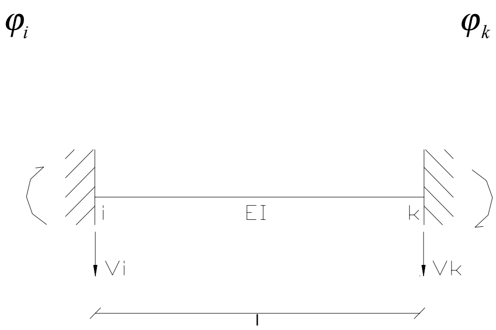
Olga Kopacz, Adam Łodygowski, Krzysztof Tymber,
Michał Płotkowiak, Wojciech Pawłowski
Poznań 2002/2003

MECHANIKA BUDOWLI 3

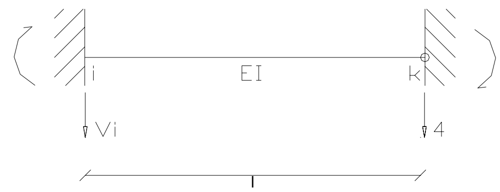
Metoda przemieszczeń

Wzory transformacyjne na momenty przęsłowe przywęzłowe:

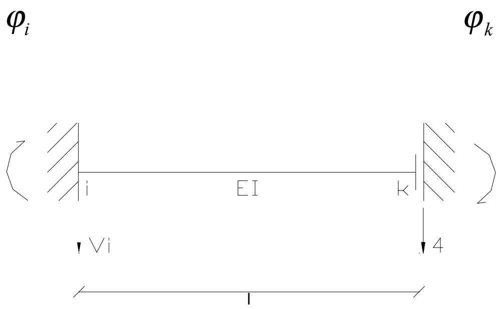


$$
\begin{aligned}
M_{ik} &= \frac{2EI}{l}(2\varphi_i + \varphi_k - 3\psi_{ik}) \\
\psi_{ik} &= \frac{V_k - V_i}{l} \\
M_{ki} &= \frac{2EI}{l}(2\varphi_k + \varphi_i - 3\psi_{ik}) \\
T_{ik} &= -\frac{6EI}{l^2}(\varphi_i + \varphi_k - 2\psi_{ik}) \\
T_{ki} &= -\frac{6EI}{l^2}(\varphi_k + \varphi_i - 2\psi_{ik})
\end{aligned}
\qquad (3.1)
$$

$$
\begin{aligned}
M_{ik} &= 0 \\
M_{ki} &= \frac{3EI}{l}(\varphi_k - \psi_{ik}) \\
T_{ik} &= -\frac{3EI}{l^2}(\varphi_k - \psi_{ik}) \\
T_{ki} &= -\frac{3EI}{l^2}(\varphi_k - \psi_{ik})
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$



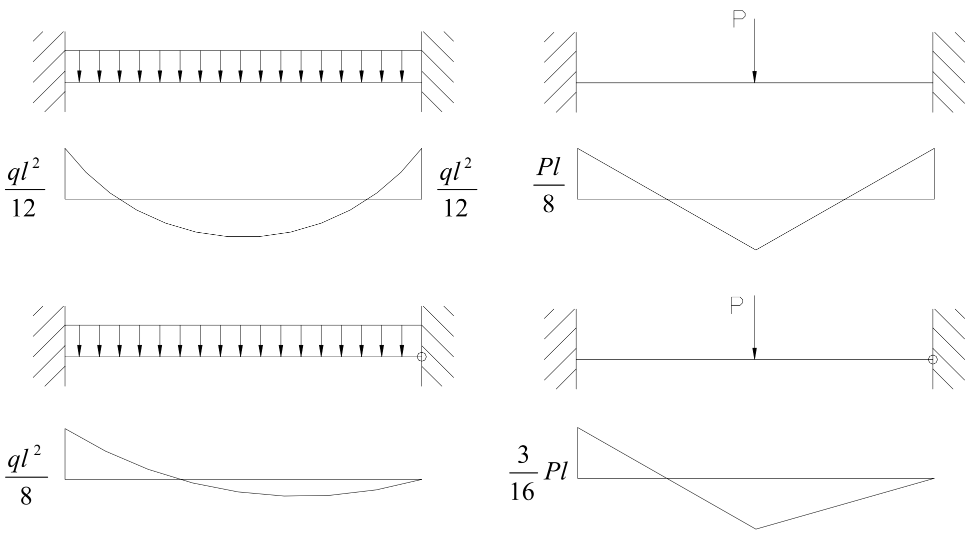
$$
\begin{aligned}
M_{ki} &= 0 \\
M_{ik} &= \frac{3EI}{l}(\varphi_i - \psi_{ik}) \\
T_{ik} &= -\frac{3EI}{l^2}(\varphi_k - \psi_{ik}) \\
T_{ki} &= -\frac{3EI}{l^2}(\varphi_k - \psi_{ik})
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$



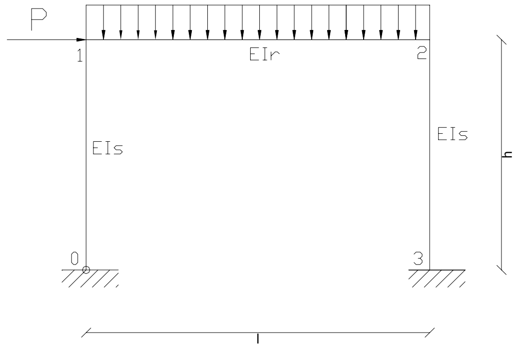
$$
\begin{aligned}
M_{ki} &= \frac{EI}{l}(-\varphi_i + \varphi_k) \\
M_{ik} &= \frac{EI}{l}(\varphi_i - \varphi_k) \\
T_{ik} &= 0 \\
T_{ki} &= 0
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

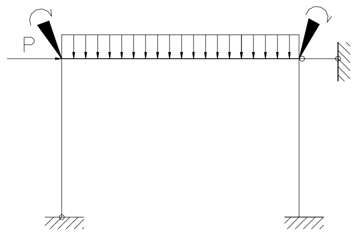
φ_i φ_k

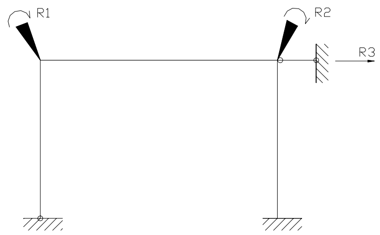
W powyższych przypadkach pomijamy wpływ sił normalnych
Wykresy momentów na prętach obustronnie utwierdzonych:



Przykład
Założenie metody: pręty pracują jako obustronnie utwierdzone







$$\begin{cases} R_1 = R_1(\varphi_1) + R_1(\varphi_2) + R_1(u_3) + R_1(p,q,M) = 0 \\ R_2 = R_2(\varphi_1) + R_2(\varphi_2) + R_2(u_3) + R_2(p,q,M) = 0 \\ R_3 = R_3(\varphi_1) + R_3(\varphi_2) + R_3(u_3) + R_3(p,q,M) = 0 \end{cases}$$

$$R_1(\varphi_1) = r_{11}\varphi_1$$

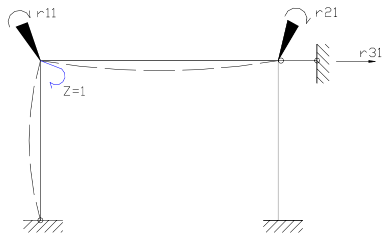
$$Z_1 = \varphi_1$$
$$Z_2 = \varphi_2$$
$$Z_3 = \varphi_3$$

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + r_{1P} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + r_{2P} = 0 \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + r_{3P} = 0 \end{cases}$$

gdzie:
r_{ik}- reakcja węzła „i” spowodowana jednostkowym przemieszczeniem węzła „k”

r_{iP}- reakcja węzła i spowodowana obciążeniem zewnętrznym

stan $Z_1=1$ ($\varphi_1=1$)



$\varphi_1 = 1, \varphi_0 = 0, \varphi_2 = 0, \psi_{ik} = 0$

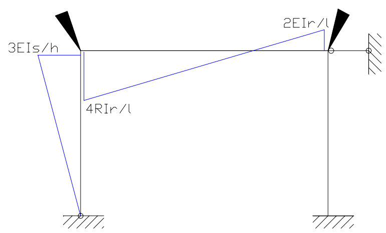
Na podstawie wzorów 1.1-2.2 otrzymujemy następujące wartości momentów przywęzłowych:

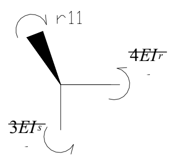
$$M_{01} = 0$$

$$M_{10} = \frac{3EI_s}{h}$$

$$M_{12} = \frac{4EI_r}{l}$$

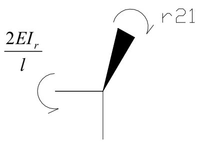
$$M_{21} = \frac{2EI_r}{l}$$





$$\sum M_1 = 0$$

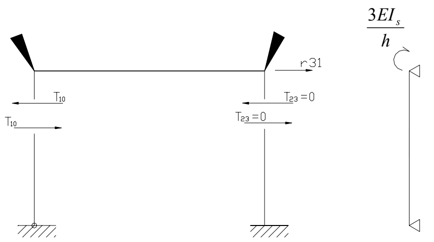
$$r_{11} = \frac{4EI_r}{l} - \frac{3EL_s}{h}$$



$$\sum M_2 = 0$$

$$r_{21} = \frac{2EI_r}{l}$$

Reakcje r_{3i} obliczyć można np. za pomocą równania pracy wirtualnej. Przy obliczaniu reakcji r_{31} posłużymy się jednak siłami tnącymi zapisując równanie równowagi (tnące obliczone z momentów)



$$\sum M_0 = 0$$

$$T_{10} \cdot h + \frac{3EI_s}{h} = 0$$

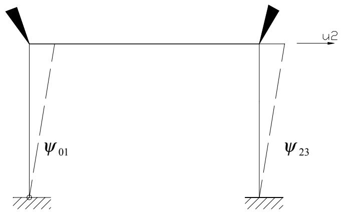
$$T_{10} = -\frac{3EI_3}{h^2}$$

$$r_{31} = T_{10} + T_{23}$$

$$r_{31} = -\frac{3EI_s}{h^2}$$

Dla stanu 2 postępujemy analogicznie do 1

stan Z_3=1 (u_2=1)



$$\psi_{01} = \psi_{10} = \frac{1}{h}$$

$$\psi_{23} = \psi_{32} = \frac{1}{h}$$

Ze wzorów 1.1-2.2

$$M_{01} = 0$$

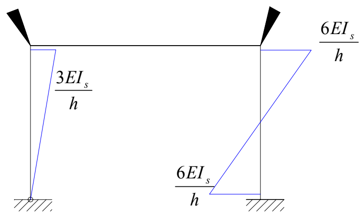
$$M_{10} = -\frac{3EI_s}{h^2}$$

$$M_{12} = 0$$

$$M_{21} = 0$$

$$M_{23} = -\frac{6EI_s}{h^2}$$

$$M_{32} = -\frac{6EI_s}{h^2}$$



$$r_{13} = -\frac{3EI_s}{h^2}$$

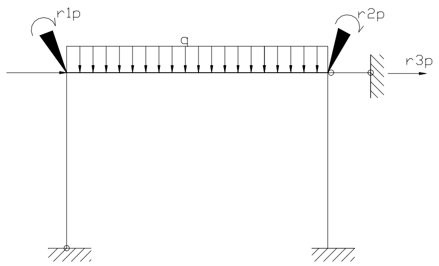
$$r_{23} = -\frac{6EI_s}{h^2}$$

Reakcję r_{33} obliczymy korzystając z równania pracy wirtualnej:

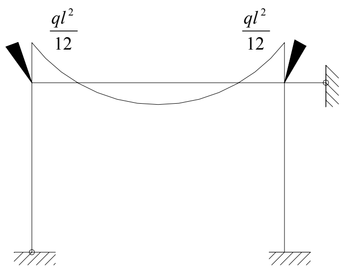
$$r_{33} \cdot \bar{1} - \frac{3EI_s}{h^2}(\overline{\psi}_{01}) - (\frac{6EI_s}{h^2} + \frac{6EI_s}{h^2})(\overline{\psi}_{23}) = 0$$

$$r_{33} = \frac{15EI_s}{h^3}$$

stan P



Wykres momentów ma postać:



$$r_{1p} = -\frac{ql^2}{12}$$

$$r_{2p} = \frac{ql^2}{12}$$

Reakcję r_{3p} otrzymamy z równowagi wyciętej części (momenty w prętach 01 i 23 równa zeru, więc tnące w tych prętach również są zerowe)

$$r_{3p} = -P$$

Obliczone wartości reakcji r_{ik} oraz r_{ip} podstawiamy do układu równań kanonicznych:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + r_{1P} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + r_{2P} = 0 \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + r_{3P} = 0 \end{cases}$$

Obliczamy wartości Z_1, Z_2, Z_3 równych φ_1, φ_2, u_2,

Końcową wartość momentów otrzymujemy na drodze superpozycji:

$$M = M_1\varphi_1 + M_2\varphi_2 + M_3u_2 + M_P$$

gdzie:

M_1-wartość momentu wywołanego stanem Z_1
M_2-wartość momentu wywołanego stanem Z_2
M_3-wartość momentu wywołanego stanem Z_3
M_P-wartość momentu wywołanego stanem P
φ_1, φ_2, u_2-wartości obliczone z układu równań kanonicznych

Momenty końcowe uzyskać można za pomocą wzorów transformacyjnych:

$$M_{ik} = \frac{2EI}{l}(2\varphi_i + \varphi_k - 3\psi_{ik})$$

$$M_{ki} = \frac{3EI}{l}(\varphi_k - \psi_{ik})$$

podstawiając za odpowiednie φ_i, φ_k wartości z równań kanonicznych φ_1, φ_2, natomiast w miejsce ψ_{ik} odpowiednie $\psi=u_2/h$

Wartości końcowych sił tnących obliczamy dla poszczególnych prętów za pomocą znanych już wartości momentów, natomiast siły normalne otrzymujemy z równowagi węzłów.

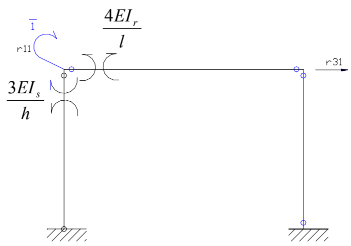
Równania pracy wirtualnej w metodzie przemieszczeń

Stosowanie równań pracy wirtualnej do obliczania reakcji w metodzie przemieszczeń wiąże się z przyjęciem określonych założeń. Nawiążmy do powyższego przypadku.

Zakładamy istnienie stanu wieloprzegubowego:

Wymuszając w powyższym stanie obrót węzła lub przemieszczenie, nie wywołujemy powstawania sił wewnętrznych (M=0).Momenty powstałe w stanie Z_1 (str....) traktujemy jako obciążenie zewnętrzne pracujące na wirtualnym przemieszczeniu. W wyniku tego zabiegu prawe strony równań pracy wirtualnej zerują się.

W stanie wieloprzegubowym wymuszamy jednostkowy obrót węzła 1:



Równania pracy wirtualnej mają postać:

$$r_{11}\cdot\bar{1}+\frac{3EI_s}{h}\cdot\bar{1}-\frac{4EI_r}{h}\cdot\bar{1}=0\cdot\bar{1}$$

$$r_{11}=\frac{4EI_r}{h}-\frac{3EI_s}{h}$$

$$r_{31}\cdot\bar{1}+\frac{3EI_s}{h}(\frac{\bar{1}}{h})-\frac{4EI_r}{h}(\bar{0})=0\cdot\bar{1}$$

$$r_{31}=-\frac{3EI_s}{h^2}$$

Przy obliczaniu reakcji r_{ip} pamiętać trzeba o uwzględnieniu prócz pracy momentów wywołanych stanem P o uwzględnieniu w równaniach pracy wirtualnej, pracy sił zewnętrznych P na odpowiednich przemieszczeniach δ (obliczonych z równania łańcucha kinematycznego).