

Olga Kopacz, Adam Łodygowski, Wojciech Pawłowski,
Michał Płotkowiak, Krzysztof Tymper
Konsultacje naukowe: prof. dr hab. JERZY RAKOWSKI
Poznań 2002/2003

MECHANIKA BUDOWLI 7

3. SPRAWDZENIE

3.1 SPRAWDZENIE GLOBALNE

Sprawdzenie to polega na zbudowaniu pewnego fikcyjnego („sztucznego”) wykresu momentów M_S , będącego sumą wszystkich wykresów jednostkowych (tzn. M_1, M_2, \dots, M_i):

$$M_S = \sum_{i=1}^n M_i \quad (3.1.1)$$

Na podstawie tak sporządzonego wykresu obliczamy współczynnik δ_{SS} ze wzoru:

$$\delta_{SS} = \int_S \frac{M_S \cdot M_S}{EJ} ds \quad (3.1.2)$$

Okazuje się że spełniona jest następująca zależność:

$$\delta_{SS} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{ik} \quad (3.1.3)$$

Dowód:

$$\begin{aligned} \delta_{SS} &= \int_S \frac{M_S \cdot M_S}{EJ} ds = \\ &= \int_S \frac{1}{EJ} (M_1 + M_2 + \dots + M_n) \cdot (M_1 + M_2 + \dots + M_n) ds = \\ &= \int_S \frac{M_1 \cdot M_1}{EJ} ds + \int_S \frac{M_1 \cdot M_2}{EJ} ds + \dots + \int_S \frac{M_1 \cdot M_n}{EJ} ds + \\ &+ \int_S \frac{M_2 \cdot M_1}{EJ} ds + \int_S \frac{M_2 \cdot M_2}{EJ} ds + \dots + \int_S \frac{M_n \cdot M_n}{EJ} ds = \\ &= \delta_{11} + \delta_{12} + \dots + \delta_{1n} + \delta_{21} + \delta_{22} + \dots + \delta_{nn} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{ik} \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

W ten sposób otrzymaliśmy możliwość sprawdzenia poprawności wyliczeń wszystkich uzyskanych współczynników δ_{ik} (z pominięciem Δ_{ip}).

Jeżeli powyższa równość jest spełniona przeprowadzone dotychczas obliczenia są prawidłowe. Jeżeli nie, to lokalizujemy dany błąd sprawdzeniem lokalnym.

3.2 SPRAWDZENIE LOKALNE

Sprawdzenie to, zwane także wierszowym bądź kolumnowym, polega na zlokalizowaniu danego błędu, przez odrębne rozpatrywanie (sumowanie) elementów danego wiersza macierzy (lub danej kolumny, bo macierz ta jest symetryczna). Sumowania te wyrażone są następującym wzorem:

$$\delta_{is} = \int_S \frac{M_i \cdot M_s}{EJ} ds = \dots = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} \quad (3.2.1)$$

Sprawdzenia poprawności obliczeń Δ_{ip} dokonujemy podobnie jak powyżej. Obliczamy mianowicie Δ_{sp} i porównujemy otrzymaną wielkość z wyrażeniem $\sum_{i=1}^n \Delta_{ip}$, gdyż obie wielkości powinny być sobie równe.

$$\Delta_{sp} = \int_S \frac{M_p^o \cdot M_s}{EJ} ds = \dots = \sum_{i=1}^n \Delta_{ip} \quad (3.2.2)$$

Dowód tych zależności jest analogiczny jak dla sprawdzenia globalnego. Po zlokalizowaniu i poprawieniu błędu przystępujemy do dalszej analizy wyników.

3.3 SPRAWDZENIE WARTOŚCI NIEWIADOMYCH SIŁ

Sprawdzenie to polega na podstawieniu wyznaczonych wielkości X_k do równań kanonicznych i stwierdzeniu, że układ równań jest dla obliczonych wartości sił spełniony.

3.4 SPRAWDZENIE STATYCZNE

To sprawdzenie mówi nam, czy przy wyznaczonych siłach wewnętrznych spełnione są warunki statycznej równowagi ($\Sigma X=0$, $\Sigma Y=0$, $\Sigma M=0$). Polega ono na wykazaniu, że spełnione są one dla całości układu

jak i dla wybranych jego części. Warto zaznaczyć, że sprawdzenie te nie bada poprawności wyliczonych X_k , a jedynie sprawdza poprawność wykresów sił wewnętrznych od tych obciążeń (niekoniecznie prawidłowych).

3.5 SPRAWDZENIE KINEMATYCZNE

Sprawdzenie to jest najważniejsze, gdyż tak naprawdę to dopiero ono mówi nam czy uzyskane wyniki są prawidłowe. Polega na wykazaniu, że dla wybranych punktów (na ogół punktów, które nie doznają przemieszczeń w układzie statycznie niewyznaczalnym) przemieszczenia są równe wartościom rzeczywiście tam występującym.

Zagadnienie wyznaczania przemieszczeń w układach statycznie niewyznaczalnych wydaje się stosunkowo złożone gdyż zgodnie z uniwersalną zasadą pracy wirtualnej w celu określenia przemieszczenia, należy znaleźć wykresy sił wewnętrznych w układzie statycznie niewyznaczalnym zarówno dla stanu rzeczywistego obciążenia jak i wirtualnego.

$$\bar{1} \cdot \delta_j = \int_S \frac{M^{(n)} \cdot \bar{M}^{(n)}}{EJ} ds + \dots$$

$$\sum_{k=1}^n \delta_{ik} \cdot X_k + \Delta_{ip} = 0 \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^n \delta_{ik} \cdot \bar{X}_k + \bar{\Delta}_{ip} = 0 \quad (3.5.1)$$

W sukurs przychodzą nam twierdzenia redukcyjne, z których wynika, że licząc przemieszczenia w układzie statycznie niewyznaczalnym, jeden ze stanów (rzeczywisty lub wirtualny) możemy wyliczyć dla dowolnego układu podstawowego.

Pierwsze twierdzenie redukcyjne

W celu obliczenia dowolnego przemieszczenia w układzie statycznie niewyznaczalnym, wystarczy rozwiązać układ ten od obciążenia rzeczywistego, zaś wirtualny stan obciążeń określić dla dowolnego układu podstawowego statycznie wyznaczalnego.

Dowód tego twierdzenia jest następujący (przytoczymy go uwzględniając w obliczeniach przemieszczeń jedynie wpływ momentów zginających):

$$\bar{1} \cdot \delta_j = \int_s \frac{M^{(n)} \cdot \bar{M}^{(n)}}{EJ} ds$$

Zgodnie z zasadą superpozycji mamy:

$$\begin{cases} M^{(n)} = M_p^o + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + \dots + M_n \cdot X_n \\ \bar{M}^{(n)} = \bar{M}_p^o + M_1 \cdot \bar{X}_1 + M_2 \cdot \bar{X}_2 + \dots + M_n \cdot \bar{X}_n \end{cases} \quad (3.5.2)$$

Iloczyn w wyrażeniu podcałkowym (dla uproszczenia zapisu pominięto mianownik EJ) możemy przedstawić jako:

$$\begin{cases} (M_p^o + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + \dots + M_n \cdot X_n) \cdot (\bar{M}_p^o + M_1 \cdot \bar{X}_1 + \\ + M_2 \cdot \bar{X}_2 + \dots + M_n \cdot \bar{X}_n) = \bar{M}_p^o (M_p^o + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + \dots + \\ + M_n \cdot X_n) + \bar{X}_1 (M_1 \cdot M_p^o + M_1^2 \cdot X_1 + M_1 \cdot M_2 \cdot X_2 + \dots + \\ + M_1 \cdot M_n \cdot X_n) + \bar{X}_2 (M_2 \cdot M_p^o + M_2 \cdot M_1 \cdot X_1 + M_2^2 \cdot X_2 + \dots + \\ + M_2 \cdot M_n \cdot X_n) + \dots + \bar{X}_n (M_n \cdot M_p^o + M_n \cdot M_1 \cdot X_1 + \\ + M_n \cdot M_2 \cdot X_2 + \dots + M_n^2 \cdot X_n) \end{cases} \quad (3.5.3)$$

Biorąc pod uwagę, że:

$$\left| \begin{array}{l} \delta_{11} = \int_S \frac{M_1^2}{EJ} ds, \\ \delta_{22} = \int_S \frac{M_2^2}{EJ} ds, \\ \delta_{nn} = \int_S \frac{M_n^2}{EJ} ds, \\ \Delta_{1p} = \int_S \frac{M_1 \cdot M_p^o}{EJ} ds, \Delta_{2p} = \int_S \frac{M_2 \cdot M_p^o}{EJ} ds, \dots, \Delta_{np} = \int_S \frac{M_n \cdot M_p^o}{EJ} ds \end{array} \right|, \left| \begin{array}{l} \delta_{12} = \delta_{21} = \int_S \frac{M_1 \cdot M_2}{EJ} ds \\ \delta_{1n} = \delta_{n1} = \int_S \frac{M_1 \cdot M_n}{EJ} ds \\ \delta_{2n} = \delta_{n2} = \int_S \frac{M_2 \cdot M_n}{EJ} ds \end{array} \right|$$

dostaniemy:

$$\begin{aligned} \bar{1} \cdot \delta_j &= \bar{X}_1 (X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + \dots + X_n \cdot \delta_{1n} + \Delta_{1p}) + \\ &+ \bar{X}_2 (X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + \dots + X_n \cdot \delta_{2n} + \Delta_{2p}) + \\ &+ \bar{X}_n (X_1 \cdot \delta_{n1} + X_2 \cdot \delta_{n2} + \dots + X_n \cdot \delta_{nn} + \Delta_{np}) + \int_S \frac{\bar{M}_p^o \cdot M_p^{(n)}}{EJ} ds \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Na mocy równań kanonicznych metody sił, wartości w nawiasach są równe zero.

Ostatecznie twierdzenie to przyjmie postać:

$$\bar{1} \cdot \delta_j = \int_S \frac{M^{(n)} \cdot \bar{M}^{(n)}}{EJ} ds = \int_S \frac{M^{(n)} \cdot \bar{M}^o}{EJ} ds \quad (3.5.5)$$

Uogólnienie relacji (3.5.5) na przypadek, w którym uwzględnia się wpływ wszystkich przyczyn na przemieszczenia nie następuje żadnych trudności.

Drugie twierdzenie redukcyjne

W celu obliczenia dowolnego przemieszczenia w układzie statycznie niewyznaczalnym, wystarczy rozwiązać układ ten od obciążenia wirtualnego, zaś rzeczywisty stan obciążeń określić dla dowolnego układu podstawowego statycznie wyznaczalnego.

Dowód tego twierdzenia jest analogiczny jak przy twierdzeniu pierwszym z tym, że w grupowaniu wyrażeń przed nawiasami występują czynniki X_k .

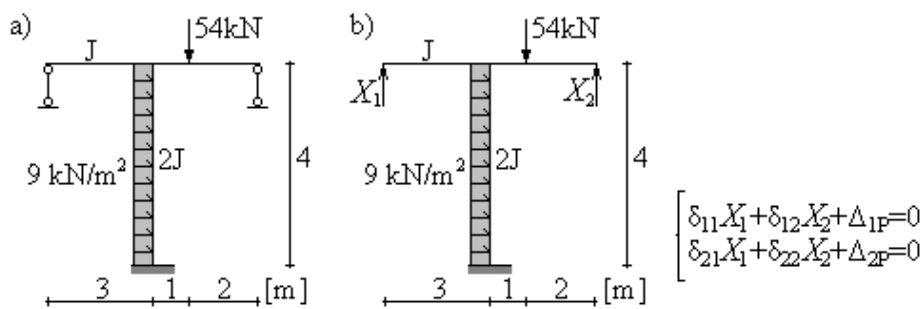
Ostatecznie twierdzenie to przyjmie postać:

$$\bar{1} \cdot \delta_j = \int_s \frac{M^{(n)} \cdot \bar{M}^{(n)}}{EJ} ds = \int_s \frac{M^o \cdot \bar{M}^{(n)}}{EJ} ds \quad (3.5.6)$$

Warto zaznaczyć, że sprawdzeń kinematycznych jest bardzo dużo, gdyż możemy przyjąć wiele różnych układów podstawowych. Reasumując, kontrole kinematyczną najlepiej przeprowadzać na innym układzie podstawowym niż przy liczeniu niewiadomych, ponieważ efektem tego sprawdzenia byłoby wykazanie poprawności równania kanonicznego.

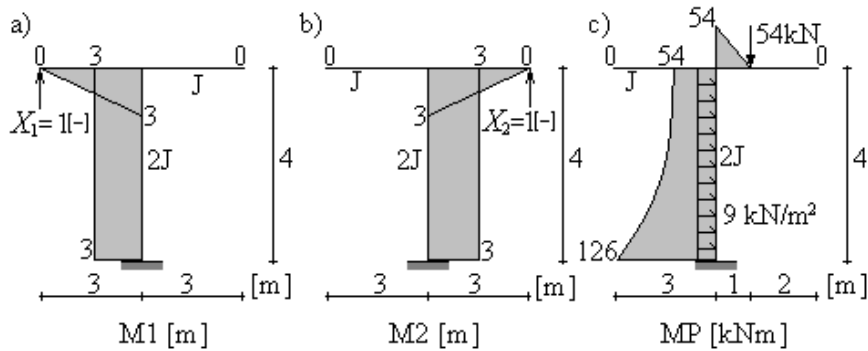
4. PRZYKŁAD 1

Dokonać sprawdzenia obliczonego wcześniej układu statycznie niewyznaczalnego przedstawionego na rysunku Rys.4.0.1a.

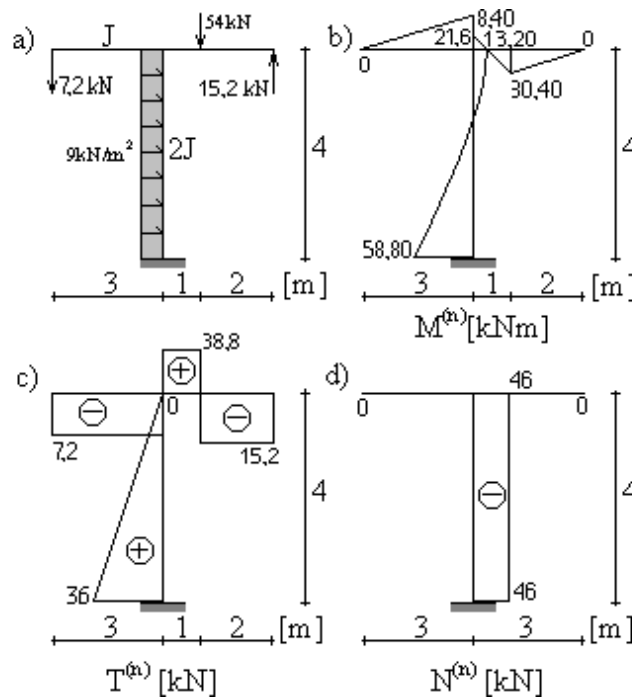


Rys.4.0.1 Dany układ a) rzeczywisty z obciążeniem zewnętrznym; b) układ podstawowy z niewiadomymi X_1 i X_2 oraz układem równań kanonicznych

Zestawienie wykresów:



Rys.4.0.2 Wykresy momentów zginających w układzie podstawowym pochodzące kolejno od: a) siły jedykowej przyłożonej w miejsce niewiadomej X_1 ; b) siły jedykowej przyłożonej w miejsce niewiadomej X_2 ; c) obciążenia rzeczywistego P w postaci siły skupionej oraz obciążenia rozłożonego.



Rys.4.0.3 Analiza końcowa zadania: a) stan obciążenia siłami zewnętrznymi oraz obliczonymi niewiadomymi x_1 i x_2 ; b) wykres momentów rzeczywistych $M^{(n)}$; c) wykres rzeczywistych sił tnących $T^{(n)}$; d) wykres rzeczywistych sił normalnych $N^{(n)}$

Zestawienie wyników współczynników:

$$\delta_{11} = \frac{27}{EJ} m^3, \quad \delta_{22} = \frac{27}{EJ} m^3, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{18}{EJ} m^3$$

$$\Delta_{1P} = \frac{468}{EJ} kN \cdot m^3, \quad \Delta_{2P} = -\frac{540}{EJ} kN \cdot m^3$$

(4.0.1)

Układ równań kanonicznych przyjął więc postać:

$$\frac{27m^3}{EJ} X_1 - \frac{18m^3}{EJ} X_2 + \frac{468kNm^3}{EJ} = 0$$

$$-\frac{18m^3}{EJ} X_1 + \frac{27m^3}{EJ} X_2 - \frac{540kNm^3}{EJ} = 0$$

(4.0.2)

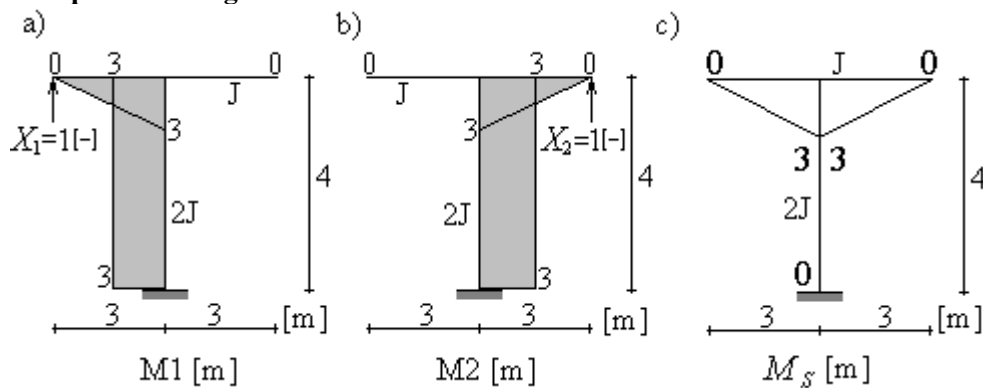
Po obliczeniu powyższego układu równań otrzymano następujące wyniki:

$$X_1 = -7,2 \text{ kN}$$

$$X_2 = 15,2 \text{ kN}$$

(4.0.3)

4.1 Sprawdzenie globalne



Rys.4.1.1 Wykresy momentów zginających w układzie podstawowym pochodzące kolejno od: a) siły jedynekowej przyłożonej w miejsce niewiadomej X_1 ; b) siły jedynekowej przyłożonej w miejsce niewiadomej X_2 ; c) od sumy wszystkich wykresów jedynekowych (wykres zbiorczy momentów M_i)

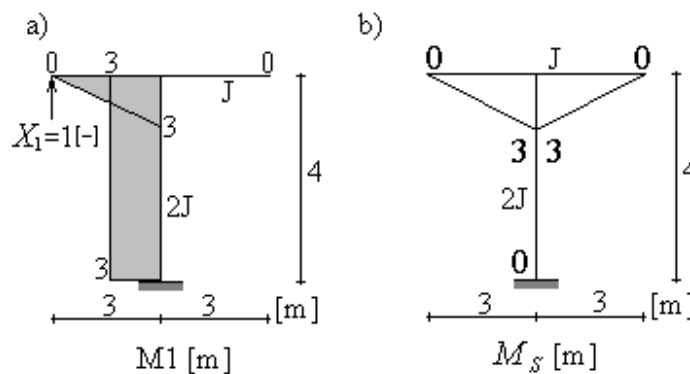
$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{ik} = \frac{27 + 27 - 18 - 18}{EJ} = \frac{18}{EJ} m^3$$

$$\delta_{SS} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 2 \right) = \frac{18}{EJ} m^3$$

$$\frac{18}{EJ} = \frac{18}{EJ}$$

(4.1.1)

4.2 Sprawdzenie lokalne



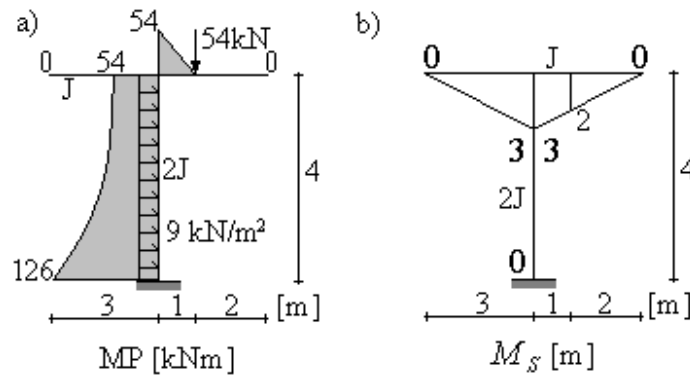
Rys.4.2.1 Wykresy momentów zginających w układzie podstawowym pochodzące kolejno od: a) siły jedykowej przyłożonej w miejsce niewiadomej X_1 ; b) od sumy wszystkich wykresów jedykowych (wykres zbiorczy momentów M_i)

$$\sum_{k=1}^n \delta_{1k} = \frac{27 - 18}{EJ} = \frac{9}{EJ} m^3$$

$$\delta_{1S} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) = \frac{9}{EJ} m^3$$

$$\frac{9}{EJ} = \frac{9}{EJ}$$

(4.2.1)



Rys.4.2.1 Wykresy momentów zginających w układzie podstawowym pochodzące kolejno od: a) obciążenia rzeczywistego P w postaci siły skupionej oraz obciążenia rozłożonego; b) od sumy wszystkich wykresów jedynkowych (wykres zbiorczy momentów M_i)

$$\sum_{i=1}^n \Delta_{ip} = \frac{468 - 540}{EJ} = -\frac{72}{EJ} \text{ kNm}^3$$

$$\Delta_{sp} = -\frac{1}{EJ} \left[\frac{54 \cdot 1}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) \right] = -\frac{72}{EJ} \text{ kNm}^3$$

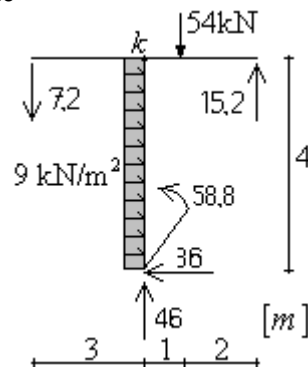
$$-\frac{72}{EJ} = -\frac{72}{EJ} \quad (4.2.2)$$

4.3 Sprawdzenie wartości niewiadomych sił

$$\frac{27}{EJ} \cdot (-7,2) - \frac{18}{EJ} \cdot 15,2 + \frac{468}{EJ} = 0 \rightarrow 0 = 0$$

$$-\frac{18}{EJ} \cdot (-7,2) + \frac{27}{EJ} \cdot 15,2 - \frac{540}{EJ} = 0 \rightarrow 0 = 0 \quad (4.3.1)$$

4.4 Sprawdzenie statyczne



Rys.4.4.1 Rama „zawieszona” na wewnętrznych siłach przypodporowych

a) temperatura

$$\Delta_{it} = \int_S \frac{M_i \cdot \alpha_t \cdot \Delta t}{h} ds + \int_S N_i \cdot \alpha_t \cdot t_o ds \quad (5.0.1)$$

- gdzie oznaczenia: α_t , Δt , t_o takie same jak dla układów statycznie wyznaczalnych

stąd równanie kanoniczne przyjmie postać:

$$\sum_{k=1}^n \delta_{ik} x_k + \Delta_{it} = 0 \quad (5.0.2)$$

b) osiadanie

$$\Delta_{i\Delta} = -\sum_i R_i \cdot \Delta_i - \sum_i M_i \cdot \varphi_i \quad (5.0.3)$$

stąd równanie kanoniczne przyjmie postać:

$$\sum_{k=1}^n \delta_{ik} x_k + \Delta_{i\Delta} = 0 \quad (5.0.4)$$

c) błędy montażu

$$\Delta_{im} = \sum_i B_{im} \cdot b_{im} \quad (5.0.5)$$

- gdzie oznaczenia: B_{im} , b_{im} takie same jak dla układów statycznie wyznaczalnych

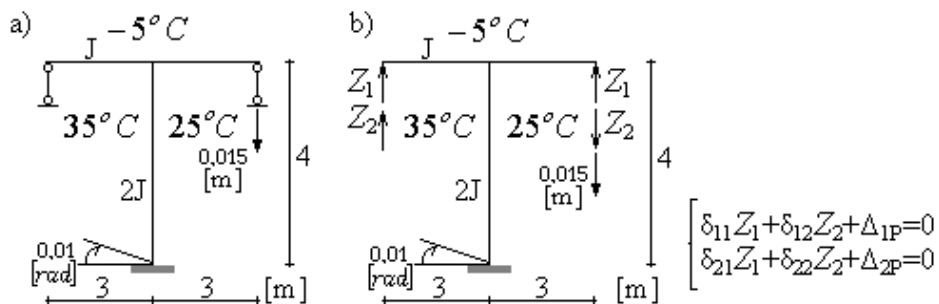
stąd równanie kanoniczne przyjmie postać:

$$\sum_{k=1}^n \delta_{ik} x_k + \Delta_{im} = 0 \quad (5.0.6)$$

6. PRZYKŁAD

Obliczyć siły wewnętrzne w analizowanej ramie, wywołane działaniem temperatury (pominiemy wpływ równomiernego ogrzania) oraz osiadaniem podpór. Dane przedstawione są na rysunku (Rys.6.0.1a.).

Do obliczeń przyjęto inny (lepsz) układ podstawowy wykorzystując symetrię układu oraz grupowanie niewiadomych (Rys.6.0.1b.).



Rys.6.0.1 Dany układ a) rzeczywisty z obciążeniem zewnętrznym; b) inny (lepsz) układ podstawowy z niewiadomymi Z_1 i Z_2 oraz układem równań kanonicznych

W zadaniu przyjęto:

- współczynnik rozszerzalności liniowej równy:

$$\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ C} \quad (6.0.1)$$

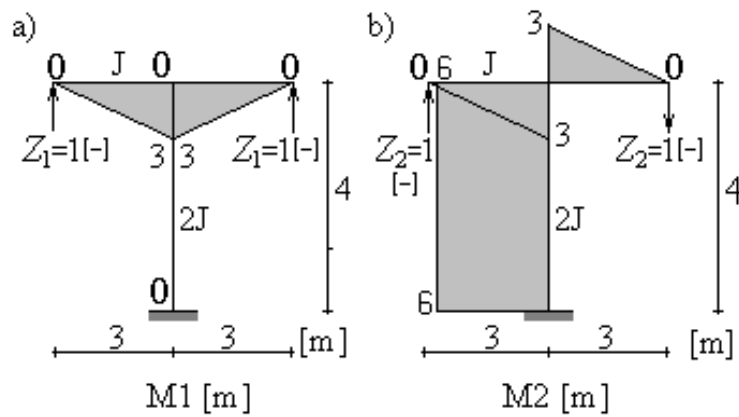
- konstrukcje o przekrojach:

- rygiel ramy I200
- słup ramy 2 I200

o następujących parametrach:

$$E = 206,01 \text{ GPa} = 206,01 \cdot 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}, \quad J_x = 2140 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$E \cdot J = 4408,614 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \quad (6.0.2)$$



Rys.6.0.2 Wykresy momentów zginających w układzie podstawowym pochodzące kolejno od: a) siły jedynkowej przyłożonej w miejsce niewiadomej Z_1 ; b) siły jedynkowej przyłożonej w miejsce niewiadomej Z_2

Obliczenie współczynników:

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{1}{EJ} \left[2 \cdot \left(\frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) \right] = \frac{18}{EJ} m^3 \\ \delta_{22} &= \frac{18}{EJ} + \frac{1}{2EJ} [6 \cdot 4 \cdot 6] = \frac{90}{EJ} m^3 \\ \delta_{12} &= \delta_{21} = 0 m^3\end{aligned}\quad (6.0.3)$$

Układ równań kanonicznych przyjmie więc postać:

$$\begin{aligned}\frac{18 m^3}{EJ} Z_1 + \Delta_{ip} &= 0 \\ \frac{90 m^3}{EJ} Z_2 + \Delta_{ip} &= 0\end{aligned}\quad (6.0.4)$$

6.1 Obciążenie temperaturą

$$\Delta_{1p} = \Delta_{1t} = \frac{1,2 \cdot 10^{-5}}{0,20} \left[\frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 40 + \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 30 \right] = 0,0189 \text{ m}$$

$$\Delta_{2p} = \Delta_{2t} = \frac{1,2 \cdot 10^{-5}}{0,20} \left[\frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 40 - \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 30 + 6 \cdot 4 \cdot 10 \right] = 0,0171 \text{ m}$$

$$E \cdot J \cdot \Delta_{1t} = 0,0189 \cdot 4408,614 = 83,323 \text{ kN} \cdot \text{m}^3$$

$$E \cdot J \cdot \Delta_{2t} = 0,0171 \cdot 4408,614 = 75,387 \text{ kN} \cdot \text{m}^3 \quad (6.1.1)$$

Układ równań kanonicznych przyjmie więc postać:

$$18 Z_1 + 83,323 = 0$$

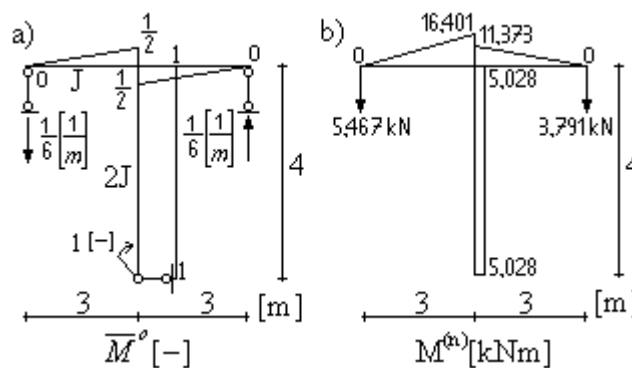
$$90 Z_2 + 75,387 = 0 \quad (6.1.2)$$

Po obliczeniu powyższych równań otrzymano następujące wyniki:

$$Z_1 = -4,629 \text{ kN}$$

$$Z_2 = -0,838 \text{ kN} \quad (6.1.3)$$

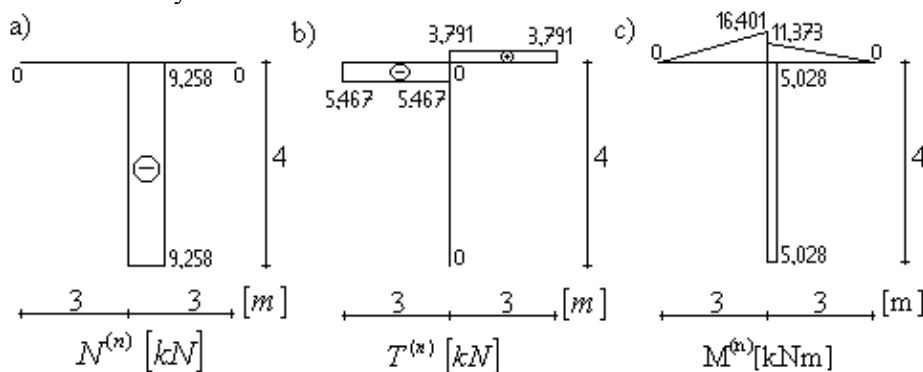
Kontrola kinematyczna



Rys.6.1.1 Wykresy momentów zginających od: a) jedynkowej siły wirtualnej w innym układzie podstawowym; b) obciążenia rzeczywistego w układzie rzeczywistym (statycznie niewyznaczalnym)

$$\begin{aligned} \bar{1} \cdot \delta_\varphi &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\bar{1}}{2} \cdot \left[\frac{1}{EJ} \cdot \frac{2}{3} \cdot 16,401 - \frac{1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 40}{0,20} \right] + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\bar{1}}{2} \cdot \\ &\cdot \left[\frac{-1}{EJ} \cdot \frac{2}{3} \cdot 11,373 + \frac{1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 30}{0,20} \right] + 4 \cdot \bar{1} \cdot \left[\frac{5,028}{2EJ} - \frac{1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 10}{0,20} \right] = \\ &= 0,000001 \approx 0 \text{ rad} \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

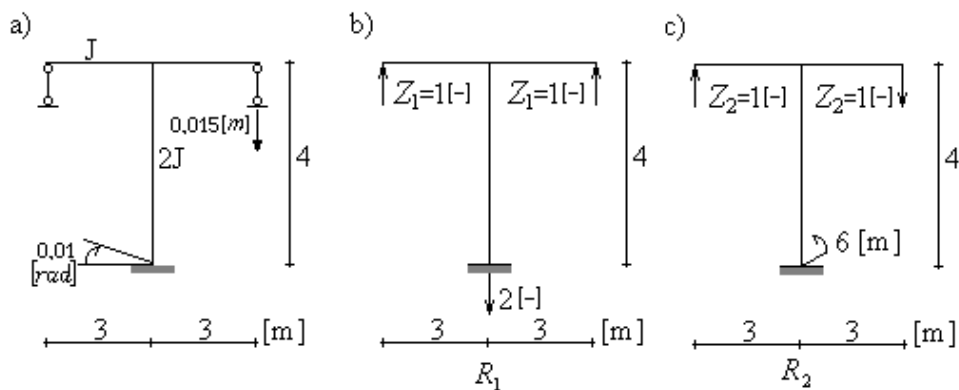
Zestawienie wyników



Rys.6.1.2 Zestawienie wyników: a) wykres rzeczywistych sił normalnych $N^{(n)}$; c) wykres rzeczywistych sił tnących $T^{(n)}$; c) wykres momentów rzeczywistych $M^{(n)}$

Warto zwrócić uwagę, że wykresy momentów zginających odłożone są po stronie zimniejszej, co wynika z istnienia (działania) dodatkowych więzów.

6.2 Obciążenie osiadaniem



Rys.6.2.1 Obciążenie osiadaniem a) układ rzeczywisty; b) reakcje powstałe od siły jedynekowej przyłożonej w miejsce niewiadomej Z_1 ; c) reakcje powstałe od siły jedynekowej przyłożonej w miejsce niewiadomej Z_2

$$\begin{aligned}\Delta_{1p} &= \Delta_{1\Delta} = -[-0,015 \cdot 1] = 0,015 \text{ m} \\ \Delta_{2p} &= \Delta_{2\Delta} = -[0,015 \cdot 1 - 6 \cdot 0,01] = 0,045 \text{ m} \\ E \cdot J \cdot \Delta_{1\Delta} &= 0,015 \cdot 4408,614 = 66,129 \text{ kN} \cdot \text{m}^3 \\ E \cdot J \cdot \Delta_{2\Delta} &= 0,045 \cdot 4408,614 = 198,388 \text{ kN} \cdot \text{m}^3\end{aligned}\quad (6.2.1)$$

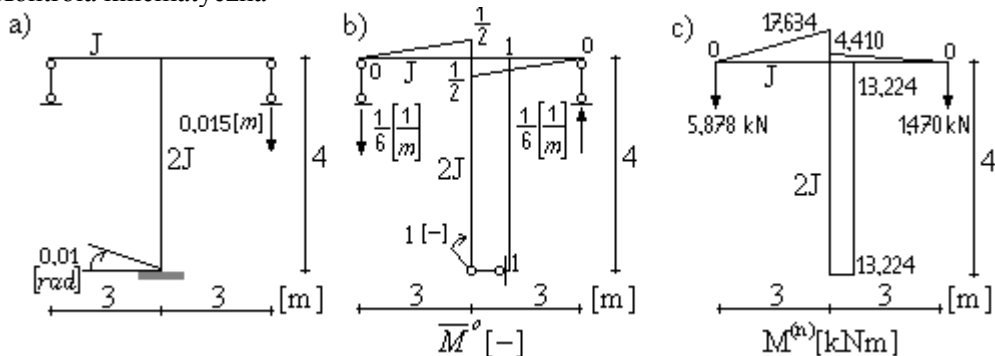
Układ równań kanonicznych przyjmie więc postać:

$$\begin{aligned}18Z_1 + 66,129 &= 0 \\ 90Z_2 + 198,388 &= 0\end{aligned}\quad (6.2.2)$$

Po obliczeniu powyższych równań otrzymano następujące wyniki:

$$\begin{aligned}Z_1 &= -3,674 \text{ kN} \\ Z_2 &= -2,204 \text{ kN}\end{aligned}\quad (6.2.3)$$

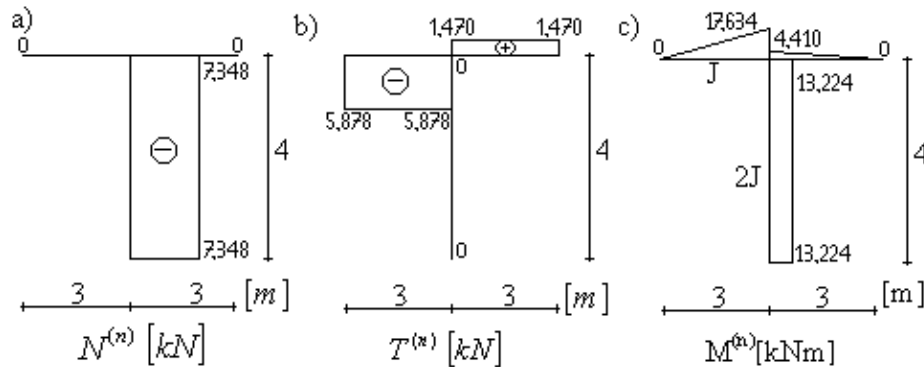
Kontrola kinematyczna



Rys.6.2.2 Kontrola kinematyczna od: a) układ rzeczywisty poddany obciążeniu; b) wykres momentów zginających od jedynkowej siły wirtualnej w innym układzie podstawowym; c) wykres momentów zginających od obciążenia rzeczywistego w układzie rzeczywistym (statycznie niewyznaczalnym)

$$\begin{aligned}\bar{1} \cdot \delta_\varphi &= \frac{1}{EJ} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 17,634 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4,410 \right] + \frac{1}{2EJ} \cdot \\ &\cdot \left[4 \cdot \bar{1} \cdot 13,224 \right] - \left[\bar{1} \cdot 0,01 - \frac{1}{6} \cdot 0,015 \right] = -0,000001 \text{ rad} \approx 0 \text{ rad}\end{aligned}\quad (6.2.4)$$

Zestawienie wyników



Rys.6.2.3 Zestawienie wyników: a) wykres rzeczywistych sił normalnych $N^{(n)}$; b) wykres rzeczywistych sił tnących $T^{(n)}$; c) wykres momentów rzeczywistych $M^{(n)}$

7. PROJEKTOWANIE KONSTRUKCJI METODĄ SIŁ

Zaprojektować konstrukcję tzn. wyliczyć przekroje (np. prętów) w taki sposób by spełnić warunek dopuszczalności.

$$\frac{|M_{eks}|}{W} \leq \sigma_{dop} \quad (7.1.1)$$

Przystępując do projektowania zakładamy pewne przekroje. Po przeprowadzeniu obliczeń okazuje się, że przyjęte przekroje nie spełniają naszych założeń wytrzymałościowych, ekonomicznych bądź innych i zmuszeni jesteśmy je zmienić. Przyjmując w konstrukcji inne przekroje zmuszeni jesteśmy do ponownego rozwiązania układu metodą sił, ponieważ zmiana sztywności prętów pociągnęła za sobą zmianę macierzy podatności (δ_{ik}) oraz wektora wyrazów wolnych (Δ_{ip}) w równaniach kanonicznych. Po dokonaniu obliczeń ponownie sprawdzam, czy przyjęte do obliczeń przekroje prętów w drugim etapie spełniają narzucone kryteria. Jeżeli nie, to dokonujemy ponownej zmiany przekrojów prętów i powtarzamy obliczenia.

Reasumując konstrukcję statycznie niewyznaczalną projektujemy metodą kolejnych przybliżeń.