

Olga Kopacz, Adam Łodygowski, Wojciech Pawłowski,
Michał Płotkowiak, Krzysztof Tymper
Konsultacje naukowe: prof. dr hab. JERZY RAKOWSKI
Poznań 2002/2003

MECHANIKA BUDOWLI 7

TWIERDZENIA O WZAJEMNOŚCIACH

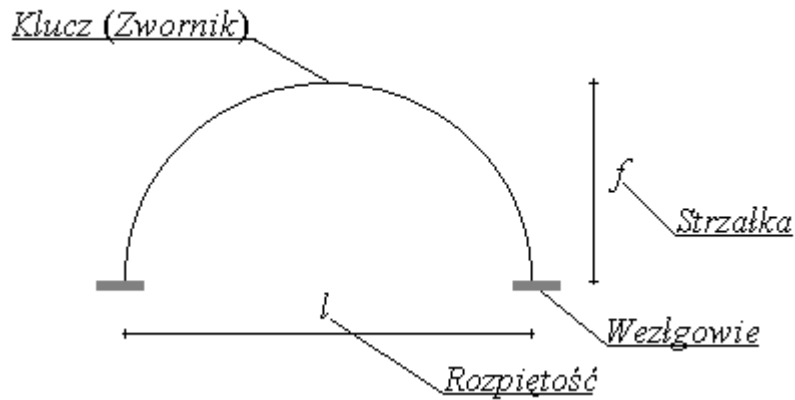
ŁUKI STATYCZNIE NIEWYZNACZALNE

Głównym powodem dla którego łuki statycznie niewyznaczalne wyróżnione są oddzielnym wykładem, jest wpływ (w ogólności) wszystkich ich sił wewnętrznych (momentów ale także sił normalnych i tnących) na przemieszczenia, skutkiem czego nie można ich pominąć przy liczeniu współczynników w metodzie sił. Następnym powodem dla którego poświęciliśmy im dodatkową uwagę, są trudności związane właśnie z liczeniem tych sił wewnętrznych. Reasumując w poniższym wykładzie omówimy ogólne założenia, tok postępowania oraz sposoby liczenia łuków statycznie niewyznaczalnych.

Słowa kluczowe: łuk statycznie niewyznaczalny, metody całkowania krzywych;

1. DEFINICJA I PODZIAŁ ŁUKÓW

Łuk to pręt zakrzywiony w pewnej płaszczyźnie, pracujący zarówno na zginanie, ścinanie jak i ściskanie. Jego poszczególne części składowe nazwane są następująco:



Rys.1.0.1. Części składowe łuku

Ze względu na krzywiznę łuki można podzielić m. in. na:

- kołowe
- paraboliczne
- sinusoidalne

Ze względu na konstrukcję podpór można je podzielić następująco:

- jednoprzegubowe
- dwuprzegubowe
- trójprzegubowe
- bezprzegubowe (utwierdzone)

Ze względu na przekrój:

- o stałym przekroju
- o zmiennym przekroju (o konstrukcji optymalnej)

Ze względu na materiał:

- drewniane
- stalowe
- żelbetowe

Mogą być również łuki o konstrukcji mieszanej:

- ze ściągiem
- z zakratowaniem

2. ZASADA PRACY ŁUKU

W pracy łuku decydującą rolę najczęściej odgrywają siły normalne. Z tego też powodu w wielu przypadkach nie wolno pominąć ich wpływu na przemieszczenia układu. Wpływ sił normalnych na układ jest tym większy im mniejszą łuk ma wysokość (analogia do kratownicy Misesa). Dla łuków płaskich, o wysokim przekroju lub krótkich, nie wolno pominąć również wpływu siły tnącej (analogia do belki Timoshenko). Poniższa tabela przedstawia ogólne warunki, na podstawie których pomijamy bądź uwzględniamy wpływ odpowiednich sił wewnętrznych na przemieszczenia.

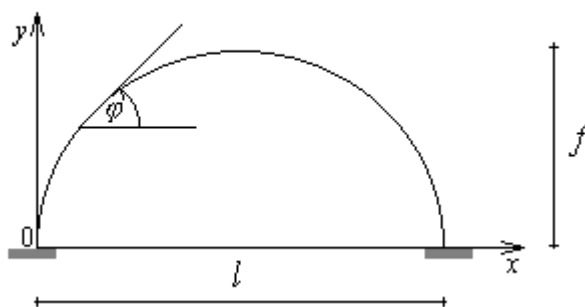
Tab.2.0.1 Wpływ odpowiednich sił wewnętrznych na przemieszczenia w zależności od wymiarów łuku gdzie: h – wysokość przekroju, l – rozpiętość łuku, f – strzałka łuku

Łuk płaski $f < \frac{l}{5}$	$\frac{h}{l} > \frac{1}{10}$	M,N,T
	$\frac{1}{30} < \frac{h}{l} \leq \frac{1}{10}$	M,N
	$\frac{h}{l} \leq \frac{1}{30}$	M
Łuk wyniosły $f \geq \frac{l}{5}$	$\frac{h}{l} < \frac{1}{10}$	M

Na zakończenie warto zauważyć, że przy spełnieniu powyższych warunków (tab.2.0.1), pominięcie sił normalnych podczas obliczania przemieszczeń ma dużo większy wpływ na ostateczny wynik niż w innych układach prętowych. (Błąd może nawet przekroczyć 10 %.)

3. OPIS MATEMATYCZNY ŁUKÓW

3.1. Łuki paraboliczne



Rys.3.1.1. Parametry potrzebne do opisu łuku parabolicznego

Równanie osi łuku jest postaci następującej:

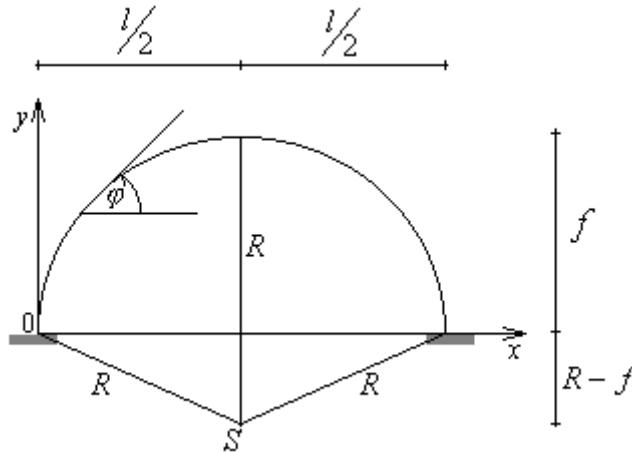
$$y = \frac{4f}{l^2} \cdot x(l - x) \quad (3.1.1)$$

Stąd kąt nachylenia stycznej do krzywej w danym punkcie jest równy:

$$y' = \operatorname{tg} \varphi = \frac{4f}{l^2} \cdot (l - 2x)$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \left[\frac{4f}{l^2} \cdot (l - 2x) \right] \quad (3.1.2)$$

3.2. Łuki kołowe



Rys.3.2.1. Parametry potrzebne do opisu łuku kołowego

Równanie osi łuku jest postaci następującej:

$$y = f - R + \sqrt{R^2 - \left(x - \frac{l}{2}\right)^2} \quad (3.2.1)$$

Stąd kąt nachylenia stycznej do krzywej w danym punkcie jest równy:

$$y' = \operatorname{tg} \varphi = \frac{l - 2x}{2\sqrt{R^2 - \left(x - \frac{l}{2}\right)^2}}$$

$$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{l - 2x}{2\sqrt{R^2 - \left(x - \frac{l}{2}\right)^2}} \right] \quad (3.2.2)$$

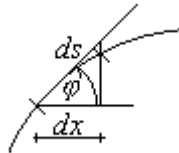
Promień znajdujemy korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$R^2 = (R - f)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f} \quad (3.2.3)$$

4. SPOSOBY CAŁKOWANIA FUNKCJI SIŁ WEWNĘTRZNYCH

Generalnie rzecz biorąc całkując wykresy w celu wyliczenia przemieszczeń, nie możemy skorzystać z twierdzenia Mohra-Wiereschagina, z faktu nieprostoliniowości tych wykresów (obydwa są krzywoliniowe). Należy więc dokonać tego całkowania w sposób tradycyjny lub skorzystać z innych sposobów ułatwiających to całkowanie. Poniżej znajdują się różne sposoby radzenia sobie z tym problemem.



Rys.4.0.1. Zależności między różniczką łuku a różniczką długości

4.1. Metoda matematyczna

W ogólnym przypadku, w prostokątnym układzie współrzędnych należy dokonać zamiany całki krzywoliniowej na liniową, stosując następującą matematyczną zależność:

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} \cdot dx \quad (4.1.1)$$

4.2. Metody numeryczne

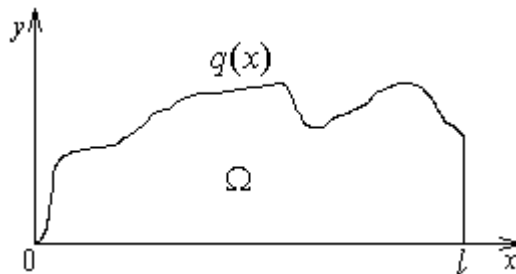
Metody numeryczne są szczególnie tam przydatne gdzie mamy do czynienia z dość skomplikowanymi krzywymi oraz przy stałym przekroju łuku. W takim przypadku musimy najpierw dokonać następującego przekształcenia:

$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi \quad \rightarrow \quad ds = \frac{dx}{\cos \varphi} \quad (4.2.1)$$

a po podstawieniu tej zależności do wzoru na współczynniki równania kanonicznego (wszystkie przekształca się tak samo) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \Delta_{ip} &= \int_s \frac{M_p^o \cdot M_1}{EJ} ds + \dots = \int_0^l \frac{M_p^o \cdot M_1}{EJ} \cdot \frac{dx}{\cos \varphi} + \dots = \\ &= \frac{1}{EJ} \int_0^l \frac{M_p^o \cdot M_1}{\cos \varphi} dx + \dots = \frac{1}{EJ} \int_0^l q(x) dx + \dots = \frac{\Omega}{EJ} + \dots \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

gdzie Ω jest to pole wykresu pod krzywą $q(x)$ w granicach od 0 do l . (Rys.4.2.1)

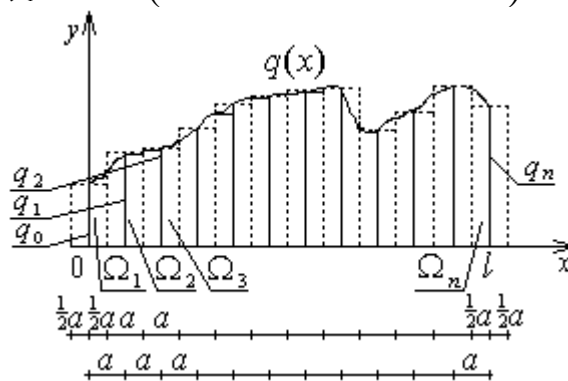


Rys.4.2.1. Interpretacja graficzna całkowania numerycznego

W zależności od sposobu obliczania pola Ω możemy zastosować następujące aproksymacyjne metody:

- metoda prostokątów – pole pod krzywą dzielimy na prostokąty, a następnie dokonujemy zsumowania ich pól (jedna z dokładniejszych metod)

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \Omega_i = a \cdot \left(\frac{1}{2} q_0 + q_1 + \dots + q_{n-1} + \frac{1}{2} q_n \right) \quad (4.2.3)$$



Rys.4.2.4. Interpretacja graficzna metody prostokątów

- metoda trapezów - pole pod krzywą dzielimy na trapezy, a następnie dokonujemy zsumowania ich pól (jedna z mniej dokładnych metod)

$$\Omega = \sum_{i=0}^{n-1} \Omega_i = a \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{q_i + q_{i+1}}{2} \quad (4.2.4)$$

- metoda parabol (Simpsona) - pole pod krzywą dzielimy na prostokąty i parabole

a następnie dokonujemy zsumowania ich pól (najdokładniejsza metoda). Warto zaznaczyć, że parabole budujemy na trzech kolejnych punktach stąd podział odcinka musi być parzysty.

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \Omega_i = \frac{a}{3} \cdot (q_0 + 4q_1 + 2q_2 + 4q_3 + \dots + 2q_{n-2} + 4q_{n-1} + q_n) \quad (4.2.5)$$

Warto zaznaczyć, że we wszystkich powyższych metodach całkowania numerycznego, czym gęstszy podział odcinka tym uzyskane wyniki są dokładniejsze (szczególnie gęsty podział zalecany jest gdy mamy do czynienia z łukami stromymi).

4.3. Metoda „akademicka”

Metoda ta polega na założeniu, że łuk ma zmienny przekrój.

$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi \quad \rightarrow \quad ds = \frac{dx}{\cos \varphi}$$

Przy założeniu, że:

$$J(x) = \frac{J_0}{\cos \varphi(x)} \quad (4.3.1)$$

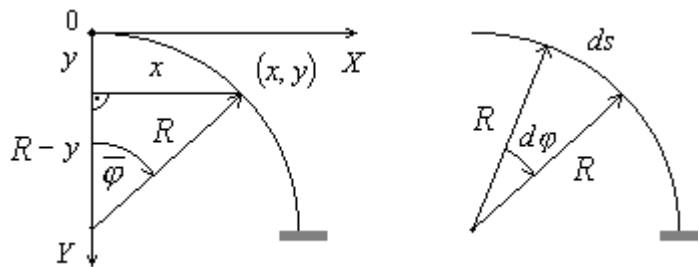
gdzie J_0 to tzw. moment porównawczy który znajduje się w kluczu łuku (bo dla

$\varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$ stąd: $J(x) = J_0$) czyli $J(x)$ zmienia się cosinusoidalnie.

Po wprowadzeniu tej „sztucznej” zależności całki w wielu przypadkach można w prosty sposób obliczyć analitycznie:

$$\begin{aligned} \Delta_{ip} &= \int_s \frac{M_p^o \cdot M_1}{EJ} ds + \dots = \int_0^l \frac{M_p^o \cdot M_1}{E \cdot \frac{J_0}{\cos \varphi}} \cdot \frac{dx}{\cos \varphi} + \dots = \\ &= \frac{1}{EJ_0} \int_0^l M_p^o \cdot M_1 dx + \dots \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

4.4. Metoda polegająca na zamianie współrzędnych prostokątnych na biegunowe (dotyczy wyłącznie łuków kołowych).



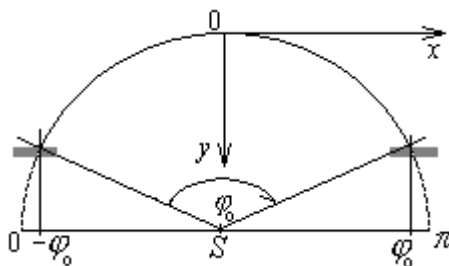
Rys.4.4.1. Przyjęcie układu biegunowego

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{x}{R} & x &= R \sin \varphi \\ \cos \varphi &= \frac{R-y}{R} & y &= R - r \cos \varphi = R(1 - \cos \varphi) \\ \frac{ds}{R} &= d\varphi & ds &= R d\varphi \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Po podstawieniu tych zależności do wzoru na współczynniki równania kanonicznego otrzymujemy proste całki z funkcji trygonometrycznych:

$$\begin{aligned} \delta_{ip} &= \int_s \frac{M_p^o \cdot M_1}{EJ} ds + \dots = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{M_p^o \cdot M_1}{E \cdot J} \cdot R d\varphi + \dots = \\ &= 2 \int_0^{\varphi_0} \frac{M_p^o \cdot M_1}{EJ} \cdot R d\varphi + \dots \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

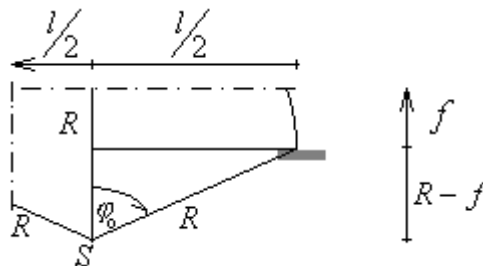
Warto zauważyć, że granice w całce ustalone zostały od $-\varphi_0$ do φ_0 , ponieważ między tymi skrajnymi wielkościami leży kąt φ (w szczególnych przypadkach np. gdy mamy do czynienia z połówką lub ćwiartką koła kąt φ zmieniać się będzie odpowiednio od 0 do π i od 0 do $\frac{\pi}{2}$).



Rys.4.4.2. Przyjęcie odpowiednich granic przy zamianie współrzędnych

Wartość kąta φ_0 obliczamy z następującej zależności:

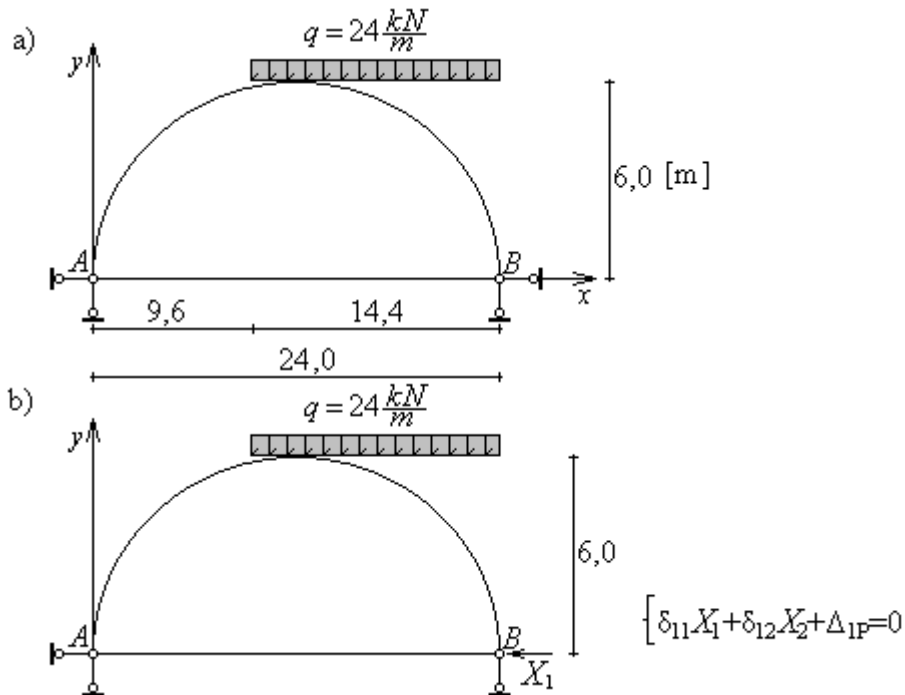
$$\sin \varphi_0 = \frac{l/2}{R} \rightarrow \varphi_0 = \arcsin\left(\frac{l}{2R}\right) \quad (4.4.3)$$



Rys.4.4.3. Wyznaczenie wartości kąta φ_0

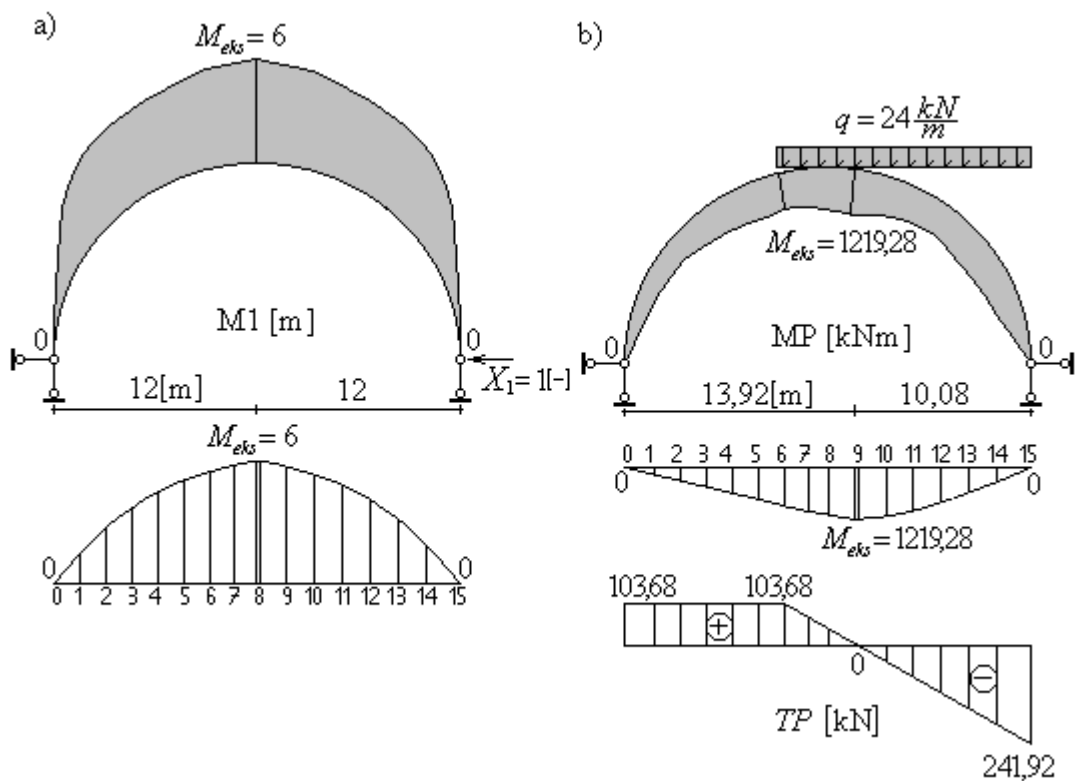
5. PRZYKŁAD

Obliczyć i wykonać wykresy sił wewnętrznych od zadanego obciążenia, dla łuku parabolicznego, dwuprzegubowego, statycznie niewyznaczalnego, o stałym przekroju, przedstawionego na Rys.5.1.1a:



Rys.5.0.1 Dany układ a) rzeczywisty z obciążeniem zewnętrznym; b) układ podstawowy z niewiadomą X_1 oraz układem równań kanonicznych

Ponieważ mamy do czynienia z łukiem wyniosłym $\left(6 > \frac{24}{5}\right)$, w równaniach kanonicznych metody sił pomijamy wpływ sił normalnych i tnących.



Rys.5.0.2 Wykresy sił wewnętrznych w układzie podstawowym pochodzące kolejno od:
a) siły jednostkowej przyłożonej w miejsce niewiadomej X_1 ; b) obciążenia rzeczywistego

Cięciwę łuku podzielono na 15 części ($24/15 = 1,6$), następnie w każdym w ten sposób uzyskanym punkcie obliczono wartości M_1 i M_p^o (Tab.2.0.1) oraz je zsumowano.

Tab.5.0.1 Zestawienie wyników M_1 i M_p^o

Nr	x	y	tgφ	$\frac{1}{\cos\varphi}$	M_1	M_p^o	$\frac{M_1^2}{\cos\varphi}$	$\frac{M_1 \cdot M_p^o}{\cos\varphi}$
0	0	0	1	1,4142	0	0	0	0
1	1,6	1,493	0,8667	1,3233	-1,493	165,89	2,951	-327,8148
2	3,2	2,773	0,7333	1,2401	-2,773	331,78	9,5379	-1141,022
3	4,8	3,84	0,6	1,1662	-3,840	497,66	17,196	-2228,625
4	6,4	4,693	0,4667	1,1035	-4,693	663,55	24,308	-3436,69
5	8,0	5,333	0,3333	1,0541	-5,333	829,44	29,983	-4662,968
6	9,6	5,76	0,2	1,0198	-5,760	995,33	33,835	-5846,627
7	11,2	5,973	0,0667	1,0022	-5,973	1130,50	35,76	-6767,819
8	12,8	5,973	0,0667	1,0022	-5,973	1204,22	35,76	-7209,199
9	14,4	5,76	0,2	1,0198	-5,760	1216,51	33,835	-7145,877
10	16,0	5,333	0,3333	1,0541	-5,333	1167,36	29,983	-6562,696
11	17,6	4,693	0,4667	1,1035	-4,693	1056,77	24,308	-5473,247
12	19,2	3,84	0,6	1,1662	-3,840	884,74	17,196	-3961,999
13	20,8	2,773	0,7333	1,2401	-2,773	651,26	9,5379	-2239,783
14	22,4	1,493	0,8667	1,3233	-1,493	356,35	2,951	-704,1948
15	24	-0	1	1,4142	0	0	0	0
						Σ	307,14	-57708,56

Na podstawie tab.2.0.1 wyliczono współczynniki δ_{11} i Δ_{1p} (wykorzystując metodę prostokątów):

$$\delta_{11} \cdot EJ = a \cdot \sum_{i=1}^n q_i = 1,6 \cdot 307,14 = 491,42 m^3$$

$$\Delta_{1p} \cdot EJ = a \cdot \sum_{i=1}^n q_i = -1,6 \cdot 57708,56 = -92333,70 kN m^3 \quad (5.0.1)$$

Stąd:

$$X_1 = \frac{-\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{-(-92333,7)}{491,42} = 187,89 kN \quad (5.0.2)$$

Po otrzymaniu powyższej wielkości, obliczono poszukiwane siły wewnętrzne korzystając z następujących wzorów:

$$\begin{aligned} M^{(n)} &= M_p^o + X_1 \cdot M_1 \\ T^{(n)} &= T_p^o + X_1 \cdot T_1 = T_p \cdot \cos\varphi - X_1 \cdot \sin\varphi \\ N^{(n)} &= N_p^o + X_1 \cdot N_1 = -T_p \cdot \sin\varphi - X_1 \cdot \cos\varphi \end{aligned} \quad (5.0.3)$$

a wyniki zestawiono w tab.5.0.2.

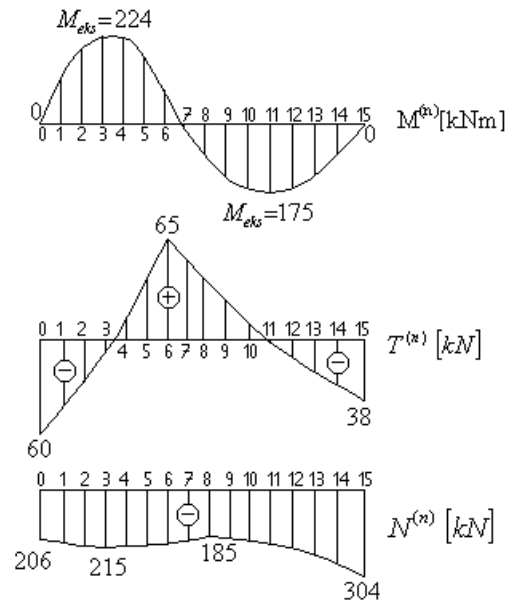
Tab.5.0.2 Zestawienie wyników końcowych

Nr	x	$M^{(n)}$	$\frac{M_1 \cdot M^{(n)}}{\cos \varphi}$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	T_p^o	$T^{(n)}$	$N^{(n)}$
0	0	0	0	0,7071	0,7071	103,68	-59,55	-206,171
1	1,6	-114,69	226,650	0,6549	0,7557	103,68	-44,71	-209,89
2	3,2	-189,31	651,047	0,5914	0,8064	103,68	-27,50	-212,828
3	4,8	-223,83	1002,370	0,5145	0,8575	103,68	-7,76	-214,457
4	6,4	-218,28	1130,510	0,4229	0,9062	103,68	14,50	-214,108
5	8,0	-172,64	970,552	0,3162	0,9487	103,68	38,94	-211,035
6	9,6	-86,92	510,565	0,1961	0,9806	103,68	64,82	-204,575
7	11,2	8,17	-48,889	0,0665	0,9978	65,28	52,64	-191,816
8	12,8	81,89	-490,268	-0,0665	0,9978	26,88	39,32	-185,686
9	14,4	134,27	-788,686	-0,1961	0,9806	-11,52	25,55	-186,501
10	16,0	165,28	-929,176	-0,3162	0,9487	-49,92	12,06	-194,034
11	17,6	174,94	-906,043	-0,4229	0,9062	-88,32	-0,58	-207,612
12	19,2	163,24	-731,009	-0,5145	0,8575	-126,72	-11,99	-226,311
13	20,8	130,18	-447,714	-0,5914	0,8064	-165,12	-22,04	-249,161
14	22,4	75,77	-149,730	-0,6549	0,7557	-203,52	-30,74	-275,278
15	24	0	0	-0,7071	0,7071	-241,92	-38,2	-303,922
		Σ	0,179					

Kontrola kinematyczna:

$$EJ \cdot \delta_B = \int_0^l \frac{M^{(n)} \cdot M_1}{\cos \varphi} dx = a \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{M^{(n)} \cdot M_1}{\cos \varphi} \right)_i$$

$$\delta_B = -\frac{1,6 \cdot 0,179}{EJ} = -\frac{0,286}{EJ} \approx 0 \quad (5.0.2)$$



Rys.5.0.3 Zestawienie wyników: a) wykres rzeczywistych sił normalnych $N^{(n)}$; c) wykres rzeczywistych sił tnących $T^{(n)}$; c) wykres momentów rzeczywistych $M^{(n)}$