

Olga Kopacz, Adam Łodygowski, Wojciech Pawłowski,
Michał Płotkowiak, Krzysztof Tymper
Konsultacje naukowe: prof. dr hab. JERZY RAKOWSKI
Poznań 2002/2003

MECHANIKA BUDOWLI 8 METODA SIŁ

Metoda sił jest sposobem rozwiązywania układów statycznie niewyznaczalnych, czyli układów o nadliczbowych więzach. Sprowadza się ona do rozwiązywania układu statycznie wyznaczalnego, który powstaje z niewyznaczalnego przez wprowadzenie w miejsce odrzuconych więzów niewiadomych sił. Jest to prosty sposób na rozwiązanie układów ramowych, kratowych, czy łukowych. W poniższym wykładzie omówimy ogólne założenia oraz tok postępowania obliczeniowego metodą sił.

Słowa kluczowe: metoda sił, metoda energetyczna, układy statycznie niewyznaczalne

1. ZASADY OGÓLNE METODY SIŁ

Istota metody opiera się na pozbawieniu rozpatrywanego, obciążonego układu nadliczbowych więzów, dbając jednak przy tym o to, aby pozostał on geometrycznie niezmienny. W miejsce myślowo usuniętych więzów wstawiamy niewiadome siły. Następnie, aby zachować kinematyczną identyczność układu rzeczywistego z nowym, nazywanym dalej układem podstawowym, określamy sumaryczne przemieszczenia po kierunkach działania tych sił. Ponieważ w rzeczywistości w tych miejscach istniały więzy, przemieszczenia te są równe zero. Układając te wnioski w równania możemy obliczyć wartości nadliczbowych niewiadomych, a zatem otrzymujemy układ wyznaczalny z równań równowagi.

Układ podstawowy, który na ogół jest układem statycznie wyznaczalnym, musi spełniać również warunki zgodności geometrycznej (identyczność wymiarów) i statycznej (identyczność obciążeń) z układem rzeczywistym.

Przyjrzyjmy się zatem kolejnym etapom rozwiązania zadania metodą sił.

1.1 OKREŚLENIE STOPNIA STATYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI

Stopień statycznej niewyznaczalności, w skrócie SSN, jest równy ilości nadliczbowych więzów.

1.2 PRZYJĘCIE UKŁADU PODSTAWOWEGO

Interesujący nas układ statycznie niewyznaczalny pozbawiamy nadliczbowych więzów dokładnie tyle, ile wynosi ssn. Otrzymujemy w wyniku tego zabiegu układ statycznie wyznaczalny, który musi być również kinematycznie niezmienny. Taki zastępczy układ nazywamy podstawowym. Możemy łatwo zauważyć, że w miejscach usuniętych przez nas więzów możliwe jest teraz przemieszczenie po ich kierunkach. Na ogół istnieje parę możliwości wyboru układu podstawowego, nas jednak interesuje wybór najlepszego, czyli najmniej pracochłonnego.

1.3 WPROWADZENIE NADLICZBOWYCH NIEWIADOMYCH

W miejsce usuniętych więzów w układzie podstawowym wprowadzamy niewiadome x_1, x_2, \dots, x_n będące siłami uogólnionymi. W przypadku usunięcia więzu uniemożliwiającego przesunięcie wprowadzamy siłę skupioną, a w miejsce utwierdzenia uniemożliwiającego obrót wprowadzamy niewiadomą w postaci momentu skupionego. Możliwe jest również wprowadzenie uogólnionych sił w postaci grup sił.

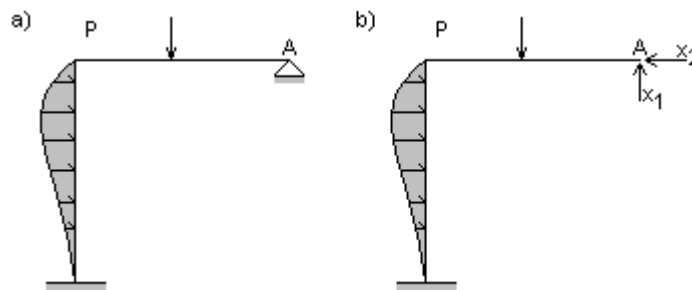
1.4 DOBÓR UKŁADU RÓWNAŃ KANONICZNYCH ORAZ INTERPRETACJA JEGO WSPÓLCZYNNIKÓW

Równania kanoniczne są zależnościami, o których wspominaliśmy już we wstępie. Są nieodłącznym składnikiem układu podstawowego, gdyż zapewniają kinematyczną zgodność układu rzeczywistego z podstawowym. Dzięki nim możemy obliczyć wartości niewiadomych sił uogólnionych. Poszczególne równania układu są zsumowanymi przemieszczeniami po kierunkach

odrzuconych więzów. Liczba równań jest zatem taka sama jak liczba odrzuconych więzów. W rzeczywistości przemieszczenia te są zerowe, ponieważ w tych miejscach są podpory uogólnione.

Aby obliczyć przemieszczenia powodowane nieznanymi siłami posłużymy się zasadą superpozycji oraz jednostkowymi siłami przykładanymi w miejscach niewiadomych x_i . Przyjęto się oznaczać te przemieszczenia symbolami δ_{ik} , gdzie indeksy oznaczają kolejno miejsce i kierunek przemieszczenia oraz jego przyczynę.

W celu zobrazowania tego zagadnienia posłużymy się przykładem. Dany jest układ ramowy (Rys.1.4.1a), statycznie niewyznaczalny i obciążony siłami zewnętrznymi.



Rys.1.4.1 a) układ ramowy statycznie niewyznaczalny obciążony zewnętrznymi;
 b) układ podstawowy obciążony siłami zewnętrznymi oraz niewiadomymi x_1 i x_2

Jak widzimy układ jest statycznie niewyznaczalny, a jego stopień statycznej niewyznaczalności wynosi dwa. Sprowadzamy zadanie dowolnie do układu wyznaczalnego (zgodnie z zasadami omówionymi w punkcie 1.2), zachowując obciążenia zewnętrzne, a w miejsce usuniętych więzów wstawiamy niewiadome siły x_1 i x_2 (Rys.1.4.1). Układ podstawowy przez nas przyjęty spełnia warunki statycznej wyznaczalności oraz geometrycznej zgodności z układem rzeczywistym, nie jest jednak zgodny kinematycznie! Wspomnieliśmy wcześniej, że kinematyczną zgodność zapewniają równania kanoniczne. Przyjrzyjmy się zatem rzeczywistemu przemieszczeniu punktu A. W układzie rzeczywistym w tym miejscu znajduje się podpora przegubowa, niemożliwe jest więc przemieszczenie tego punktu po kierunkach V i H, a więc po kierunkach działania w układzie podstawowym niewiadomych x_1 i x_2 . A więc:

$$\begin{aligned} 1) \Delta_A^{(V)} &= 0 \\ 2) \Delta_A^{(H)} &= 0 \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

Zastanówmy się więc, co wywołuje pionowe przemieszczenie punktu A. Przyczynami są siły x_1 i x_2 oraz obciążenie zewnętrzne P. Przemieszczenie to możemy zatem zapisać jako sumę przemieszczeń wywołanych poszczególnymi przyczynami (1.4.2):

$$\Delta_A^{(V)}(x_1) + \Delta_A^{(V)}(x_2) + \Delta_A^{(V)}(P) = 0 \quad (1.4.2)$$

Zapisując czytelniej symbolami δ_{ik} , otrzymamy:

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1P} = 0 \quad (1.4.3)$$

Gdzie indeks i oznacza kierunek przemieszczenia (w tym przypadku kierunek działania niewiadomej x_1 , czyli 1), a indeks k oznacza przyczynę wywołującą tą przemieszczenie. Zapisując analogicznie przemieszczenie poziome punktu A, otrzymamy:

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2P} = 0 \quad (1.4.4)$$

Możemy zapisać wszystkie równania ogólnym wzorem:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \delta_{ik}x_k + \Delta_{iP} = 0 \quad (1.4.5)$$

Zadanie takie sprowadza się zatem do obliczenia pewnej liczby równań metody sił.

Współczynniki równań kanonicznych δ_{ik} obliczamy z wzoru, który w ogólnym przypadku płaskiego układu ma postać:

$$\delta_{ik} = \sum \left\{ \int_s \frac{M_i M_k}{EJ} ds + \int_s \frac{N_i N_k}{EA} ds + \int_s \frac{\kappa T_i T_k}{GA} ds \right\} \quad (1.4.6)$$

Wyjaśnienie symboli w równaniu 1.4.6:

M_i, M_k – momenty zginające wywołane działaniem siły $x_1=1$ lub $x_k=1$

N_i, N_k – siły normalne wywołane jw.

T_i, T_k – siły tnące wywołane jw.

J – moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta

E i G – moduły sprężystości liniowej i poprzecznej (stałe materiałowe)

κ – współczynnik ścinania

Zgodnie z twierdzeniem Maxwella o wzajemności przemieszczeń wiemy, że:

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} \quad (1.4.7)$$

Współczynniki Δ_{iP} opisujące przemieszczenie punktu po kierunku i , spowodowane przez siły zewnętrzne P opisuje wzór 1.4.8:

$$\Delta_{iP} = \sum \left\{ \int_s \frac{M_i M_P^{(0)}}{EJ} ds + \int_s \frac{N_i N_P^{(0)}}{EA} ds + \int_s \frac{\kappa T_i T_P^{(0)}}{GA} ds \right\} \quad (1.4.8)$$

Wyjaśnienie symboli w równaniu 1.4.8:

M_i , - momenty zginające wywołane działaniem siły $x_i=1$

M_P - momenty zginające wywołane działaniem obciążeń zewnętrznych P

N_i , - siły normalne wywołane działaniem siły $x_i=1$

N_P - siły normalne wywołane działaniem obciążeń zewnętrznych P

T_i , - siły tnące wywołane działaniem siły $x_i=1$

T_k - siły tnące wywołane działaniem obciążeń zewnętrznych P

J – moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta

E i G – moduły sprężystości liniowej i poprzecznej (stałe materiałowe)

κ – współczynnik ścinania

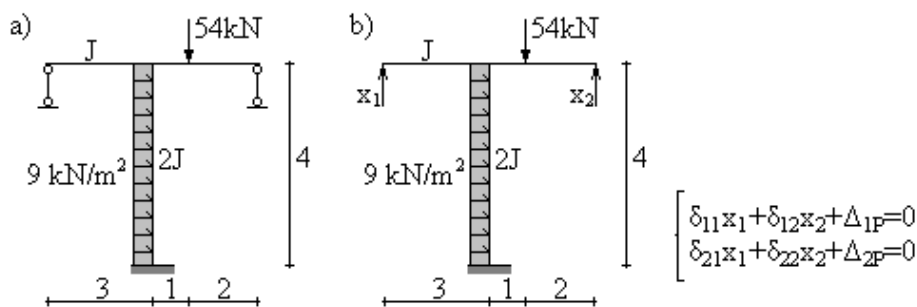
Całki we wzorach 1.4.6 i 1.4.8 możemy obliczyć numerycznie korzystając ze sposobu Wereszczagina-Mohra

Przejdźmy do przedstawienia powyższej metody na przykładowym zadaniu.

2. PRZYKŁADY

2.1 PRZYKŁAD 1

Wykonać wykresy momentów od obciążeń rzeczywistych układu statycznie niewyznaczalnego przedstawionego na Rys.2.1.1a:

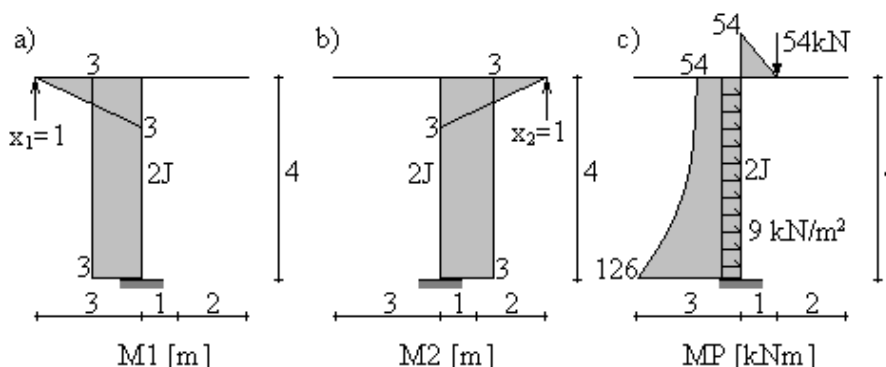


Rys.2.1.1 Dany układ a) rzeczywisty z obciążeniem zewnętrznym; b) układ podstawowy z niewiadomymi x_1 i x_2 oraz układem równań kanonicznych

Układ rzeczywisty a) ma stopień statycznej niewyznaczalności równy 2. Odrzucamy myślowo dwie podpory prętowe pozostawiając jedynie utwierdzenie (jest to oczywiście jedna z wielu możliwości doboru układu podstawowego) i zastępujemy je niewiadomymi siłami x_1 i x_2 . Układamy równania kanoniczne według opisu z punktu 1.4:

$$\begin{aligned} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2P} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Następnie, w celu obliczenia przemieszczeń δ_{ik} , wykonuję wykresy momentów od jedynekowych sił przyłożonych kolejno w miejsca niewiadomych x_1 i x_2 oraz obciążenia zewnętrznego P w postaci siły skupionej oraz obciążenia rozłożonego w układzie podstawowym (Rys.2.1.1b). Wykresy te nazywamy kolejno: M_1 [m] (Rys.2.1.2a), M_2 [m] (Rys.2.1.2b) i M_P^0 [kNm] (Rys.2.1.2c).



Rys.2.1.2 Wykresy momentów zginających w układzie podstawowym pochodzących kolejno od: a) siły jedynekowej przyłożonej w miejsce niewiadomej x_1 ; b) siły jedynekowej przyłożonej w miejsce niewiadomej x_2 ; c) obciążenia rzeczywistego P w postaci siły skupionej oraz obciążenia rozłożonego.

Mając już gotowe wykresy momentów możemy przystąpić do obliczenia współczynników równań kanonicznych (2.1.1) według wzoru Maxwella-Mohra (1.5.1). Uwzględnimy jedynie wpływ momentów zginających, wobec czego na nasze potrzeby wzór przyjmie postać:

$$\delta_{ik} = \sum \int_s \frac{M_i M_k}{EJ} ds \quad (2.1.2)$$

W celu uproszczenia całkowania skorzystamy z numerycznej metody Wereszczagina-Mohra, o której wspominaliśmy wcześniej.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} * 3 * 3 * \frac{2}{3} * 3 \right] + \frac{1}{2EJ} [4 * 3 * 3] = \frac{27m^3}{EJ} \quad (2.1.3)$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} * 3 * 3 * \frac{2}{3} * 3 \right] + \frac{1}{2EJ} [4 * 3 * 3] = \frac{27m^3}{EJ} \quad (2.1.4)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{2EJ} [4 * 3 * 3] = -\frac{18m^3}{EJ} \quad (2.1.5)$$

Z twierdzenia Maxwella o wzajemności przemieszczeń wiemy, że $\delta_{12} = \delta_{21}$ (2.1.5).

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{2EJ} \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{9 * 4^2}{8} * 4 \right) * 3 + \frac{126 + 54}{2} * 4 * 3 \right] = \frac{468kNm^3}{EJ} \quad (2.1.6)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2P} &= \frac{1}{2EJ} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{9 * 4^2}{8} * 4 \right) * 3 - \frac{126 + 54}{2} * 4 * 3 \right] + \\ &+ \frac{1}{EJ} \left[-\frac{3 + 2}{2} * 1 * \frac{1}{2} * 54 \right] = -\frac{540kNm^3}{EJ} \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Układ równań kanonicznych przyjmie zatem następującą postać:

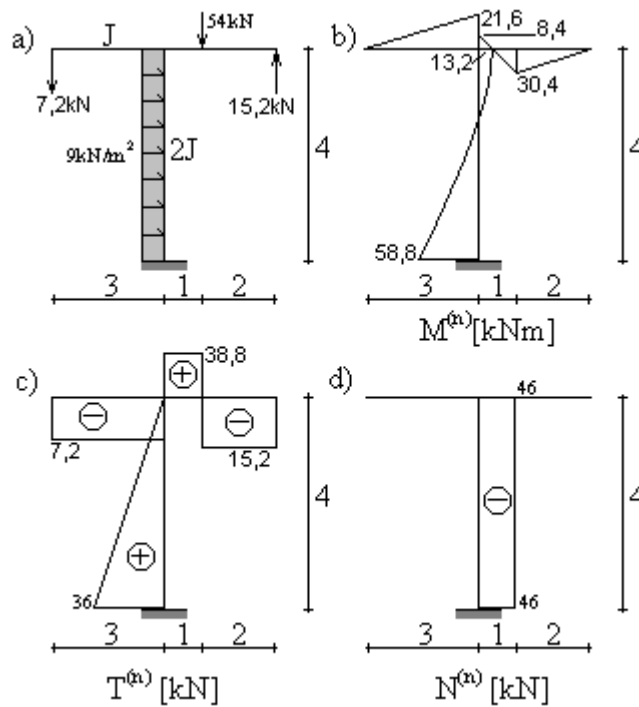
$$\begin{aligned} \frac{27m^3}{EJ} x_1 - \frac{18m^3}{EJ} x_2 + \frac{468kNm^3}{EJ} &= 0 \\ -\frac{18m^3}{EJ} x_1 + \frac{27m^3}{EJ} x_2 - \frac{540kNm^3}{EJ} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Po obliczeniu powyższego układu równań otrzymamy następujące wyniki:

$$\begin{aligned} x_1 &= -7,2kN \\ x_2 &= 15,2kN \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

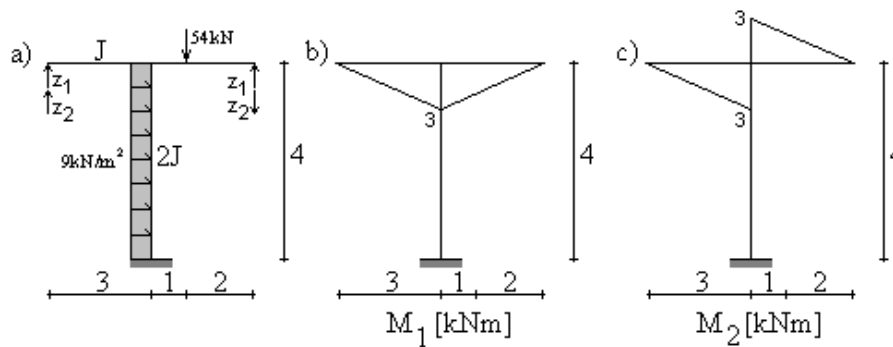
Po otrzymaniu wartości niewiadomych x_1 oraz x_2 dokonujemy analizy końcowej zadania, czyli tworzymy wykresy rzeczywistych sił wewnętrznych w układzie podstawowym, obciążonym zewnątrz oraz przez siły x_1 i x_2 (Rys.2.1.3). Wartości sił wewnętrznych możemy określić w oparciu o metodę superpozycji (2.1.10):

$$\begin{aligned} M_p^{(n)} &= M_p = M_p^{(0)} + M_1 x_1 + M_2 x_2 = M_p^{(0)} + \sum_{j=1}^n M_j x_j \\ T_p^{(n)} &= T_p = T_p^{(0)} + T_1 x_1 + T_2 x_2 = T_p^{(0)} + \sum_{j=1}^n T_j x_j \\ N_p^{(n)} &= N_p = N_p^{(0)} + N_1 x_1 + N_2 x_2 = N_p^{(0)} + \sum_{j=1}^n N_j x_j \end{aligned} \quad (2.1.10)$$



Rys.2.1.3 Analiza końcowa zadania: a) stan obciążenia siłami zewnętrznymi oraz obliczonymi niewiadomymi x_1 i x_2 ; b) wykres momentów rzeczywistych $M^{(n)}$; c) wykres rzeczywistych sił tnących $T^{(n)}$; d) wykres rzeczywistych sił normalnych

Warto przy tym zadaniu zastanowić się nad sensem wprowadzenia niewiadomych w postaci grup sił, o czym wspominaliśmy w punkcie 1.3. Rysunek 2.1.4 przedstawia układ podstawowy dla tego zadania przyjęty jak wyżej, z tą różnicą, że zamiast niewiadomych sił x_1 i x_2 wprowadzono grupy sił z_1 i z_2 . Przyjrzyjmy się wykresom momentów zginających w stanie $x_1=1$ oraz $x_2=2$. Łatwo zauważyć, że po „wymnożeniu” wykresów otrzymamy przemieszczenie $\delta_{12}=\delta_{21}=0$.



Rys.2.1.4 a) układ podstawowy obciążony siłami zewnętrznymi oraz zgrupowanymi niewiadomymi z_1 i z_2 ; b) wykres momentów zginających w stanie $z_1=1$ c) wykres momentów zginających w stanie $z_2=1$