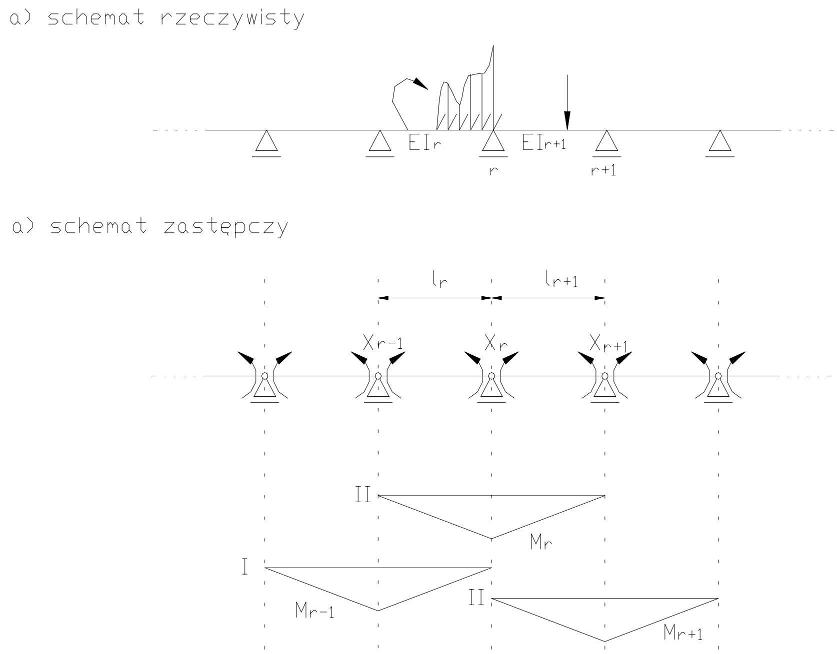
Olga Kopacz, Adam Łodygowski, Wojciech Pawłowski,
Michał Płotkowiak, Krzysztof Tymper
Konsultacje naukowe: prof. dr hab. JERZY RAKOWSKI
Poznań 2002/2003

MECHANIKA BUDOWLI 10
ROZWIĄZYWANIE BELEK WIELOPRZĘSŁOWYCH STSTYCZNIE NIEWYZNACZALNYCH.

1.1. Metoda trzech momentów.

Do rozwiązywania wieloprzęsłowych belek statycznie niewyznaczalnych stosowana jest szczególna postać metody sił, zwana metodą trzech momentów.

Rozważmy dowolnie obciążoną wieloprzęsłową belkę statycznie niewyznaczalną (rys.1.1a). Schemat zastępczy (podstawowy) statycznie wyznaczalny może być w tej metodzie przyjęty dowolnie, wprowadzając przeguby w miejscu podpór



Rys.1.1

i przyjmując niewiadome w postaci momentów podporowych (rys.1.1b) Wówczas otrzymamy macierz podatności w postaci pasmowej!!!

Rozważmy następnie dwa sąsiednie, dowolnie wybrane przęsła belki (r)
oraz (r-1). Dla przegubu r warunek geometryczny należy zapisać jako wzajemny kąt obrotu równy zeru:

$$\boxed{\Delta_r = \Delta_r^l + \Delta_r^p = \Delta_r^{(r-1,r)} + \Delta_r^{(r,r+1)} = 0} \tag{1.1}$$

gdzie:

Δ_r^l – to kąt obrotu przekroju belki jednoprzęsłowej r obciążonej na podporach momentami X_{r-1}, X_r oraz obciążeniem zewnętrznym,

Δ_r^p – to kąt obrotu przekroju belki jednoprzęsłowej $r+1$ obciążonej na podporach momentami X_r, X_{r+1} oraz obciążeniem zewnętrznym.

Wprowadźmy równanie kanoniczne dla $r-tego$ punktu:

$$\boxed{\delta_{r-1,r} X_{r-1} + \delta_{rr} X_r + \delta_{r+1,r} X_{r+1} + \ldots + \Delta_{rp} = 0} \tag{1.2}$$

gdzie (patrz rys.1.1b):

$$\delta_{r-1,r} = \int \frac{M_{r-1} \cdot M_r}{EI} ds = \frac{1}{EI_r} \cdot \frac{1}{2} \cdot l_r \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{l_r}{6EI_r}$$

$$\delta_{r,r} = \int \frac{M_r \cdot M_r}{EI} ds = \frac{1}{EI_r} \cdot \frac{1}{2} \cdot l_r \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{EI_{r+1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot l_{r+1} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{l_r}{EI_r} + \frac{l_{r+1}}{EI_{r+1}} \right) \tag{1.3}$$

$$\delta_{r+1,r} = \int \frac{M_{r+1} \cdot M_r}{EI} ds = \frac{1}{EI_{r+1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot l_{r+1} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{l_{r+1}}{6EI_{r+1}}$$

$$\delta_{r-1,r+1} = \int \frac{M_{r-1} \cdot M_{r+1}}{EI} ds = 0$$

Podstawiając do równania (1.2) wyznaczone wartości (1.3) otrzymujemy:

$$\frac{l_r}{EI_r} X_{r-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{l_r}{EI_r} + \frac{l_{r+1}}{EI_{r+1}} \right) X_r + \frac{l_{r+1}}{EI_{r+1}} X_{r+1} + \ldots + \Delta_{rp} = 0 \tag{1.3}$$

a po uporządkowaniu równanie, zwane **równaniem trzech momentów**, przyjmuje postać:

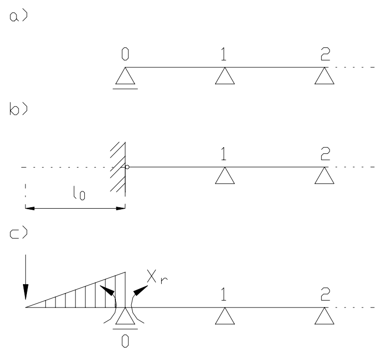
$$\boxed{l'_r X_{r-1} + 2 \cdot X_r \left(l'_r + l'_{r+1}\right) + X_{r+1} \cdot l'_{r+1} + \ldots + 6EI_0 \Delta_{rp} = 0} \qquad (1.4)$$

przy czym:

$l'_r = l_r \cdot \dfrac{EI_0}{EI_r}$ a , EI_0-sztywność porównawcza

A co z warunkami brzegowymi?

Załóżmy, że nasza belka jest belką podpartą z lewej strony (rys.1.2a).



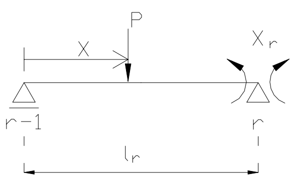
Rys. 1.2

Moment w punkcie "0" równy jest zeru! mamy zatem już warunek brzegowy!(x_0=0!). Gdyby zaś nasza belka była z jednej strony utwierdzona (rys.1.2b) należałoby ją rozszerzyć o jedno przęsło, i w celu wyznaczenia warunków brzegowych założyć że: $l_0 = 0$. Jeżeli zaś znamy obciążenie jakie występuje po zewnętrznej stronie przęsła jak na rysunku (rys.1.2c), możemy wyznaczyć wykres momentów co umożliwia nam wyznaczenie X_0 i rozpisanie równania dla dwóch sąsiednich przęseł z czego otrzymamy szukane warunki brzegowe.

1.2. Linie wpływu dla belek wieloprzęsłowych.

Wyznaczając w układach statycznie niewyznaczalnych linie wpływu wielkości statycznych, klasyczną metodą sił, wyznacza się najpierw linie wpływu nadliczbowych, co w dalszej kolejności umożliwi nam wyznaczenie linii wszystkich innych wielkości.

Wróćmy do naszego przykładu. Przypuśćmy, że po naszej belce porusza się poziomo siła P (rys.1.3). Ponieważ belka jest statycznie niewyznaczalna, na nic zdadzą się próby rozwiązania jej, przy pomocy równań równowagi. W takim przypadku należałoby rozwiązać układ równań liniowych (1.4), co pozwoli nam na wyznaczenie wielkości X_r. Jeżeli mamy: $[A]\cdot[X]=[P]$ to w celu wyznaczenia linii wpływu

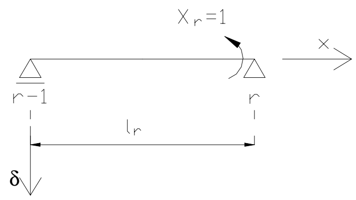


Rys.1.3

wystarczy macierz $[P]$ pomnożyć przez macierz podatności odwróconą:

$[X]=[P]\cdot[A]^{-1}$

Zastanówmy się teraz jak określić Δ_{rp} gdy mamy do czynienia z ruchomym obciążeniem. Spójrzmy na rysunek obok (rys.1.3). Z naszej belki wycięliśmy jedno przęsło (r-1,r) po którym jeździ siła P (teraz już w układzie lokalnym!) Oczywiście efektem jej działania jest wystąpienie sił wewnętrznych (momentów, tnących...) Spójrz na rysunek 1.1. Stosując tw. Maxwella wiemy, że $\Delta_{rp}=\Delta_{pr}$, czyli jest to ugięcie belki wywołane działaniem jednostkowego momentu przyłożonego do podpory „ r ”. Ugięcie to jest niezerowe tylko dla dwóch przęseł (r-1,r) i (r,r+1) p wspólnym węźle „ r ”.



Rys.1.4

Wyznaczamy linię ugięcia od zadanego momentu. Mamy zatem:

$$EI\cdot\frac{d^2\delta(x)}{dx^2}=-M(x) \tag{1.6}$$

u nas:

$$M(x)=\frac{1}{l_r}\cdot x$$

po podstawieniu i dwukrotnym scałkowaniu otrzymujemy:

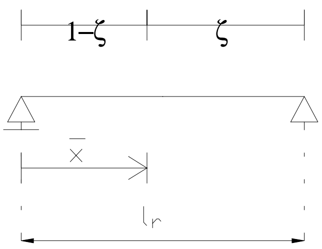
$$EI\cdot\frac{d^2\delta(x)}{dx^2}=-\frac{1}{l_r}\cdot x \xrightarrow{cakujemy} EI\cdot\frac{d\delta(x)}{dx}=-\frac{x^2}{2\cdot l_r}+C \xrightarrow{cakujemy}$$

$$EI\cdot\delta(x)=-\frac{x^3}{6\cdot l_r}+C\cdot x+D$$

z warunków brzegowych: $\delta(x=0)=0$ i $\delta(x=l_r)=0$ możemy wyznaczyć szukane D,C. Linia ugięcia od założonego przez nas momentu jedynkowego równa jest szukanej wartości $\Delta_{r,P}$ i wynosi:

$$\delta(x)=-\frac{l^2}{6EI_r}\left(\xi-\xi^3\right) \text{ gdzie: } \xi=\frac{x}{l_r} \tag{1.7}$$

Wiemy też, że: $\Delta_{r-1,P} \neq 0$ i $\Delta_{r-1,P} = \Delta_{P,r-1}$ ($\Delta_{P,r-1}$ – to przemieszczenie pionowe pod siłą P wywołane działaniem momentu skupionego X_{r-1}). Jeżeli więc, do równania wyżej (1.7) zgodnie z rysunkiem (rys.1.5) za ξ podstawimy $1-\xi$ to otrzymamy gotowe rozwiązanie:



Rys.1.5

$$\delta(x) = \frac{l^2}{6EI_r}\left(\xi^3 - 3\xi^2 + 2\xi\right) \qquad (1.8)$$

Wprowadźmy pewną funkcje $\omega(\xi) = \xi - \xi^3 \Rightarrow$. $\overline{\omega}(\xi) = \xi - 3\xi^2 + 2\xi$,po podstawieniu mamy:

$$6EI_0 = \frac{l_r^{\,2}}{6EI_r} \cdot \omega(\xi) \Rightarrow l_r \cdot l_r^{\,\prime} \cdot \omega(\xi)$$

W układzie równań kanonicznych, w przypadku, gdy wędrująca siła porusza się w obrębie przęsła (r-1,r) tylko dwa równania mają niezerowe prawe strony, a mianowicie:

$$\boxed{l'_m X_{m-1} + 2 \cdot X_m\left(l'_m + l'_{m+1}\right) + X_{m+1} \cdot l'_{m+1} = C_{mp}} \qquad (1.9)$$

dla $m = r-1$ $\qquad C_{r-1,p} = -l_r \cdot l'_r \cdot \overline{\omega}(\xi)$ oraz

dla $m = r$ $\qquad C_{r,p} = -l_r \cdot l'_r \cdot \omega(\xi)$

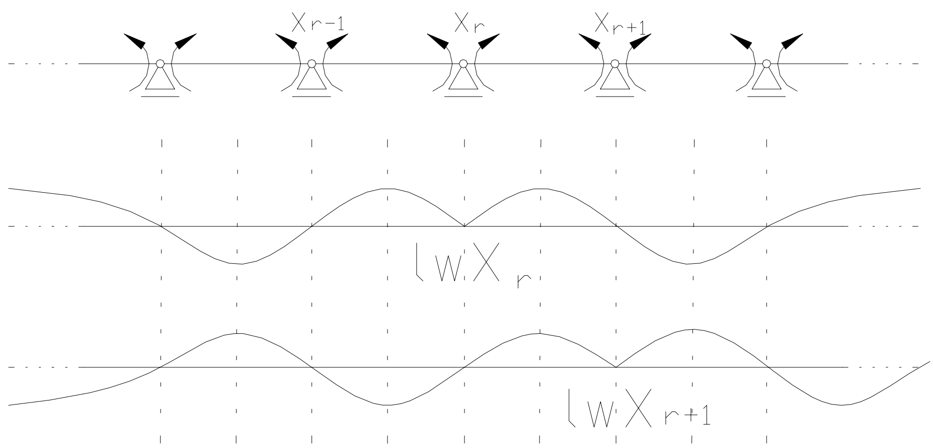
Rozwiązując otrzymany układ równań względem niewiadomych $X_1, X_2, ..., X_n$ otrzymamy:

$$X_k(\xi) = \beta_{k1} \cdot C_{1P} + \beta_{k2} \cdot C_{2P} + ... + \beta_{kk} \cdot C_{kP} + ... + \beta_{k,r-1} \cdot C_{r-1,P} + \beta_{kr} \cdot C_{rP} + \beta_{k,r+1} \cdot C_{r+1,P} + ... + ... \qquad (1.10)$$

przy czym, współczynniki β_{kj} są wyrazami macierzy odwrotnej dla układu równań (1,9), tzn. są to elementy macierzy odwrotnej, w stosunku do macierzy podatności, i:

$C_{r-1,P}(\xi) = -l_r \cdot l_r^{\,\prime}\,\overline{\omega}(\xi), C_{r,P}(\xi) = -l_r \cdot l_r^{\,\prime}\,\omega(\xi)$ (dla obciążenia siłą skupioną P=1).

Rysunek poniżej pokazuje nam linie wpływu nadliczbowych (rys.1.6).



Rys.1.6