

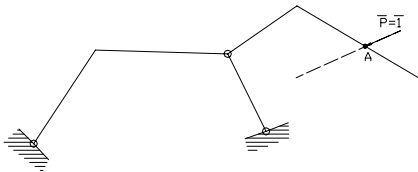
Olga Kopacz, Adam Łodygowski, Wojciech Pawłowski,
Michał Płotkowiak, Krzysztof Tymper
Konsultacje naukowe: prof. dr hab. JERZY RAKOWSKI
Poznań 2002/2003

MECHANIKA BUDOWLI 6

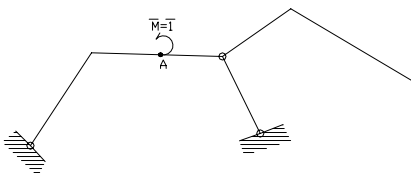
CIĘŻARY SPRĘŻYSTE

Wyznaczanie przemieszczeń z zastosowaniem równań pracy wirtualnej w ramach, łukach, kratownicach statycznie wyznaczalnych.

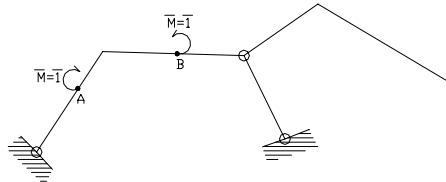
- przemieszczenie punktu A po kierunku działania jedynkowej siły wirtualnej, przyłożonej w tym punkcie



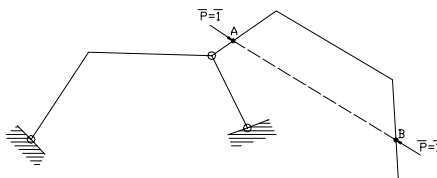
- obrót przekroju A



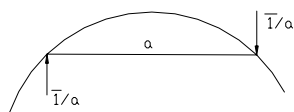
- wzajemny obrót punktów A i B



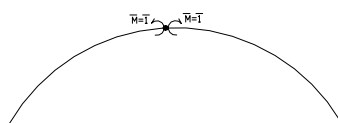
- zbliżenie punktów A i B



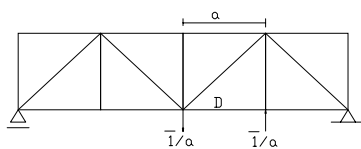
- obrót cięciwy o długości a



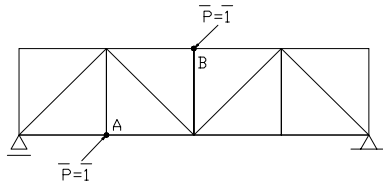
- zmiana kąta zawartego między stycznymi do prętów zbiegających się w przegubie



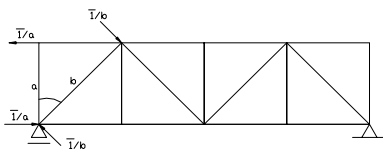
- obrót pręta kratownicy D o długości a



- wzajemne zbliżenie węzłów A i B (względnie oddalenie)



- zmiana kąta zawartego między prętami o długości a i b



Równanie pracy wirtualnej dla kratownicy uwzględnia jedynie działanie siły normalnej (siły podłużnej w prętach).

$$\bar{\delta} = \sum_j \bar{N}_j \left(\frac{N_P^{(j)}}{EA_j} + \alpha_t \cdot t_j \right) l_j \quad (6.1)$$

gdzie j- numer pręta

$N_P^{(j)}$ - siła normalna w j- tym pręcie, będąca wynikiem działania obciążenia P

\bar{N}_j -siła normalna w j-tym pręcie będąca wynikiem działania obciążenia wirtualnego

EA_j - sztywność podłużna j- ego pręta

α_t -współczynnik przewodzenia ciepła j-ego pręta

t_j -przyrost temperatury w j-tym pręcie (równomierne ogrzanie lub oziębienie pręta)

$t = t_o - t_m$ (t_o -ekstremalna temp. we włóknie środkowym, t_m -temp. montażu)

l_j -długość j-ego pręta

Ciężary sprężyste (ciężarki sprężyste)

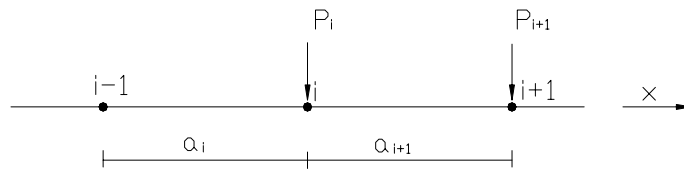
Jest to jedna z metod obliczania linii ugięcia, stosowana najczęściej przy wyznaczaniu składowych przemieszczeń pewnej grupy punktów układu (dotyczy to punktów osi ramy lub łuku, pasa górnego, dolnego lub wszystkich węzłów kratownicy równocześnie)

Posłużmy się pewną analogią:

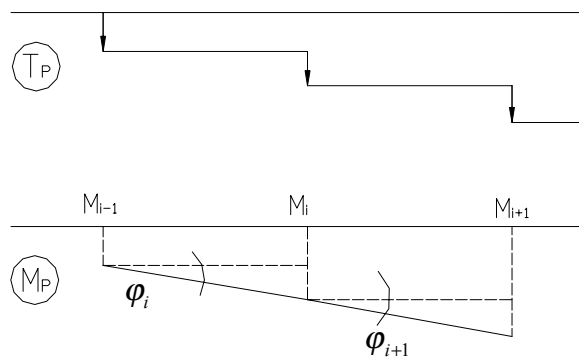
Politechnika Poznańska®

Kopacz, Łodygowski, Pawłowski, Płotkowiak, Tymper

Rozpatrzmy pewien układ belkowy obciążony rzeczywistymi siłami zewnętrznymi



Siły te wywołują poniższe wykresy sił poprzecznych i momentów zginających:



Z rysunku wynika:

$$\operatorname{tg} \varphi_i = \frac{M_i - M_{i-1}}{a_i} = \left. \frac{dM}{dx} \right|_i = T_i^l \quad (6.2)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{i+1} = \frac{M_{i+1} - M_i}{a_{i+1}} = \left. \frac{dM}{dx} \right|_{i+1} = T_i^p \quad (6.3)$$

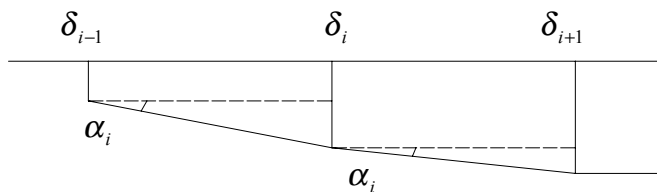
Biorąc pod uwagę konwencję znakowania sił poprzecznych możemy zapisać:

$$P_i = T_i^l - T_i^p = \operatorname{tg} \varphi_i - \operatorname{tg} \varphi_{i+1} \quad (6.4)$$

Miary kątów są bardzo małe, możemy zatem przyjąć że $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$, czyli:

$$P_i \approx \varphi_i - \varphi_{i+1} \quad (6.5)$$

Rozpatrzmy teraz układ belkowy, do którego przyłożone fikcyjne obciążenie w postaci sił skupionych W . Aproxymując linię ugięcia belki łamaną, otrzymujemy następujący wykres:



Wykres spełnia następujące zależności:

$$\operatorname{tg}\alpha_i = \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{a_i} \approx \alpha_i, \quad \operatorname{tg}\alpha_{i+1} = \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{a_{i+1}} \approx \alpha_{i+1} \quad (6.6)$$

Jeżeli założymy, że wykres ugięć $\delta(x)$ jest identyczny z wykresem momentów zginających wywołanych grupą sił skupionych W_i , to na podstawie założenia, że $\alpha_i = \varphi_i$ (porównanie z poprzednim przypadkiem) należy uznać, że W_i są wielkościami, które w rzeczywistości powinny być różnicą kątów

$$W_i = \alpha_i - \alpha_{i+1} \quad (6.7)$$

Wynika z tego, że chcąc znaleźć linię ugięcia układu, należy obliczyć powyższą różnicę kątów α , czego najłatwiej dokonać korzystając z zasady prac wirtualnych

Nazywając siły W_i ciężarami sprężystymi, możemy podać następujące definicje:

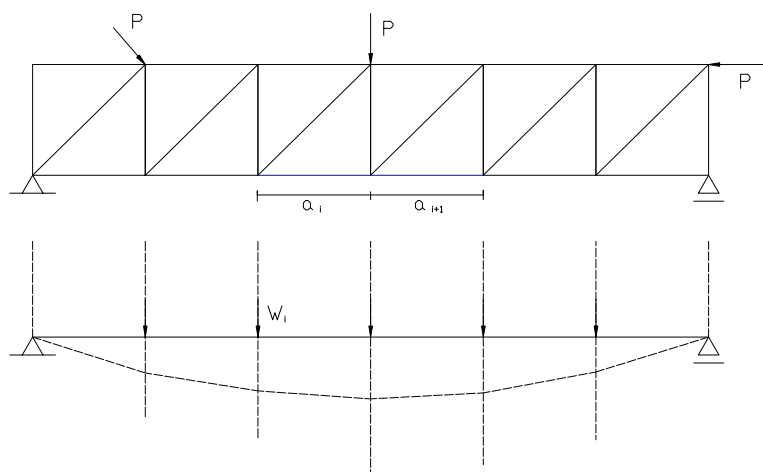
W_i – ciężar sprężysty

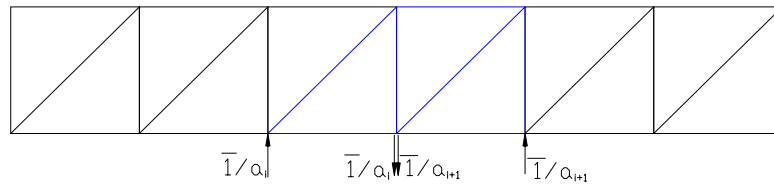
- jest to wielkość, której wartość określa różnica kątów (do poziomu) dwóch sąsiednich linii ugięcia
- jest to fikcyjne obciążenie, które wprowadzone do belki zastępczej daje wykres momentów zginających, pokrywający się z linią ugięcia układu od obciążenia rzeczywistego

Sposoby obliczania ciężarów sprężystych dla układów kratowych statycznie wyznaczalnych.

W celu obliczenia ciężarów sprężystych obciążamy układ siłami: $1/a_k$, $1/a_k+1/a_{k+1}$, $1/a_{k+1}$ działającymi na trzy sąsiednie węzły $k-1, k, k+1$ wzdłuż prostych równoległych do szukanych ugięć $\delta_{k-1}, \delta_k, \delta_{k+1}$.
 Wynika z tego że ciężary sprężyste obliczyć możemy ze wzoru:

$$W_i = \sum_j \frac{\bar{N}_j \cdot N_P^{(j)}}{EA_j} \cdot l_j \quad (6.8)$$

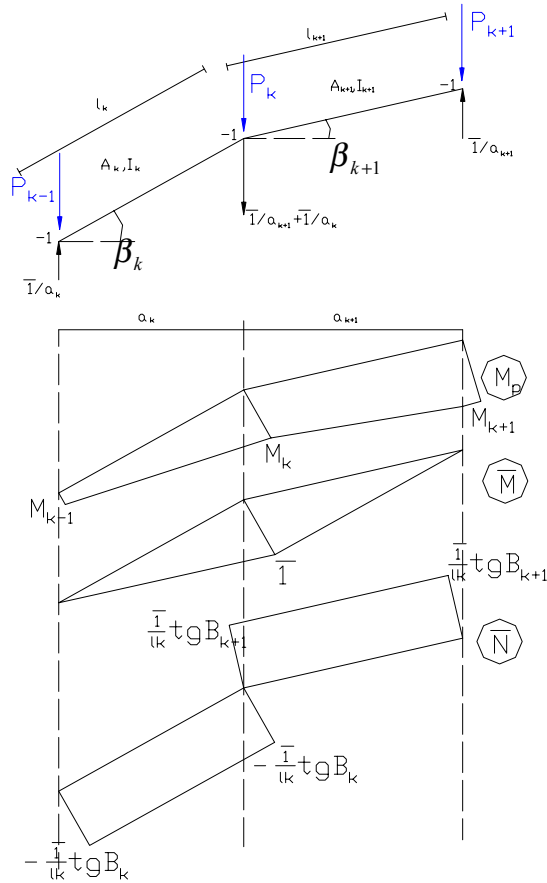




Pręty oznaczone kolorem niebieskim stanowią układ samo równoważny (siły nie wywołują reakcji podporowych w kratownicy)
wykres momentów od obciążenia fikcyjnego W_i , równoważny linii ugięcia pasa dolnego kratownicy

W przypadku gdy badany pas kratownicy nie jest prostopadły do kierunku ugięć, konieczne są dodatkowe obliczenia (patrz W.Nowacki „Mechanika Budowli” tom1, rozdział 10.2.)

Powyższy sposób rozszerzymy na obliczanie ugięć w układach zginanych



$$W_k = \sum \left\{ \int_s \bar{M} \left(\frac{M_P}{EJ} + \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \right) ds + \int_s \bar{N} \left(\frac{N_P}{EA} + \alpha_t t \right) ds \right\} \quad (6.9)$$

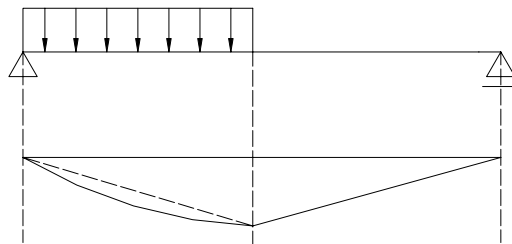
$$\begin{aligned}
 W_k = & \frac{1}{EJ_k} \left[\frac{1}{2} \cdot \bar{1} \cdot l_k \left(\frac{1}{3} M_{k-1}^p + \frac{2}{3} M_k^p \right) \right] + \frac{1}{EJ_{k+1}} \left[\frac{1}{2} \cdot \bar{1} \cdot l_{k+1} \left(\frac{1}{3} M_{k+1}^p + \frac{2}{3} M_k^p \right) \right] + \\
 & + \frac{1}{EA_k} \left[-\frac{\bar{1}}{l_k} \cdot \text{tg}\beta_k \cdot l_k \cdot N_k^p \right] + \frac{1}{EA_{k+1}} \left[\frac{\bar{1}}{l_{k+1}} \cdot \text{tg}\beta_{k+1} \cdot l_{k+1} \cdot N_{k+1}^p \right] + \frac{\alpha_t \Delta t_k}{h_k} \cdot \frac{1}{2} \cdot \bar{1} l_k + \\
 & + \frac{\alpha_t \Delta t_{k+1}}{h_{k+1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \bar{1} l_{k+1} + \alpha_t t_k \left(-\frac{\bar{1}}{l_k} \cdot \text{tg}\beta_k \cdot l_k \right) + \alpha_t t \left(\frac{\bar{1}}{l_{k+1}} \cdot \text{tg}\beta_{k+1} \cdot l_{k+1} \right)
 \end{aligned}$$

Po skróceniu i wyłączeniu wspólnych czynników:

$$\begin{aligned}
 W_k = & \frac{l_k}{6EJ_k} [2M_k^p + M_{k-1}^p] + \frac{l_k}{6EJ_{k+1}} [2M_k^p + M_{k+1}^p] + \\
 & + \frac{(-1)\text{tg}\beta_k}{EA_k} \cdot N_k^p + \frac{\text{tg}\beta_{k+1}}{EA_{k+1}} \cdot N_{k+1}^p + \frac{\alpha_t \Delta t}{2} \left(\frac{l_k}{h_k} + \frac{l_{k+1}}{h_{k+1}} \right) + \\
 & + \alpha_t t (-\text{tg}\beta_k + \text{tg}\beta_{k+1})
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Jeśli wykres momentów jest krzywoliniowy to wzór na ciężar sprężysty przyjmuje postać:

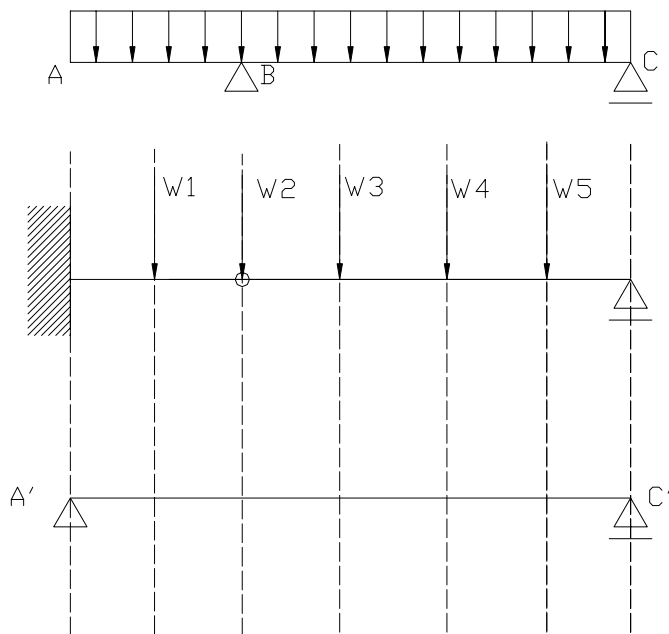
$$W_k = \frac{l_k}{6EJ_k} [2M_k^p + M_{k-1}^p] + \dots + \Delta W \tag{6.11}$$



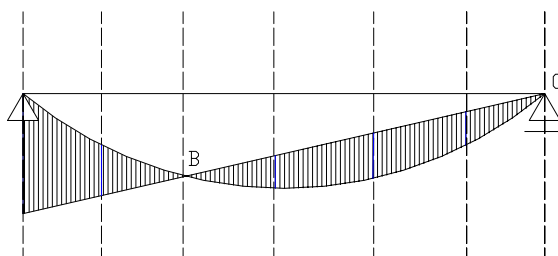
gdzie $\Delta W =$



Po obliczeniu ciężarów sprężystych obciążamy nimi belkę fikcyjną, taką by spełniała warunki brzegowe układu rzeczywistego (analogia do met. obciążeń wtórnych).

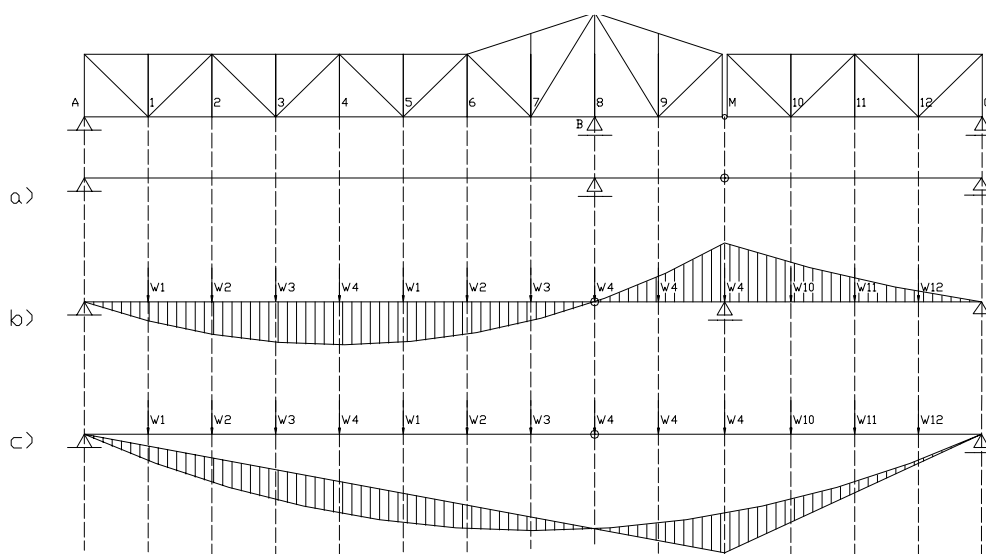


Można jednak zamiast belki fikcyjnej obciążać ciężarami sprężystymi belki na dwóch podporach, jednak przy wykonaniu pewnego zabiegu graficznego. Dla belki podpartej na dwóch końcach wykres momentów powstałych od obciążeń W będzie równy zero w punktach A' i B' (ugięcie tych punktów równe zero). Jednak warunkiem brzegowym belki rzeczywistej jest zerowe ugięcie w punktach B i C . Należy postąpić w następujący sposób: po narysowaniu wykresu momentów podpartej na obu końcach, kreślimy prostą zamykającą tak by przecięła wykres w punktach B i C .



Rzędne zakreskowanego pola między łamaną a prostą zamykającą stanowią wartości ugięć kolejnych punktów belki rzeczywistej (na niebiesko oznaczono ugięcia w punktach przyłożenia ciężarów sprężystych).

Analogicznie postępujemy w przypadku kratownicy:

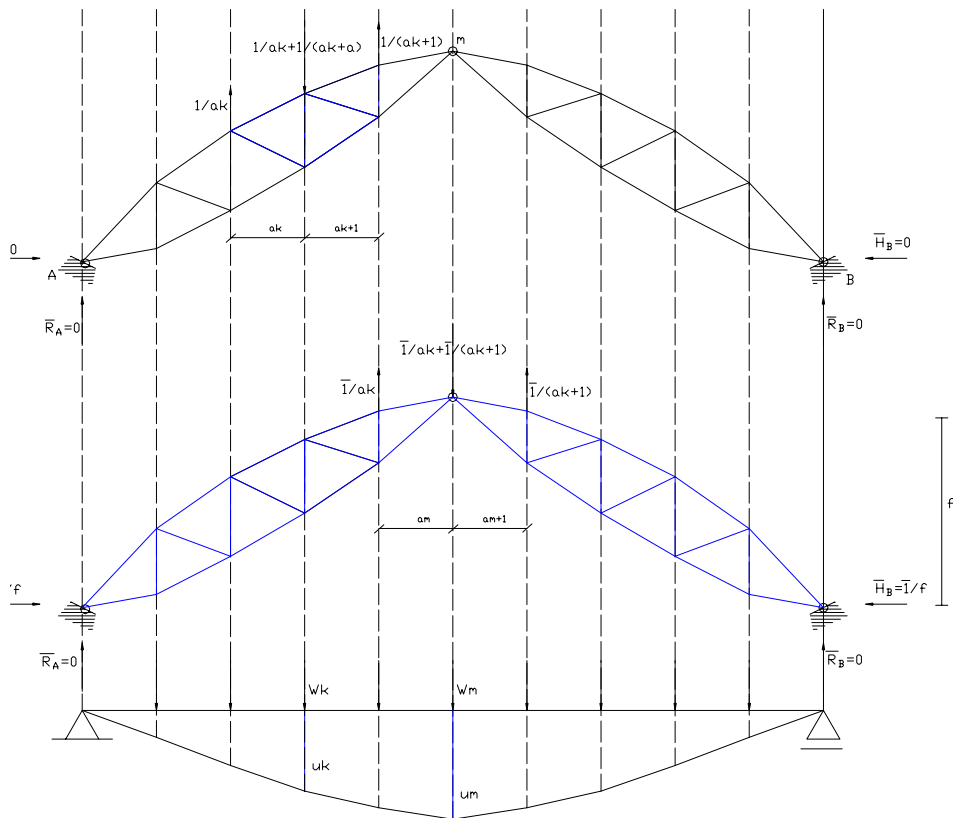


rys. a) –układ rzeczywisty

rys. b) –układ zastępczy (analogia do met. obciążeń wtórnych)

rys. c) –układ zastępczy (belka wolnopodparta na obu końcach) z prowadzeniem zabiegu graficznego (patrz przykład poprzedni)

W przypadku występowania przegubu wewnętrznego ciężar sprężysty dla tego punktu należy obliczyć indywidualnie biorąc pod uwagę fakt, że wykresy momentów wirtualnych występują w całym układzie.



Wszystkie wartości w_k obliczamy ze wzoru (6.31) natomiast wielkość w_m obliczamy z uwzględnieniem faktu, że obciążenie wirtualne w punkcie m wywołuje reakcje poziome H . Zatem stan naprężenia występuje we wszystkich prętach kratownicy a nie jak poprzednio tylko w układach samorównoważnych (oznaczone kolorem niebieskim).