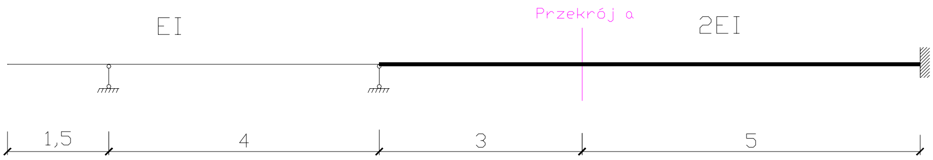
Olga Kopacz, Adam Łodygowski, Wojciech Pawłowski,
Michał Płotkowiak, Krzysztof Tymper
Konsultacje naukowe: prof. dr hab. JERZY RAKOWSKI
Poznań 2002/2003

MECHANIKA BUDOWLI 11

Przykład liczbowy:

Dana belka, po której porusza się siła jedynkowa P:



Celem zadania jest obliczenie linii wpływu M_α, T_α, R_2

Kluczowe dla takiego przykładu jest twierdzenie Maxwella (wykład nr 7).

$$\delta_{1P}(x) = \delta_{P1}(x)$$

$$\delta_{2P}(x) = \delta_{P2}(x)$$

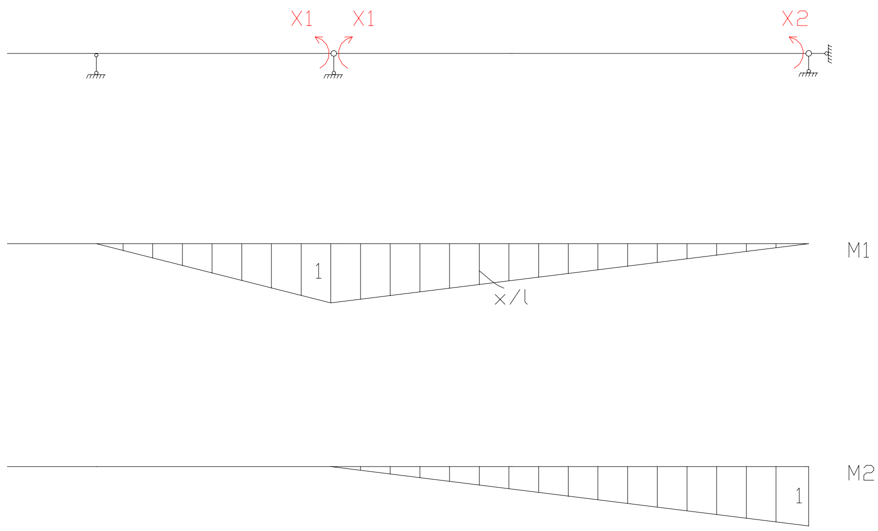
Zamiast obliczać przemieszczenie w danym punkcie od poruszającej się siły P, obliczamy przemieszczenia wszystkich punktów nad którymi stanie siła P od założonej siły jedynkowej; jest to równoważne z obliczeniem linii ugięcia od tej siły.

Dobieram odpowiedni schemat podstawowy, dla którego zapisuję układ równań kanonicznych:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{1P}(x) = 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{2P}(x) = 0 \end{cases}$$

Należy zwrócić uwagę, że obciążenie zewnętrzne jest jedynkowe dlatego zgodnie z konwencją znakowania piszemy δ a nie Δ.

Sporządzamy wykresy od stanu X_1 i X_2 i obliczamy δ_{ij}:

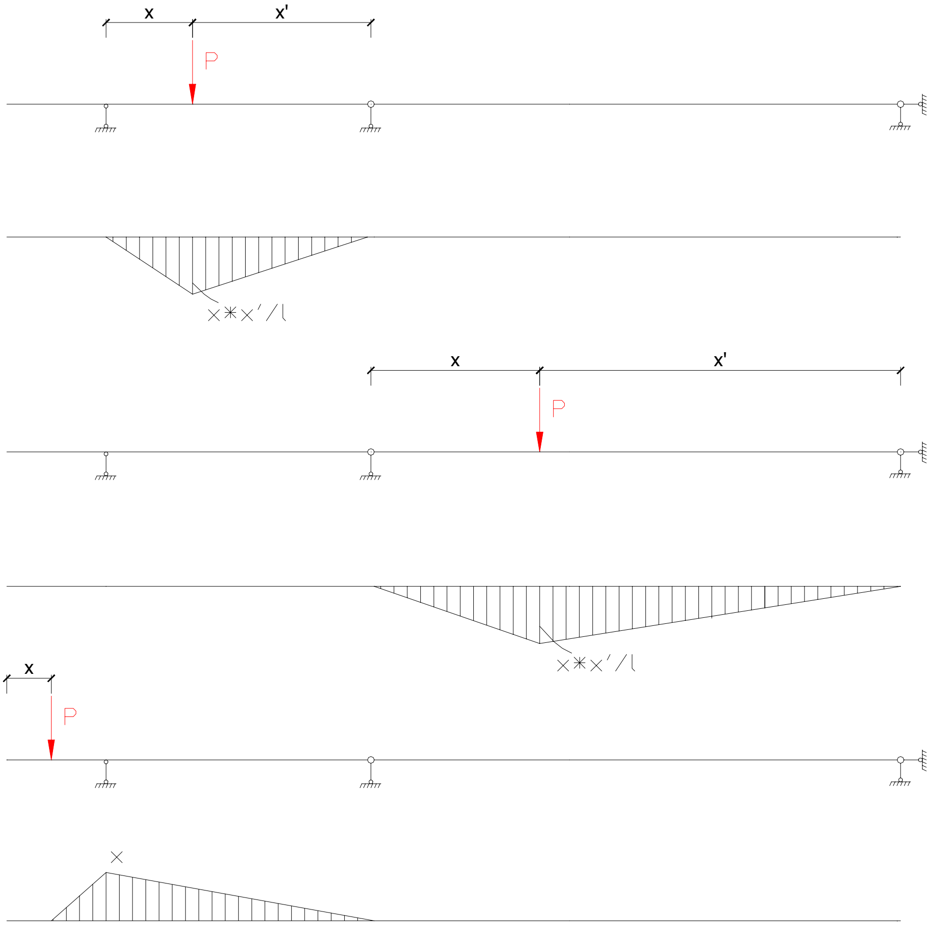


$$EI_0\delta_{11} = \left(\frac{1}{2}\cdot 4{,}0\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot 8{,}0\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\right)=\ldots=2{,}667$$

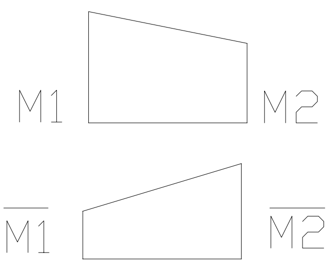
$$EI_0\delta_{22} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot 8{,}0\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\right)=\ldots=1{,}334$$

$$EI_0\delta_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot 8{,}0\cdot 1\cdot\frac{1}{3}\right)=\ldots=0{,}667$$

Sporządzamy wykresy od przemieszczającej się siły jedynkowej, a mając już wykresy od sił X_1 i X_2 obliczamy δ_{iP}:

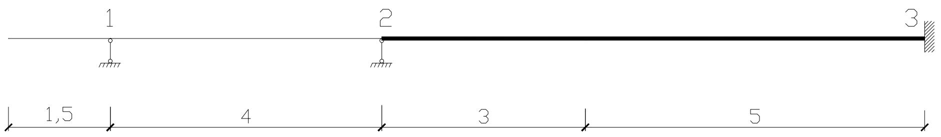


Ciekawostka: MNOŻENIE PRZEZ SIEBIE 2 TRAPEZÓW



$$\frac{l}{6}\cdot\left(2\cdot M_1\cdot\overline{M_1}+2\cdot M_2\cdot\overline{M_2}+M_1\cdot\overline{M_2}+M_2\cdot\overline{M_1}\right)$$

Korzystając z powyższego wzoru i narysowanych wykresów można obliczyć δ_{iP}. Najwygodniej podzielić belkę na kolejne części i dla poszczególnych fragmentów obliczać Δ, a wyniki umieszczać w tabelce:



Obliczenia δ_{1P} dla przęsła 1-2 $x \in \langle 0,4 \rangle$ więc $l = 4,0$

$$\Delta_{1P} = \int_0^l \frac{M_P{}^0 \cdot M_1}{EI} ds$$

$$EI_0 \delta_{1P}(x) = \frac{1}{2} x \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{x \cdot x'}{l} + \frac{x'}{6} \cdot \left(2 \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{x \cdot x'}{l} + 1 \cdot \frac{x \cdot x'}{l} \right)$$

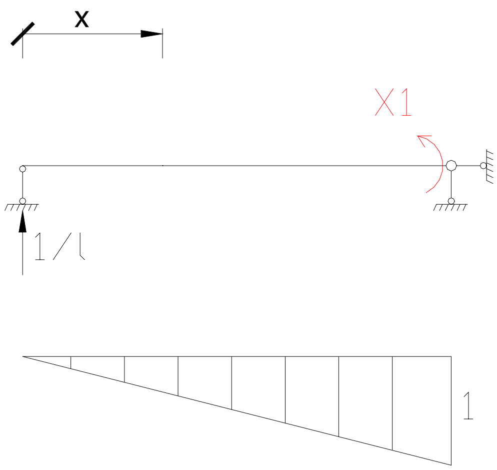
$$EI_0 \delta_{1P}(x) = \frac{1}{2} x \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{x \cdot (l - x)}{l} + \frac{l - x}{6} \cdot \left(2 \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{x \cdot (l - x)}{l} + 1 \cdot \frac{x \cdot (l - x)}{l} \right)$$

$$EI_0 \delta_{1P}(x) = \frac{1}{6} l^2 \left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right] \quad \xi = \frac{x}{l} \quad \varpi(\xi) = \xi - \xi^3$$

$$EI_0 \delta_{1P}(x) = \frac{1}{6} l^2 (\varpi(\xi))$$

Lp	ζ	$\varpi(\xi)$	x	$EI_0 \delta_{1P}(x) = \frac{1}{6} l^2 (\varpi(\xi))$
1	1/8	0,12305	0,5	0,328
2	2/8	0,234	1,0	...
3	3/8	...	1,5	...
4	4/8	...	2,0	...
5	5/8	...	2,5	...
6	6/8	...	3,0	...
7	7/8	...	3,5	...
8	8/8	...	4,0	...

Inny sposób obliczenia δ_{iP} poprzez całkowanie równań linii ugięcia belki:
Podobnie jak wyżej obliczenia δ_{1P} dla przęsła 1-2 $x \in \langle 0,4 \rangle$ więc $l = 4,0$



$$-EI_0 \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x)$$

$$-EI_0 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x}{l}$$

$$-EI_0 \frac{dy}{dx} = C + \frac{x^2}{2l}$$

$$-EI_0 y = D + Cx + \frac{x^3}{6l}$$

Warunki brzegowe: $D = 0$, $C = -\frac{l}{6}$

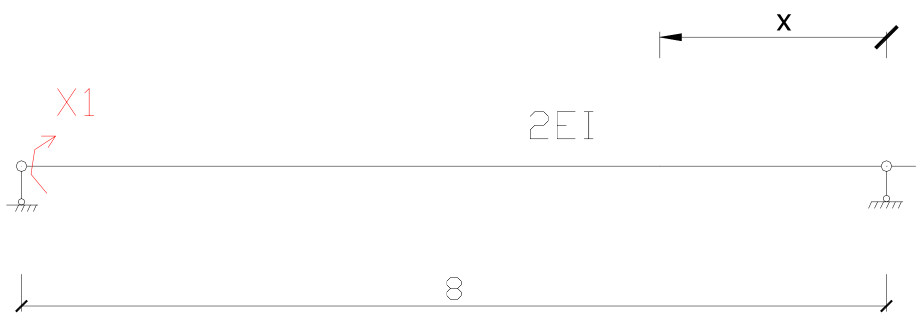
Ostatecznie:

$$EI_0 y = \frac{1}{6} l^2 \left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]$$

Metr długości belki	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5
x	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$EI_0 \delta_{1P}(x) = \frac{1}{6} l^2 (\varpi(\xi))$	0,328	...	...	...	...	...	...	...

Obliczenia δ_{1P} dla przęsła 2-3 $x \in \langle 4{,}12 \rangle$ więc $l = 8{,}0$

Całą procedurę liczenia można powtórzyć, ale można również wykorzystać symetrię, dzięki której będzie można wykorzystać wzór z przęsła 1-2 z uwzględnieniem, że **początek układu przyjmiemy od lewej strony**:



Należy zwrócić baczną uwagę, że jest to fragment belki o sztywności: **2EI$_0$**

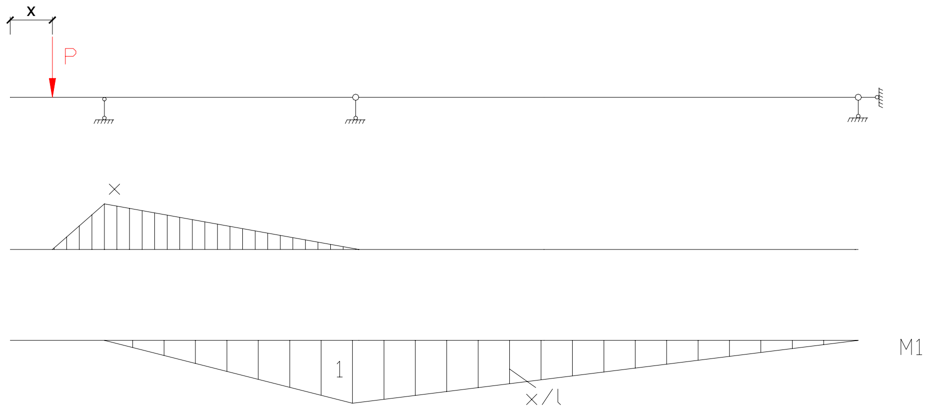
$$EI_0\delta_{1P}(x) = \frac{1}{2\cdot 6} l^2 \left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right] \qquad \xi = \frac{x}{l} \quad \varpi(\xi) = \xi - \xi^3$$

$$EI_0\delta_{1P}(x) = \frac{1}{2\cdot 6} l^2 (\varpi(\xi))$$

Metr długości belki	12,0	11,0	10,0	9,0	8,0	7,0	6,0	5,0	4,0
x	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0
$EI_0\delta_{1P}(x) = \frac{1}{6} l^2 (\varpi(\xi))$	0	0,656	...	...	...	...	...	...	...

Wartości l są obrócone ze względu na przyjęcie układu z drugiej strony.

Obliczenia δ_{1P} dla wspornika $x \in \langle -1.5;0 \rangle$ więc $l = 1,5$



$$EI_0\delta_{1P}(x) = \frac{1}{2}x \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot 1\right)$$

$$EI_0\delta_{1P}(x) = -0,6667 \cdot x$$

Metr długości belki	0	0,5	1,0	1,5
x	-1,5	-1,0	-0,5	0
$EI_0\delta_{1P}(x) = \frac{1}{6}l^2(\varpi(\xi))$	0,328	...	...	0

Obliczenia δ_{2P}. Od obciążenia X_2 linia ugięcia będzie występować dla $x \in \langle 4;12 \rangle$ a w pozostałej części będzie wynosiła 0, wystarczy napisać równanie tylko dla przęsła 2-3:

$$2EI_0\delta_{2P}(x) = \frac{1}{6}l^2\left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^3\right] \qquad \xi = \frac{x}{l} \quad \varpi(\xi) = \xi - \xi^3$$

$$EI_0\delta_{1P}(x) = \frac{1}{2 \cdot 6}l^2(\varpi(\xi)) = 5,333 \cdot \varpi(\xi)$$

Metr długości belki	0	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5	12,5	13,5
x	1,5	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0
$EI_0\delta_{1P}(x) = \frac{1}{6}l^2(\varpi(\xi))$	0	0	0,656	...	...	...	...	...	...	0

Mając obliczone wszystkie współczynniki można rozwiązać układ równań kanonicznych:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{1P}(x) = 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{2P}(x) = 0 \end{cases}$$

$$X_1 = -0{,}42863 \cdot EI_0 \cdot \delta_{P1}(x) + 0{,}21433 \cdot EI_0 \cdot \delta_{P2}(x)$$

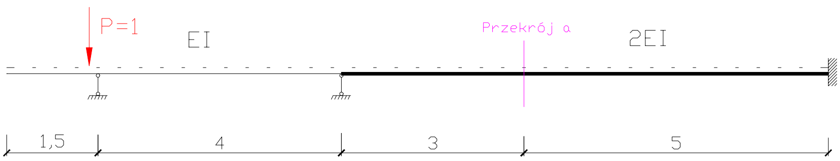
$$X_2 = -0{,}42863 \cdot EI_0 \cdot \delta_{P1}(x) + 0{,}21433 \cdot EI_0 \cdot \delta_{P2}(x)$$

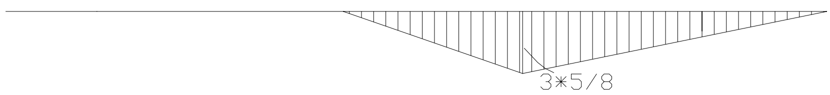
Obliczenie linii wpływu M_α, T_α, R_2:

$$Lw\,M_\alpha = Lw\,M_\alpha{}^0 + M_\alpha{}^{x_1=1} Lw\,X_1 + M_\alpha{}^{x_2=1} Lw\,X_2$$

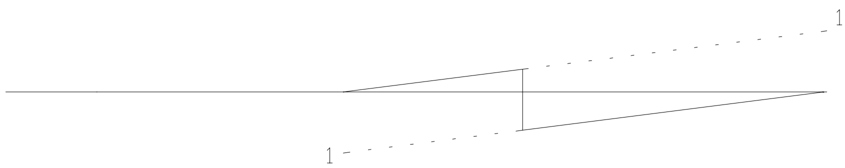
$$Lw\,T_\alpha = Lw\,T_\alpha{}^0 + T_\alpha{}^{x_1=1} Lw\,X_1 + T_\alpha{}^{x_2=1} Lw\,X_2$$

$$Lw\,R_2 = Lw\,R_2{}^0 + R_2{}^{x_1=1} Lw\,X_1 + R_2{}^{x_2=1} Lw\,X_2$$

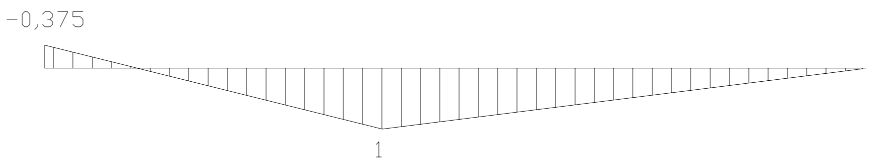




Lw M_α

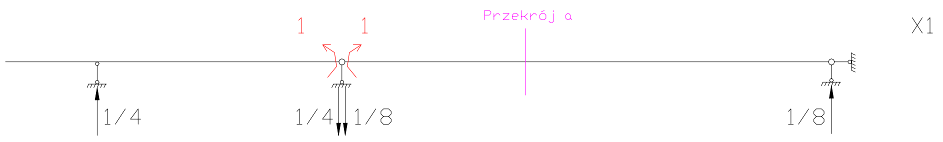


Lw T_α



Lw $R_2{}^0$

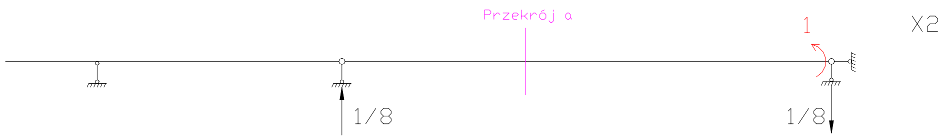
Obliczenie M_α, T_α, R_2 od X_1 i X_2:



$$M_\alpha^{x_1=1} = \frac{1}{8}\cdot 5 = 0{,}625$$

$$T_\alpha^{x_1=1} = -\frac{1}{8} = -0{,}125$$

$$R_2^{x_1=1} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{8} = -0{,}375$$



$$M_\alpha^{x_1=1} = \frac{1}{8}\cdot 3 = 0{,}375$$

$$T_\alpha^{x_1=1} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

$$R_2^{x_1=1} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

Wynik końcowy

$$Lw\,M_\alpha = Lw\,M_\alpha^{\;0} + 0{,}625\cdot Lw\,X_1 + 0{,}375\cdot Lw\,X_2$$

$$Lw\,T_\alpha = Lw\,T_\alpha^{\;0} + -0{,}125\cdot Lw\,X_1 + 0{,}125\cdot Lw\,X_2$$

$$Lw\,R_2 = Lw\,R_2^{\;0} - 0{,}375\cdot Lw\,X_1 + 0{,}125\cdot Lw\,X_2$$

x	EI_0 $\delta_{P1}(x)$	EI_0 $\delta_{P2}(x)$	Lw X_1	Lw X_2	Lw M_α^0	Lw T_α^0	Lw R_2^0	Lw M_α	Lw T_α	Lw R_α
-1,5	-1,000	0	0,42863	-0,21433	0	0	-0,375	0,1875	-0,0804	-0,5625
-1,0	-0,6667	0	0,28577	-0,14289	0	0	-0,25	0,125	-0,0536	-0,375
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,5	0,32813	0	-0,14065	0,07033	0	0	0,125	-0,0615	0,0264	0,1865
1,0	0,62501	0	-0,26790	0,13396	0	0	0,25	-0,1172	0,0502	0,3672
1,5	0,85939	0	-0,36836	0,18419	0	0	0,375	-0,1612	0,0691	0,5362
2,0	1,00	0	-0,42863	0,21433	0	0	0,5	-0,1875	0,0804	0,6875
2,5	1,01563	0	-0,43533	0,21768	0	0	0,625	-0,1905	0,0816	0,8155
3,0	0,87501	0	-0,37506	0,18754	0	0	0,75	-0,1641	0,0703	0,9141
3,5	0,54688	0	-0,23441	0,11721	0	0	0,875	-0,1026	0,0440	0,9776
4,0	0	0	0	0	0	0	1,0	0	0	1,0000
5,0	1,09376	0,65627	-0,32816	-0,32819	0,625	-0,125	0,875	002968	-0,125	0,9570
6,0	1,75	1,25	-0,48219	-0,69655	1,25	-0,25	0,75	0,6874	-0,2768	0,8438
7,0	2,03125	1,71877	-0,50227	-0,03814	1,875	-0,375 0,625	0,625	1,1718	-0,4420 0,5580	0,6836
8,0	2,00	2,00	-0,4286	-1,18594	1,50	0,5	0,5	0,7499	0,3928	0,5000
9,0	1,71877	2,03125	-0,30136	-1,37301	1,125	0,375	0,375	0,4218	0,2410	0,3164
10,0	1,25	1,75	-0,16071	-1,23236	0,75	0,25	0,25	0,1874	0,1160	0,1562
11,0	0,65627	1,09376	-0,04687	-0,79702	0,375	0,125	0,125	0,0468	0,0312	0,0429
12,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Wszystkie brakujące wyniki w tabelkach obliczeniowych znajdują się w powyższej tabeli końcowej.