

Olga Kopacz, Adam Łodygowski, Wojciech Pawłowski,
Michał Płotkowiak, Krzysztof Tymper
Konsultacje naukowe: prof. dr hab. JERZY RAKOWSKI
Poznań 2002/2003

MECHANIKA BUDOWLI 5

UWZGLĘDNIENIE WPLYWU TEMPERATURY, OSIADANIA PODPÓR I BŁĘDÓW MONTAŻOWYCH W RÓWNANIU PRACY WIRTUALNEJ.

1.1. Krótko o podporach sprężystych.

Pod nazwą podpór sprężystych rozumiemy takie, które przemieszczają się pod wpływem występujących w nich reakcji wprost proporcjonalnie do ich wartości. Oto dwa przykłady podpór sprężystych (rys.1.1):

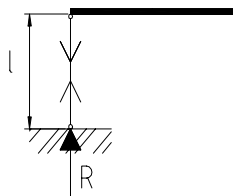


Rys.1.1a i b

W przypadku podpory pierwszej (rys.1.1a) pod wpływem reakcji R sprężyna ulegnie skróceniu-zaobserwujemy osiadanie podpory. Druga zaś podpora (rys.1.1b) to podpora podatna na obrót-tym razem zaobserwujemy obrót podpory wywołany występującym w niej momentem podporowym.

Sprężyna z rys.1.1a może być modelem pręta podporowego.

Przykład:



Rys.1.2

Założmy, że w naszej podporze (rys.1.2) pod wpływem działania siły normalnej N , pręt o długości początkowej l ulegnie skróceniu o Δl . Zgodnie z prawem Hooke'a możemy zapisać, że:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \quad (1.1)$$

z powyższego związku otrzymujemy proporcjonalną zależność między siłą działającą na pręt a jego skróceniem (bądź wydłużeniem):

$$\Delta l = N \cdot f \quad \text{gdzie:} \quad f = \frac{l}{E \cdot A} \left[\frac{m}{N} \right] \quad (1.2)$$

lub inaczej:

$$\Delta l = \frac{N}{K} \quad \text{gdzie:} \quad K = \frac{1}{f} \left[\frac{N}{m} \right] \quad (1.3)$$

przy czym:

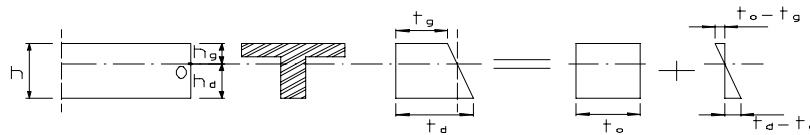
K -to tzw. sztywność podpory- jest to wartość siły jaką należy przyłożyć do podpory by zmienić jej długość o jednostkowe wydłużenie.

f -to tzw. podatność podpory- jest to wartość wyrażona w jednostkach długości, która stanowi wynik działania siły jednostkowej.

1.2. Wpływ temperatury.

Dowolny układ może doznać odkształcenia pod wpływem działania określonej temperatury. Jeżeli wszystkie włókna doznają tego samego ogrzania mówimy o tzw. ogrzaniu równomiernym jeżeli zaś temperaturą zróżnicowaną o tzw. ogrzaniu nierównomiernym.

Założmy, że mamy pręt o przekroju jak na rysunku (rys.1.3) poddany działaniu pola dodatniej temperatury, przy czym temperaturę w włóknach dolnych oznaczamy będziemy przez t_d , temperaturę przy włóknach górnych przez t_g .



Rys.1.3

Zgodnie z zasadą superpozycji zastąpiliśmy pole temperatury dwoma polami, z czego pierwszy określa nam t_0 -temperaturę w środku ciężkości przekroju. Wyznaczymy ją:

- dla przekrojów niesymetrycznych :
zgodnie z twierdzeniem Talesa mamy:

(1.4)

$$\frac{t_0 - t_g}{t_d - t_g} = \frac{h_g}{h_d} \Rightarrow (t_0 - t_g) h_d = h_g (t_d - t_0)$$

$$t_0 = \frac{t_g \cdot h_d + t_d \cdot h_g}{h_d + h_g} = \frac{t_g \cdot h_d + t_d \cdot h_g}{h}$$

czyli :

$$t_0 = \frac{t_g \cdot h_d + t_d \cdot h_g + t_g \cdot h_g - t_g \cdot h_g}{h} \Rightarrow$$

lub inaczej:

$$t_0 = t_g + \frac{h_g}{h} (t_d - t_g)$$

- dla przekrojów symetrycznych :

$$\frac{t_0 - t_g}{t_d - t_g} = \frac{1}{2} \Rightarrow t_0 - t_g = \frac{1}{2} (t_d - t_g)$$

$$t_0 = \frac{t_g + t_d}{2}$$

Zastanówmy się teraz jaki efekt da równomierne ogrzanie.

Przy $t_g = t_d$ włókna dolne jak i górne doznają jednakowego wydłużenia (bądź skrócenia), wracając zatem do równania pracy wirtualnej w którym jednym z członów jest całka :

$$\int_0^l \bar{N} \cdot \varepsilon_t \cdot ds$$

(przy czym przez ε_t rozumiemy odkształcenie wywołane temperaturą) i uwzględniając to, że:

$$\Delta(ds) = ds \cdot \alpha_t \cdot \Delta t = ds \cdot \alpha_t \cdot (t_0 - t_m) = ds \cdot \alpha_t \cdot t$$

gdzie:

ds -to długość początkowa odcinka pręta

α_t -współczynnik rozszerzalności termicznej

$\Delta t = t_0 - t_m$ -różnica temperatury obecnej i temperatury montażu (UWAGA!
w dalszej części rozważań oznaczana jest ona przez t)

a:

$$\varepsilon = \frac{\Delta(ds)}{ds} \quad (1.8)$$

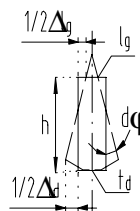
to po uwzględnieniu powyższych zależności (1.7 i 1.8) nasza całka (1.6) przyjmuje postać:

$$\int_0^l \overline{N} \cdot \alpha_t \cdot t \cdot ds \quad (1.9)$$

i wyraża wpływ równomiernego ogrzania.

Natomiast przy ogrzewaniu pręta temperaturą zróżnicowaną (u nas $t_d > t_g$), dojdzie do wydłużenia włókien dolnych przy jednoczesnym skróceniu górnych, czego wynikiem będzie powstanie krzywizny (rys.1.4).

W równaniu pracy wirtualnej mamy:

$$\int_0^l \overline{N} \cdot \alpha_t \cdot t \cdot ds \quad (1.10)$$


tym razem jednak, krzywizna nie jest wywołana działaniem momentu, lecz różnicą temperatur. Jeżeli zatem przez:

l_d -oznaczymy długość włókien dolnych

l_g - długość włókien górnych,

to zmianę ich długości możemy wyrazić związkami:

Rys.1.4

$$\Delta l_d = ds \cdot \alpha_t \cdot (t_d - t_0) \quad (1.11)$$

$$\Delta l_g = ds \cdot \alpha_t \cdot (t_g - t_0) \quad (1.12)$$

przyjmując jednocześnie że, $d\varphi$ to zmiana kąta i:

$$d\varphi = \frac{\Delta l_d - \Delta l_g}{h} \quad (1.13)$$

to po uwzględnieniu powyższych zależności (1.11, 1.12) otrzymujemy:

$$d\varphi_t = \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h} \cdot ds \quad (1.14)$$

gdzie:

$$\Delta t = t_d - t_g$$

a nasza całka (1.10) przyjmuje postać:

$$\int_0^l \overline{M} \cdot \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h} ds \quad (1.15)$$

i wyraża wpływ nierównomiernego ogrzania.

1.3. Równanie pracy wirtualnej.

Zapišemy teraz równanie pracy wirtualnej uwzględniając wszystkie wpływy (także te powyższe z punktu 1.1 i 1.2).

Jeżeli przez P rozumiemy siły skupione, P -rozkład sił, $v(x)$ -przemieszczenie pionowe to równanie pracy przyjmuje postać:

$$\int \overline{p}(x) \cdot v(x) + \sum_i \overline{P} \cdot \delta_i + \sum_K \overline{R}_K \cdot \Delta_K \quad (1.16)$$

$$\sum \left\{ \int_s \overline{M} \left(\frac{M_p}{EI} + \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h} \right) ds + \int_s \overline{N} \left(\frac{N_p}{EA} + \alpha_t \cdot t \right) ds + \int_s \overline{T} \cdot \frac{T_p \cdot \mathbf{x}}{GA} ds \right\}$$

$$+ \sum_j \overline{R}_j \cdot R_j \cdot f_j + \sum_{\substack{n \\ a}} \overline{B}_n \cdot b_n$$

gdzie:

\overline{R}_K -to reakcje wirtualne w podporach o wymuszeniach kinematycznych

\overline{R}_j -reakcje wirtualne w podporach sprężystych

R_j -reakcje w podporach sprężystych wywołane obciążeniem rzeczywistym

Δ_K -znane przemieszczenia (osiadanie podpór)

a -człon uwzględniający tzw. błędy montażowe. Jest to suma po n-punktach, w których owe błędy występują. Mogą być one spowodowane małą precyzją wykonania poszczególnych elementów konstrukcji, lub ich złym zamontowaniem. Przypuśćmy np. , że w dowolnej kratownicy

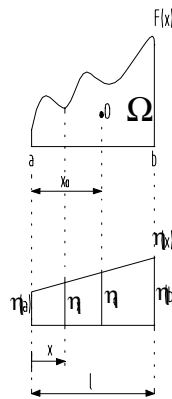
zamontowaliśmy zbyt krótki pręt. Jeżeli b_n to wartość wielkości

określającej błąd montażowy, to nasz iloczyn $\overline{B}_n \cdot b_n$ wyrażać będzie pracę, jaką wykona siła w tym pręcie na odcinku równym długości o jaką owy pręt jest za krótki. Wielkością określającą błąd montażowy może być także kąt:

$d\varphi$ w przypadku nie uzyskania w danym punkcie zadanego kąta (czyli takiego jaki chcieliśmy uzyskać). Wtedy nasz iloczyn wyrażać będzie pracę momentu na kącie równym różnicy kąta rzeczywistego i zadanego.

2.SPOSÓB WERESZCZEGINA-MOHRA OBLICZANIA CAŁEK

Zauważmy, że w równaniu (1.16) występują całki z iloczynu dwóch funkcji (np. $\overline{M} \cdot M^p$). W przypadku, gdy obie są ciągłe, a jedna z nich jest liniowa w określonym przedziale, to całkę z ich iloczynu można obliczyć w prosty sposób, korzystając z wykresów tych funkcji.



Rys.2.1

Słuszne jest twierdzenie:

Jeśli w pewnym przedziale określone są dwie różne funkcje ciągłe, z których co najmniej jedna jest liniowa, to całka z ich iloczynu równa jest iloczynowi pola wykresu funkcji krzywoliniowej przez rzędną wykresu liniowego występującą pod środkiem ciężkości wykresu krzywoliniowego.

Niech $F(x)$ jest funkcją krzywoliniową, zaś $\eta(x)$ liniową. Wówczas:

$$\int_a^b F(x) \cdot \eta(x) \cdot dx = \Omega \cdot \eta_0 \quad (2.1)$$

Dowód:

zgodnie z tw.(2.1) możemy zapisać:

$$\int_a^b F(x) \cdot \eta(x) \cdot dx = \Omega \cdot \eta_0 \quad (2.2)$$

ale:

$$\eta(x) = \eta_a + \frac{\eta_b - \eta_a}{l} \cdot x$$

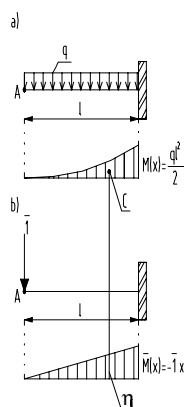
stąd po podstawieniu do wzoru (2.2) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x) \cdot \left[\eta_a + \frac{\eta_b - \eta_a}{l} \cdot x \right] \cdot dx &= \int_a^b F(x) \cdot \eta_0 \cdot dx + \\ + \int_a^b \frac{\eta_b - \eta_a}{l} \cdot x \cdot F(x) \cdot dx &= \eta_0 + \frac{\eta_b - \eta_a}{l} \cdot \int_a^b F(x) \cdot x \cdot dx = \\ \Omega \cdot \eta_a + \frac{\eta_b - \eta_a}{l} \cdot \underbrace{S_0}_{\Omega \cdot x_0} &= \Omega \eta_a + \Omega \cdot \frac{\eta_b - \eta_a}{l} \cdot x_0 = \\ \Omega \cdot \left[\eta_a + \frac{\eta_b - \eta_a}{l} \cdot x_0 \right] &= \underline{\underline{\Omega \cdot \eta_0}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

S_0 - to moment statyczny pola Ω względem punkty 0.

c.n.d

Wróćmy do przykładu z wcześniejszego wykładu, gdzie obliczaliśmy przemieszczenie pionowe punktu A belki jak na poniższym rysunku (rys.2.2a).



Otrzymaliśmy, że u_A (przemieszczenie) wynosi:

$$u_A = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I} \quad (2.4)$$

Można je wyznaczyć w znacznie prostszy sposób!

Wykreślmy wykresy momentów dla naszej belki przy obciążeniu równym q (rys.2.2a) oraz przy obciążeniu siłą wirtualną równą \bar{I} (rys.2.2b). Jeżeli η_C to rzędna funkcji liniowej odpowiadająca położeniu środka ciężkości C pola wykresu

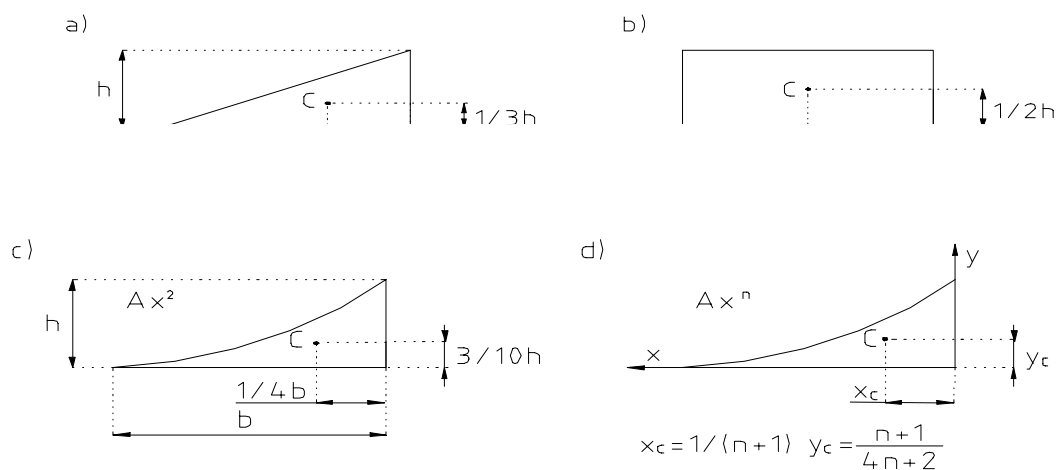
krzywoliniowego-, to szukane przemieszczenie wynosi:

$$u_A = \frac{\text{Rys.2.2}}{L \cdot I} \left(\frac{q \cdot l^2}{2} \right) \cdot \frac{3}{4} \cdot l = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I} \quad (2.5)$$

gdzie: $\Omega = \frac{1}{3} \cdot l \cdot \frac{q \cdot l^2}{2}$ a $\eta_C = \frac{3}{4} l$. Otrzymaliśmy więc, wynik identyczny z wynikiem gdy dokonywaliśmy całkowania(2.4).

2.1. Pola powierzchni figur.

- środki ciężkości figur(rys.2.3) :

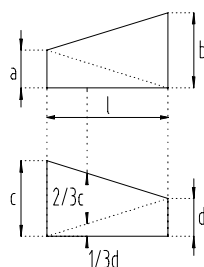


Rys.2.3

Środek ciężkości a)trójkąta, b)prostokąta, c)pola wykresu Ax^2
 d)pola wykresu krzywoliniowego Ax^n

- pola powierzchni
 -wykresy prostoliniowe

Figurę trapezową dzieli się zazwyczaj na odpowiedni prostokąt i trójkąt, względnie- dwa trójkąty(rys.2.4):

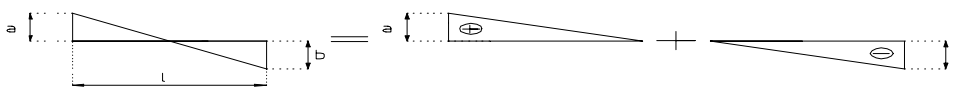


Rys.2.4

Zakładając, iż pierwszy wykres to M_p , drugi \overline{M} , to zgodnie z twierdzeniem(2.3) możemy zapisać, że:

$$\int \overline{M} \cdot M_p \cdot ds = \frac{1}{2} \cdot a \cdot l \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot c + \frac{1}{3} \cdot d \right) + \frac{1}{2} \cdot b \cdot l \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot c + \frac{2}{3} \cdot a \right) \quad (2.6)$$

Należy także pamiętać o uwzględnieniu znaku!(patrz przykład poniżej rys.2.5).



Rys.2.5

-wykresy krzywoliniowe

Przy wykresie symetrycznym jak na rysunku(rys.2.6) pole wykresu wynosi:

$$\text{Pole} = \frac{2}{3} \cdot l \cdot f \quad (2.7)$$

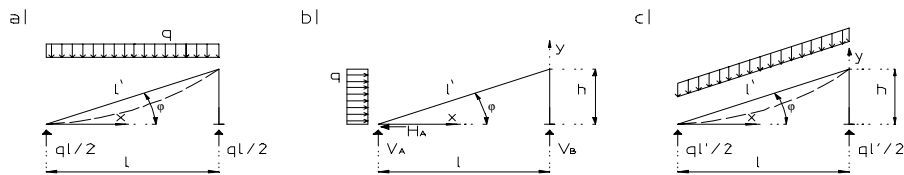
gdzie:

$$f = \frac{q \cdot l^2}{8} \quad (2.8)$$

Zastanówmy się, ile wynosi pole wykresów krzywoliniowych przy położeniach jak na rysunku poniżej(rys.2.6):

$$\sum M_{\alpha-\alpha} = \frac{q \cdot l}{2} \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{1}{2} \cdot x - M_{\alpha-\alpha} = 0 \quad (2.9)$$

$$M_{\alpha-\alpha} = \frac{-q \cdot l}{2} \cdot x^2 + \frac{q \cdot l}{2} \cdot x \quad \text{ale:} \quad \cos \varphi = \frac{l}{l'} = \frac{x}{x'} \Rightarrow x = x' \cdot \frac{l}{l'}$$



Rys.2.6

$$M_{\alpha-\alpha} = \frac{-q \cdot x^2}{2} + \frac{q \cdot l}{2} \cdot x \quad \text{po podstawieniu za } x = x' \cdot \frac{l}{l'} :$$

$$M_{\alpha-\alpha} = \frac{-q \cdot x'^2}{2} \cdot \frac{l^2}{l'^2} + \frac{q \cdot l}{2} \cdot x' \cdot \frac{l}{l'} \quad \text{dla } x' = \frac{1}{2} \cdot l'$$

$$M_{x'=\frac{1}{2}l'} = \frac{-q}{2} \cdot \frac{l^2}{l'^2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l'\right)^2 + \frac{q \cdot l^2}{2 \cdot l'} \cdot \frac{1}{2} \cdot l' = \frac{-q}{2} \cdot \frac{l^2}{l'^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot l'^2 + \frac{q \cdot l^2}{2 \cdot l'} \cdot \frac{1}{2} \cdot l' = \frac{-q \cdot l^2}{8} + \frac{q \cdot l^2}{4} = \frac{q \cdot l^2}{8} \quad (2.10)$$

Pole wynosi zatem:

$$A = \frac{2}{3} \cdot f \cdot l = \frac{2}{3} \cdot \frac{q \cdot l}{8} \cdot l' \quad (2.11)$$

Dla obciążenia jak na rysunku b) (rys.2.6b):

Po wykorzystaniu trzech równań równowagi: $\sum M_A, \sum M_B, \sum x$ wiemy, że:

$$V_B = \frac{h^2}{2 \cdot l} \cdot q \quad H_A = q \cdot h \quad V_A = \frac{-h^2}{2 \cdot l} \cdot q \quad \text{zatem:}$$

$$\sum M_{\alpha-\alpha} = -V_A \cdot x + H_A \cdot y - q \cdot y \cdot \frac{1}{2} \cdot y - M_{\alpha-\alpha} = 0$$

$$M_{\alpha-\alpha} = -V_A \cdot x + H_A \cdot y - \frac{q}{2} \cdot y^2 = \frac{-h^2}{2 \cdot l} \cdot q \cdot x + q \cdot h \cdot y - \frac{q}{2} \cdot y^2$$

ale: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow y = \operatorname{tg} \varphi \cdot x \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{l} \Rightarrow y = \frac{h}{l} \cdot x$

$$\cos \varphi = \frac{x}{x'} \Rightarrow x = \cos \varphi \cdot x' = \frac{l}{l'} \cdot x' \quad ; \quad h^2 + l^2 = l'^2 \Rightarrow h^2 = l'^2 - l^2$$

więc po podstawieniu otrzymujemy::

$$M_{\alpha-\alpha} = \frac{(l'^2 - l^2) \cdot x' \cdot q}{2 \cdot l'} - \frac{(l'^2 - l^2) \cdot x'^2 \cdot q}{2 \cdot l'^2} \quad \text{dla } x' = \frac{1}{2} \cdot l' \quad \text{mamy:}$$

$$M_{x'=\frac{1}{2}l'} = \frac{(l'^2 - l^2) \cdot \frac{1}{2} \cdot l' \cdot q}{2 \cdot l'} - \frac{(l'^2 - l^2) \cdot \frac{1}{4} \cdot l'^2 \cdot q}{2 \cdot l'^2} = \frac{(l'^2 - l^2) \cdot q}{4} - \frac{(l'^2 - l^2) \cdot q}{8}$$

$$M_{x'=\frac{1}{2}l'} = \frac{(l'^2 - l^2) \cdot q}{8} \quad (2.12)$$

Pole wynosi zatem:

$$A = \frac{2}{3} \cdot f \cdot l = \frac{2}{3} \cdot \frac{h^2 \cdot q}{8} \cdot l' \quad (2.13)$$

Dla trzeciego obciążenia (rys.2.6c):

$$\sum M_{\alpha-\alpha} = V_A \cdot x + q \cdot l' - M_{\alpha-\alpha} = 0 \Rightarrow M_{\alpha-\alpha} = \frac{q \cdot l'}{2} \cdot x - \frac{q \cdot x' \cdot x}{2}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{x'} \Rightarrow x = \cos \varphi \cdot x' = \frac{l}{l'} \cdot x' \quad \text{równanie momentów ma zatem postać:}$$

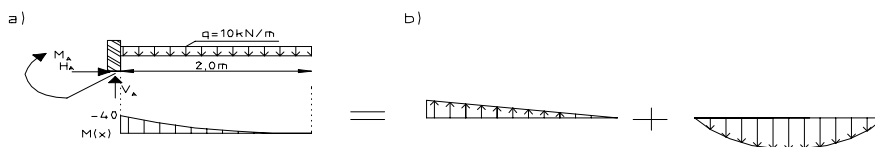
$$M_{\alpha-\alpha} = \frac{q \cdot l \cdot x'}{2} - \frac{q \cdot x'^2 \cdot l}{2 \cdot l'} \quad \text{dla} \quad x' = \frac{1}{2} \cdot l' \quad \text{mamy:}$$

$$M_{\alpha-\alpha} = \frac{q \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot l'}{2} - \frac{q \cdot \frac{1}{4} \cdot l'^2 \cdot l}{2 \cdot l'} = \frac{q \cdot l \cdot l'}{4} - \frac{q \cdot l \cdot l'}{8} = \frac{q \cdot l \cdot l'}{8} \quad (2.14)$$

Pole wynosi zatem:

$$A = \frac{2}{3} \cdot f \cdot l = \frac{2}{3} \cdot \frac{q \cdot l'^2 \cdot l}{8} \quad (2.15)$$

Chcąc zaś wyznaczyć pole wykresu jak na rysunku (rys.2.7a) korzystamy z zasady superpozycji zapisując je jako sumę dwóch pól: paraboli i trójkąta (rys.2.7b). Sprawdźmy na prostym przykładzie czy nasze założenie jest rzeczywiście słuszne. Nasza belka (rys.2.7) obciążona jest obciążeniem ciągłym q i z jednej strony utwierdzona zatem:



Rys.2.7

Po wykorzystaniu trzech równań równowagi wiemy, że:

$$M_A = -40 \text{ kNm} \quad H_A = 0 \text{ kN} \quad V_A = 30 \text{ kN} \quad (1.12)$$

$$M_{\alpha-\alpha} = -5 \cdot x^2 + 30 \cdot x - 40 \quad \text{a pole} \quad A = \int_0^2 (5 \cdot x^2 + 30 \cdot x - 40) dx =$$

$$= -5 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 \Big|_0^2 + 30 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 \Big|_0^2 - 40 \cdot \frac{1}{1} \cdot x \Big|_0^2 = \frac{-100}{3}$$

Jeżeli zaś do pola trójkąta dodamy pole paraboli (rys.2.7b) to otrzymamy:

$$A = A_{\text{trójk.} \text{?} \text{ró}} - A_{\text{paraboli}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-40) + \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 = -\frac{100}{3}, \quad (2.13)$$

c.n.d.

