mamy:

$$\bar{L}_z = \bar{L}_w$$

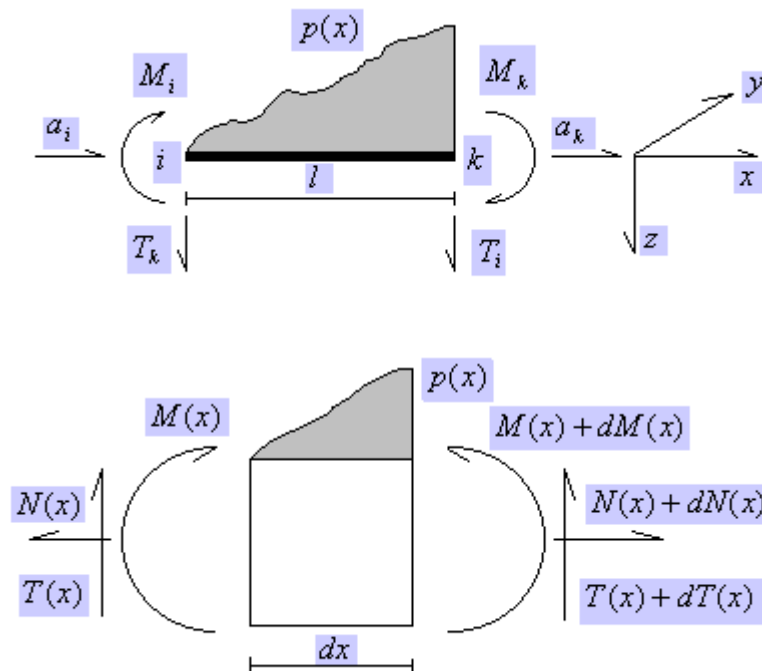
Wniosek:

$$\sum_j M_j \bar{\varphi}_j + \sum_i P_i \bar{\varphi}_i + \sum_n q_n(x) \bar{\varphi}_n(x) dx = \int_0^l M(x) \bar{\chi}(x) dx \quad (1.3.16)$$

Warto zaznaczyć, że we wzorze tym nadal obowiązują zależności fizyczne odpowiadające stanowi wirtualnemu:

$$\bar{\chi}(x) = \frac{\bar{M}(x)}{EA}$$

4) Zakładamy, że dowolne obciążenie pręta $p(x)$ powodują powstanie dowolnych sił biernych w postaci uogólnionych sił poziomych, pionowych i momentów zginających (Rys.1.2.9.):



Rys.1.3.12.

Zapisując równania równowagi dla tego elementu (tzn. w każdym punkcie tego pręta), otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\sum X &= 0 \Rightarrow \\ \sum Y &= 0 \Rightarrow \\ \sum M &= 0 \Rightarrow\end{aligned}\tag{1.3.17}$$

jak wcześniej z tym, że moment od sił tnących pomijamy, gdyż ramię tych sił jest bliskie zeru.

Podsumowując: korzystając z zasady superpozycji dokonujemy sumowania powyższych rozwiązań:

$$\begin{aligned}\sum_j R_j \Delta_j + \sum_i P_i \bar{u}_i + \sum_n q_n(x) \bar{u}(x) dx &= \\ = \sum_n \left[\int_s N(x) \bar{\epsilon} dx + \int_s \kappa T(x) \bar{\gamma} dx + \int_s M(x) \bar{\chi} dx \right]\end{aligned}\tag{1.3.18}$$

praca sił zewnętrznych na przemieszczeniach wirtualnych = praca sił wewnętrznych na odkształceniach wirtualnych

gdzie:

$\sum_j R_j \Delta_j$ - całkowita praca sił biernych (reakcji) na przemieszczeniach (osiadaniach) wirtualnych

$\sum_i P_i \bar{u}_i$ - całkowita praca sił skupionych na przemieszczeniach wirtualnych

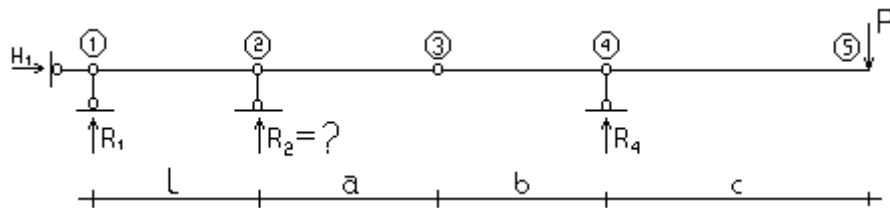
$\sum_n q_n(x) \bar{u}(x) dx$ - całkowita praca obciążeń ciągłych na przemieszczeniach wirtualnych

Warto zaznaczyć, że we wzorze tym nadal obowiązują zależności fizyczne odpowiadające stanowi wirtualnemu:

$$\bar{\epsilon}(x) = \frac{\bar{N}(x)}{EA}, \quad \bar{\gamma}(x) = \frac{\bar{T}(x)}{EA}, \quad \bar{\chi}(x) = \frac{\bar{M}(x)}{EA}$$

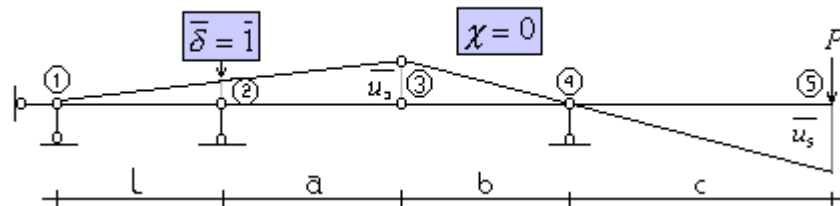
1.4. Przykład

Obliczyć pionową reakcję w punkcie R_2 belki przedstawionej na Rys.1.4.1.



Rys.1.4.1.

Narzucamy możliwe przemieszczenie wirtualne, o jednostkowej wartości w punkcie R_2 (Rys. 1.4.2.).



Rys.1.4.2.

Z proporcji otrzymujemy:

$$\frac{\bar{u}_5}{\bar{u}_3} = \frac{c}{b} \quad \vee \quad \frac{\bar{u}_3}{\bar{1}} = \frac{l+a}{l}$$

$$\bar{u}_3 = \left(\frac{l+a}{l} \right) \bar{1} \quad \bar{u}_5 = \frac{c}{b} \bar{u}_3 = \frac{c}{b} \left(1 + \frac{a}{l} \right) \bar{1} \quad (1.4.1)$$

Zapisujemy równania prac wirtualnych dla danej belki:

$$\bar{L}_Z = V_1 \cdot \bar{0} + H_1 \cdot \bar{0} + R_2 \cdot \bar{1} + V_4 \cdot \bar{0} + P \cdot \bar{u}_5$$

$$\bar{L}_W = 1 \cdot \bar{0} = 0 \quad (1.4.2)$$

Praca sił wewnętrznych jest równa zero gdyż:

- $M = 0$ – belka to bryła sztywna więc nie doznaje krzywizn (tzn. jej przemieszczenia opisuje funkcja liniowa, której pochodna wynosi zero)

- $T = 0$ – jeżeli $M = 0$ to $T = \frac{dM}{dx} = 0$
- $N = 0$ – nie uwzględniamy wpływu sił poziomych na przemieszczenia pionowe

Po porównaniu prac otrzymujemy:

$$R_2 = -P \frac{u_5}{1} \quad (1.4.3)$$

a po podstawieniu odpowiednich wartości otrzymujemy szukaną wielkość:

$$R_2 = -P \frac{c}{b} \left(1 + \frac{a}{l} \right) \quad (1.4.4)$$

Wniosek:

Ten sam wynik otrzymalibyśmy korzystając z „klasycznych” równań równowagi.

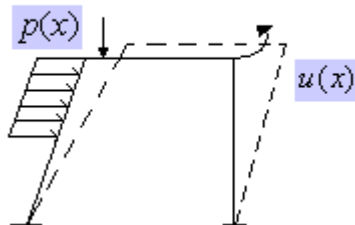
2. TWIERDZENIE 2

2.1. Twierdzenie 2

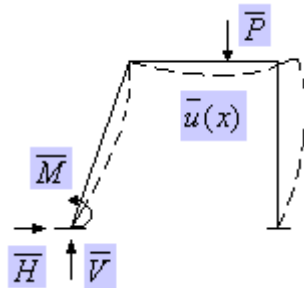
Jeżeli na układ działa dowolne zewnętrzne obciążenie wirtualne, spełniające warunki równowagi to wykonuje ono pracę na rzeczywistych przemieszczeniach (wywołanych przez rzeczywiste obciążenie zewnętrzne) równą pracy wirtualnych sił przekrojowych na rzeczywistych odkształceniach (na rzeczywistych przemieszczeniach wewnętrznych).

2.2. Interpretacja

Dotychczas korzystaliśmy z twierdzenia, że siły zewnętrzne wykonywały pracę na wirtualnych przemieszczeniach. Teraz zrobimy odwrotnie tzn. stwórzmy rzeczywisty model układu (Rys.2.2.1.), a następnie obciążmy go siłami wirtualnymi (pomyślanymi) (Rys.2.2.2.) i obliczmy rzeczywiste przemieszczenia naszego układu prętowego. Musimy przy tym zaznaczyć, że wirtualne obciążenie spełnia warunki statycznej dopuszczalności, jest niezależne od obciążeń zewnętrznych rzeczywistych i czasu, a zarazem jest obciążeniem stosunkowo małym oraz ciągłym (przynajmniej raz różniczkowalnym).



Rys. 2.2.1. Rzeczywisty model układu prętowego, obciążony rzeczywistymi siłami $p(x)$ pod wpływem, których doznaje przemieszczeń



Rys. 2.2.2. Ten sam układ, ale obciążony siłą wirtualną $\bar{P}(x)$ pod wpływem, której doznaje przemieszczeń wirtualnym $\bar{u}(x)$

$$\bar{L}_w = \bar{L}_z \quad (2.2.1)$$

\bar{L}_z - praca sił wirtualnych pracujących na rzeczywistych przemieszczeniach (tzn. wytworzonych przez rzeczywiste obciążenia zewnętrzne)

\bar{L}_w - praca wszystkich wirtualnych sił wewnętrznych pracujących na rzeczywistych odkształceniach

$$\begin{aligned} & \sum_n \int_s \bar{p}(x)u(x)dx + \sum_k \bar{R}_k \Delta_k = \\ & = \sum_n \left\{ \int_s \bar{N}(x)\varepsilon(x)dx + \int_s \bar{M}(x)\chi(x)dx + \int_s \kappa \bar{T}(x)\gamma(x)dx \right\} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Przy czym:

$$\varepsilon(x) = \frac{N(x)}{EA}, \quad \chi(x) = \frac{M(x)}{EJ}, \quad \gamma(x) = \frac{T(x)}{GA}$$

stąd:

$$\begin{aligned} & \sum_n \int_s \bar{p}(x)u(x)dx + \sum_k \bar{R}_k \Delta_k = \\ & = \sum_n \left\{ \int_s \frac{\bar{N}(x)N(x)}{EA} dx + \int_s \frac{\bar{M}(x)M(x)}{EJ} dx + \int_s \frac{\kappa \bar{T}(x)T(x)}{GA} dx \right\} \end{aligned}$$

gdzie:

(2.2.3)

$\sum_k \bar{R}_k \Delta_k$ - całkowita praca wirtualnych sił biernych (reakcji) na przemieszczeniach (osiadaniach) rzeczywistych

$\sum_n \int_s \bar{p}(x)u(x)dx$ - całkowita praca wirtualnych obciążeń na rzeczywistych przemieszczeniach

$N(x)$ - funkcja sił normalnych wywołana od obciążenia zewnętrznego (rzeczywistego)

$\bar{N}(x)$ - funkcja sił normalnych wywołana od obciążenia wirtualnego

$T(x)$ - funkcja sił poprzecznych wywołana od obciążenia zewnętrznego (rzeczywistego)

$\bar{T}(x)$ - funkcja sił poprzecznych wywołana od obciążenia wirtualnego

$M(x)$ - funkcja momentów wywołana od obciążenia zewnętrznego (rzeczywistego)

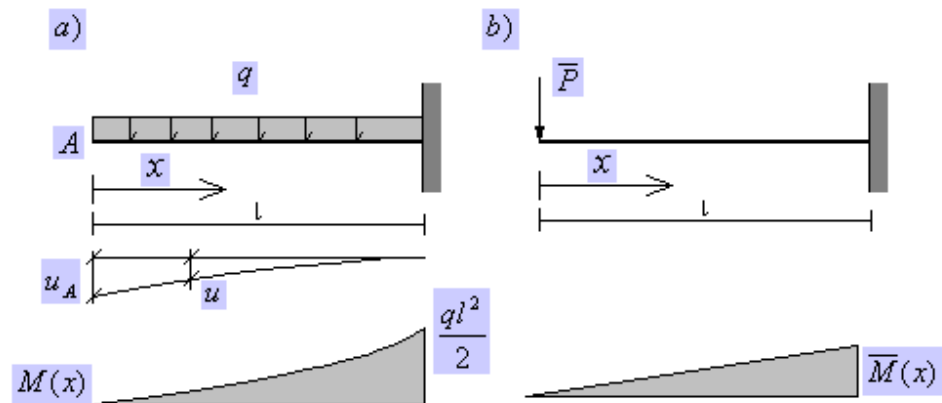
$\bar{M}(x)$ - funkcja momentów wywołana od obciążenia wirtualnego

2.3. Wyprowadzenie

Dowód tego twierdzenia można pominąć, dokonując formalnej zmiany interpretacji czynników iloczynów podcałkowych w równaniu I.

2.4. Przykład 1

Obliczyć przemieszczenie pionowe punktu A belki wspornikowej przedstawionej na (Rys.2.4.1.a) oraz kąt obrotu w połowie rozpiętości tej belki:



Rys.2.4.1. a) belka wspornikowa obciążona siłą rzeczywistą q i z odkształceniami u

b) ta sama belka obciążona wirtualną siłą \bar{P}

Najpierw dokonujemy obliczeń sił wewnętrznych w układzie rzeczywistym

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} \quad (2.4.1)$$

Następnie daną belkę obciążamy wirtualną siłą $\bar{P} = \bar{1}$ [-] (Rys.2.4.1.b) i ponownie obliczamy wartości sił wewnętrznych

$$M(x) = -x \cdot \bar{1} \quad (2.4.2)$$

Równania prac wirtualnych przyjmą więc postać:

$$\begin{aligned} \bar{L}_Z &= u_A \cdot \bar{1} + R \cdot 0 \\ \bar{L}_W &= \int_l \bar{1} \cdot x \frac{qx^2}{2} dx \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

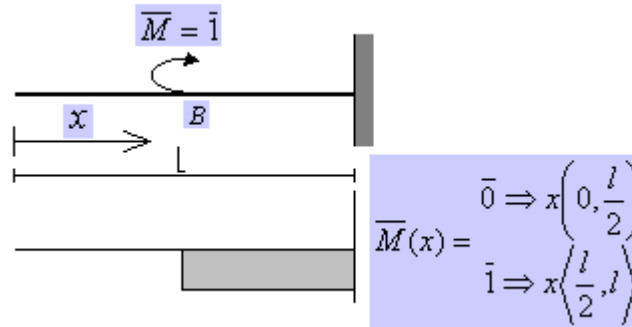
Korzystając z twierdzenia drugiego, zapisujemy:

$$u_A \bar{1} = \int_l \bar{1} \cdot x \frac{qx^2}{2} dx \quad (2.4.4)$$

Po scałkowaniu i przekształceniu otrzymujemy następujący wynik:

$$u_A = \frac{q}{2EJ} \cdot \frac{l^4}{4} = \frac{ql^4}{8EJ} \quad (2.4.5)$$

W celu obliczenia kąta obrotu tej belki zamiast jedynekowej siły $\bar{P} = 1$ [-] przykładamy jedynekowy moment $\bar{M} = \bar{1}$ [-] w połowie jej długości (Rys 2.4.2.) i ponownie obliczamy wartości sił wewnętrznych:



Rys.2.4.2. Belka wspornikowa obciążona jedynkowym momentem wirtualnym

Postępując jak w przypadku pierwszym korzystamy z twierdzenia drugiego:

$$\bar{1} \cdot \varphi_B = \frac{1}{EJ} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} -\frac{qx^2}{2} \cdot \bar{0} \, dx + \int_{\frac{l}{2}}^l -\frac{qx^2}{2} \cdot \bar{1} \, dx \right] \quad (2.4.6)$$

Po scałkowaniu i przekształceniu otrzymujemy następujący wynik:

$$\varphi_B = -\frac{q \left(l^3 - \frac{l^3}{8} \right)}{6EJ} = -\frac{7ql^3}{48EJ} \quad (2.4.7)$$

Minus w wyniku końcowym wskazuje nam na to, że belka ta obróci się w drugą stronę niż założyliśmy.

2.5. Przykład 2

Obliczyć przemieszczenie pionowe w punkcie A łuku o przekroju kołowym, przedstawionym na (Rys.2.5.1a).

Dane:

$$r = 5 \, m, \quad \kappa = \frac{10}{9} \quad \nu = \frac{1}{3}, \quad M_{eks} = 50 \, kN \cdot m \quad (\text{patrz Rys.2.5.1})$$

$$E = 205 \, GPa = 205 \cdot 10^6 \frac{kN}{m^2}, \quad \sigma_{dop} = 200 \, MPa = 200 \cdot 10^3 \frac{kN}{m^2} \quad (2.5.1)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 76875 \cdot 10^3 \frac{kN}{m^2}$$

$$\sigma_{dop} \geq \sigma, \quad \sigma = \frac{|M_{eks}|}{W} \Rightarrow W = \frac{|M_{eks}|}{\sigma_{dop}} = 250,0 \cdot 10^{-6} m^2$$

$$W = \frac{\pi R^3}{4} = 0,7854 R^3 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{W}{0,7854}} = 6,83 \cdot 10^{-2} m \quad (2.5.2)$$

Przyjeliśmy: $R = 0,069$ m stąd:

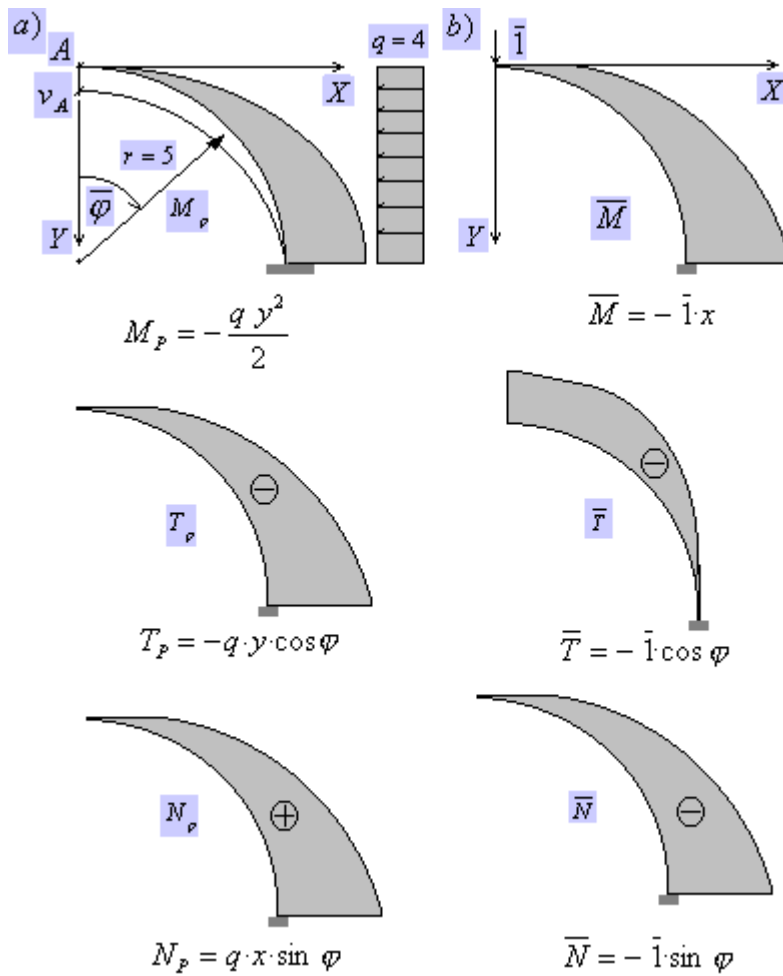
$$A = \pi R^2 \approx 150 \cdot 10^{-4} m^2, \quad I = \frac{\pi R^4}{4} \approx 0,7854 R^4 = 1780 \cdot 10^{-8} m^4 \quad (2.5.3)$$

Reasumując w zadaniu przyjęte zostały następujące wielkości:

$$A = 150 \cdot 10^{-4} m^2, \quad I = 1780 \cdot 10^{-8} m^4,$$

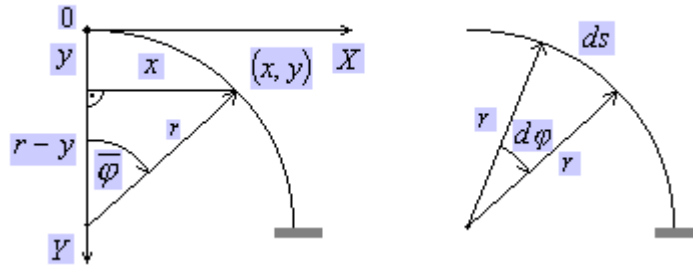
$$E = 205 \cdot 10^6 \frac{kN}{m^2}, \quad G = 76875 \cdot 10^3 \frac{kN}{m^2} \quad (2.5.4)$$

Ponownie stosując tę samą metodę, przykładamy jedynkową siłę wirtualną w punkcie A łuku (Rys.2.5.1b)



Rys.2.5.1.a) łuk obciążony siłą rzeczywistą q z przemieszczeniem punktu A równym v_A ,
b) łuk obciążony jedynkową siłą wirtualną

W celu ułatwienia sobie obliczeń przyjmujemy biegunowy układ współrzędnych (Rys.2.5.2.).



Rys.2.5.2. Przyjęcie układu biegunowego

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{x}{r} & x &= r \sin \varphi \\ \cos \varphi &= \frac{r-y}{r} & y &= r - r \cos \varphi = r(1 - \cos \varphi) \\ \frac{ds}{r} &= d\varphi & ds &= d\varphi r \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

Stąd:

$$\begin{aligned} M_p &= -\frac{q y^2}{2} = -\frac{q}{2} r^2 (1 - \cos \varphi)^2 & \bar{M} &= -\bar{1} \cdot x = -\bar{1} \cdot r \sin \varphi \\ T_p &= -q y \cos \varphi = -q \cos \varphi r(1 - \cos \varphi) & \bar{T} &= -\bar{1} \cdot \cos \varphi \\ N_p &= q x \sin \varphi = q r \sin^2 \varphi & \bar{N} &= -\bar{1} \cdot \sin \varphi \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Korzystając z drugiego twierdzenia o pracy wirtualnej uzyskamy:

$$\begin{aligned}
 \bar{1} v_A &= \frac{1}{EJ} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\bar{1} \cdot r \sin \varphi \left[-\frac{q r^2}{2} (1 - \cos \varphi)^2 \right] r d\varphi + \\
 &+ \frac{1}{EA} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\bar{1} \cdot \sin \varphi q r \sin^2 \varphi r d\varphi + \\
 &+ \frac{\kappa}{GA} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\bar{1} \cdot \cos \varphi [-q \cos \varphi r (1 - \cos \varphi)] r d\varphi \\
 v_A &= \frac{q r^4}{2EJ} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi - \frac{q r^2}{EA} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi + \\
 &+ \frac{\kappa q r^2}{GA} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi (1 - \cos \varphi) d\varphi \tag{2.5.7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi &= \left| \begin{array}{l} \cos \varphi = t \\ -\sin \varphi d\varphi = dt \\ \sin \varphi d\varphi = -dt \end{array} \right| = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-t)^2 dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-2t+t^2) dt = \\
 &= \left(-t + \frac{2t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\cos \varphi + \cos^2 \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \Lambda = \frac{1}{3} \\
 * \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \sin^2 \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi (1 - \cos^2 \varphi) d\varphi = \left| \begin{array}{l} \cos \varphi = t \\ -\sin \varphi d\varphi = dt \\ \sin \varphi d\varphi = -dt \end{array} \right| = \\
 &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-t^2) dt = \left(-t + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\cos \varphi + \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \text{K} = \frac{2}{3} \\
 * \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi (1 - \cos \varphi) d\varphi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi = \text{K} \\
 ** \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi &= \left| \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} = \cos^2 \varphi \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \left(\frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= \text{K} = \frac{\pi}{4} \\
 ** - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi (1 - \sin^2 \varphi) d\varphi = \left| \begin{array}{l} \sin \varphi = t \\ \cos \varphi d\varphi = dt \end{array} \right| = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-t^2) dt = \\
 &= \left(-t + \frac{1}{3} t^3 \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\sin \varphi + \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \text{K} = -\frac{2}{3} \\
 * \text{K} &= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1,42}{12} \tag{2.5.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_A &= \frac{qr^4}{2EJ} \cdot \frac{1}{3} - \frac{qr^2}{EA} \cdot \frac{2}{3} + \frac{\kappa qr^2}{GA} \cdot \frac{1,42}{12} = 0,11419 - 0,00002 + 0,00001 = \\
 &= 0,11418 \quad m = 11,42 \text{ cm} \tag{2.5.9}
 \end{aligned}$$

Wniosek:

W zginanym łuku decydujący wpływ na przemieszczenia mają momenty zaś wpływ pozostałych sił wewnętrznych możemy pominąć (łatwiej pręt zgiąć niż na przykład ścisnąć czy rozciągnąć)

2.6. Przykład 3

Dla układu kratowego przedstawionego na (Rys.2.6.1.) obliczyć:

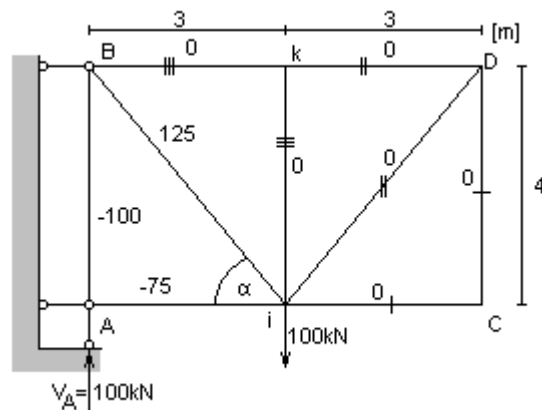
- pionowe przemieszczenie punktu i
- kąt obrotu pręta S_{ik} (obrót cięciwy ik)
- wzajemny obrót prętów S_{Bk} i S_{kD} (wzajemny obrót cięciw)
- skrócenie pręta S_{ik} (zbliżenie punktów k, i)

Wzór:

$$\bar{i} \delta_i = \sum_j \frac{\bar{N}_j \bar{N}_j}{E A_j} l_j \quad (2.6.1)$$

Dane:

$$E = 205 \text{ GPa} = 205 \cdot 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}, \quad \sigma_{dop} = 200 \text{ MPa} = 200 \cdot 10^3 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \quad (2.6.2)$$



Rys.2.6.1 Kratownica z obciążeniem rzeczywistym

$$\sigma_{dop} \geq \sigma, \quad \sigma = \frac{|N|}{A} \Rightarrow A_i = \frac{N_i}{\sigma_{dop}}$$

$$A_{Bi} = \frac{125}{200 \cdot 10^3} = 6,25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow r_i = \sqrt{\frac{A_i}{\pi}}$$

$$r_{Bi} = 1,41 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Przyjeliśmy: $r_{Bi} = 1,50 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ stąd: $A_{Bi} = 7,07 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$

$$A_{BA} = \frac{100}{200 \cdot 10^3} = 5,00 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$r_{Bi} = 1,26 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Przyjeliśmy: $r_{BA} = 1,30 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ stąd: $A_{BA} = 5,31 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$

$$A_{Ai} = \frac{75}{200 \cdot 10^3} = 3,75 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$r_{Ai} = 1,09 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

(2.6.3)

Przyjeliśmy: $r_{Ai} = 1,10 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ stąd: $A_{Ai} = 3,80 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$

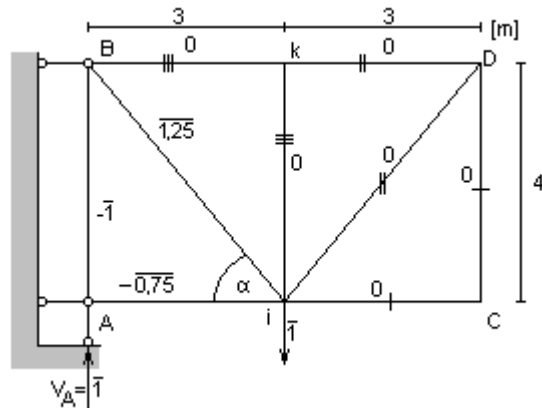
Reasumując w zadaniu przyjęte zostały następujące wielkości:

$$E = 205 \text{ GPa} = 205 \cdot 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}, \quad \sigma_{dop} = 200 \text{ MPa} = 200 \cdot 10^3 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$A_{Bi} = 7,07 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2, \quad A_{BA} = 5,31 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2, \quad A_{Ai} = 3,80 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \quad (2.6.4)$$

ad. a)

W celu obliczenia pionowego przemieszczenia punktu i, przykładamy w tym punkcie jedynkową, pionową siłę wirtualną (Rys.2.6.2)

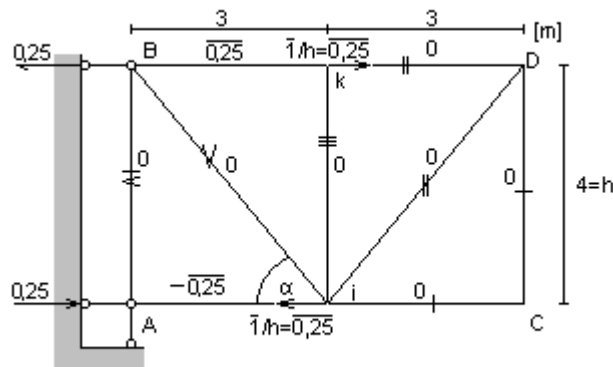


Rys.2.6.2 Kratownica z obciążeniem wirtualnym

$$\bar{1} \cdot v_A = \frac{0,75 \cdot 75 \cdot 3}{E \cdot 3,8 \cdot 10^{-4}} + \frac{1 \cdot 100 \cdot 4}{E \cdot 5,31 \cdot 10^{-4}} + \frac{1,25 \cdot 125 \cdot 5}{E \cdot 7,07 \cdot 10^{-4}} = 1,12 \cdot 10^{-2} m \quad (2.6.5)$$

ad. b)

W celu obliczenia kąta obrotu pręta S_{ik} (obrót cięciwy ik), przykładamy w końcach tego pręta parę sił wirtualnych, które razem tworzą moment jedynkowy (Rys.2.6.3)

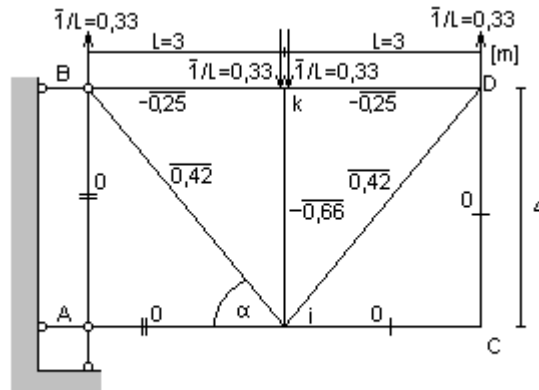


Rys.2.6.3 Kratownica z obciążeniem wirtualnym

$$\begin{aligned} \bar{1} \cdot v_{ik} &= \frac{0,25 \cdot 75 \cdot 3}{E \cdot 3,8 \cdot 10^{-4}} - \frac{0 \cdot 100 \cdot 4}{E \cdot 5,31 \cdot 10^{-4}} + \frac{0 \cdot 125 \cdot 5}{E \cdot 7,07 \cdot 10^{-4}} - \\ &- \frac{0,25 \cdot 0 \cdot 3}{E \cdot A_{Bk}} = 7,0 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

ad. c)

W celu obliczenia wzajemnego obrotu prętów S_{Bk} i S_{kD} (wzajemny obrót cięciw) przykładamy w końcach każdego z tych prętów parę sił wirtualnych, które razem tworzą moment jedynekowy (Rys.2.6.4)

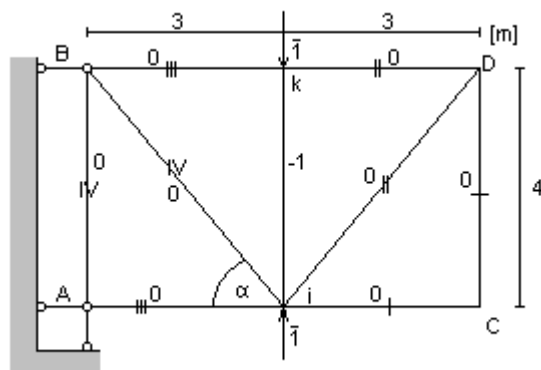


Rys.2.6.4 Kratownica z obciążeniem wirtualnym

$$\bar{1} \cdot \varphi_{BkD} = \frac{0,42 \cdot 125 \cdot 5}{E \cdot 7,07 \cdot 10^{-4}} = 18,0 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \quad (2.6.7)$$

ad. d)

W celu obliczenia skrócenia pręta S_{ik} (zbliżenie punktów k, i) przykładamy w końcach tego pręta, wzdłuż jego kierunku, parę sił wirtualnych, jedynkowy (Rys.2.6.5)



Rys.2.6.5 Kratownica z obciążeniem wirtualnym

$$\bar{1} v_{ki} = -\frac{1 \cdot 0 \cdot 4}{E \cdot A_{ki}} = 0 \text{ m} \quad (2.6.8)$$