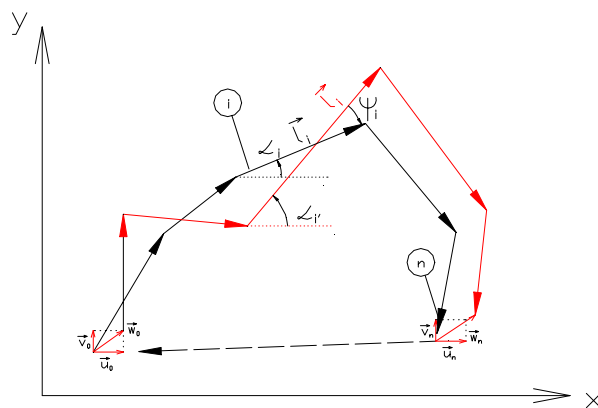


Olga Kopacz, Adam Łodygowski, Krzysztof Tymper,
Michał Płotkowiak, Wojciech Pawłowski
Konsultacje naukowe: prof. dr hab. JERZY RAKOWSKI
Poznań 2002/2003

MECHANIKA BUDOWLI 4 METODA PRZEMIESZCZEŃ-ciąg dalszy.

1.1. Równanie łańcucha kinematycznego.

Równanie łańcucha kinematycznego potrzebne jest nam do wyznaczenia reakcji między kątami obrotów ψ_{ki} prętów tworzących analizowaną ramę. Spróbujmy znaleźć zależności (matematyczne) między tymi kątami. Spójrzmy na rysunek poniżej (rys.4.1) na którym przedstawiono układ przed i po przemieszczeniu.



Rys.4.1

Początkowe założenia:

- 1) Dopuszczamy możliwość osiadania podpór.
- 2) Podpory doznają przemieszczenia \vec{w}_o i \vec{w}_n

3) Wektor \vec{l}_i nachylony jest pod kątem α_i do osi poziomej, wektor \vec{l}_i' (po przemieszczeniu) pod kątem α_i' . Zajmijmy się w końcu łańcuchem kinematycznym.

Dokonajmy rzutowania wektorów \vec{l}_i i \vec{l}_i' na osie x, y . Zgodnie z rysunkiem (rys.4.1) otrzymujemy:

- dla układu wyjściowego:

$$\sum_i \vec{l}_i = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum_i l_i^x = 0 & (\text{suma na oś } x) \\ \sum_i l_i^y = 0 & (\text{suma na oś } y) \end{cases} \quad (4.1)$$

jeżeli zaś $\cos \alpha_i = \frac{l_i^x}{l_i}$ a $\sin \alpha_i = \frac{l_i^y}{l_i}$ to powyższe związki przedstawiają się następująco:

$$\begin{cases} \sum_i l_i \cdot \cos \alpha_i = 0 \\ \sum_i l_i \cdot \sin \alpha_i = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

- dla układu po przemieszczeniu:

$$\sum_i \vec{l}_i' + \vec{w}_0 - \vec{w}_n = \vec{0} \Rightarrow \sum_i l_i' \cdot \cos \alpha_i' + u_0 - u_n = 0 \quad (4.3)$$

$$\sum_i l_i' \cdot \sin \alpha_i' + v_0 - v_n = 0 \quad (4.4)$$

W tym przypadku nie znamy wartości kąta ψ_i , wiemy jednak iż jest to kąt obrotu pręta;

$$\alpha_i' = \alpha_i + \psi_i \Rightarrow \alpha_i' = \alpha_i - \psi_i \quad (4.5)$$

Zakładając, że pręty mogą ulec wydłużeniu pod wpływem temperatury równania (4.3) i (4.4) przyjmują postać:

$$1.3) \sum_i (l_i + \Delta l_i) \cos(\alpha_i - \psi_i) = u_n - u_0 \Rightarrow$$

$$\sum_i (l_i + \Delta l_i) (\cos \alpha_i \cdot \cos \psi_i + \sin \alpha_i \cdot \sin \psi_i) = u_n - u_0 \Rightarrow$$

W wyniku przemieszczenia, zakładając, że kąty obrotów prętów ψ_i są małe możemy przyjąć, że $\cos \psi_i \approx 1$ i $\sin \psi_i \approx \psi_i$ stąd:

$$\sum_i (l_i \cos \alpha_i \cdot 1 + l_i \sin \alpha_i \cdot \psi_i + \Delta l_i \cos \alpha_i \cdot 1 + \Delta l_i \sin \alpha_i \cdot \psi_i) = u_n - u_0 \Rightarrow$$

$$\sum_i (l_i^y \cdot \psi_i + \Delta l_i^x) = u_n - u_0 \Rightarrow$$

$$1) \sum_i l_i^y \cdot \psi_i + \sum_i \Delta l_i^x = u_n - u_0$$

$$1.4) \sum_i (l_i + \Delta l_i) \sin(\alpha_i - \psi_i) = v_n - v_0 \Rightarrow$$

$$\sum_i (l_i + \Delta l_i) (\sin \alpha_i \cdot \cos \psi_i - \sin \psi_i \cdot \cos \alpha_i) = v_n - v_0 \Rightarrow$$

$$\sum_i (l_i \sin \alpha_i \cdot 1 - l_i \cos \alpha_i \cdot \psi_i + \Delta l_i \sin \alpha_i \cdot 1 - \Delta l_i \cos \alpha_i \cdot \psi_i) = v_n - v_0 \Rightarrow$$

$$2) - \sum_i l_i^x \cdot \psi_i + \sum_i \Delta l_i^y = v_n - v_0$$

Otrzymaliśmy:

$$\begin{aligned} 1) \sum_i l_i^y \cdot \psi_i + \sum_i \Delta l_i^x &= u_n - u_0 \\ 2) - \sum_i l_i^x \cdot \psi_i + \sum_i \Delta l_i^y &= v_n - v_0 \end{aligned}$$

RÓWNANIA ŁAŃCUCHA
KINEMATYCZNEGO

(4.6)

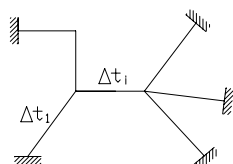
1.1.1 Wpływ temperatury i osiadania podpór w metodzie przemieszczeń.

Przypuśćmy, że mamy układ obciążony temperaturą (np. jak na rys.4.2), wówczas wielkości R_u wyznacza się w procedurze dwuetapowej:

a) od różnicy temperatur

b) od równomiernego ogrzania temperaturą $t = t_0 - t_m$

ad a) Zajmijmy się układem obciążonym różnicą temperatur Δt jak na rysunku (rys.4.3).



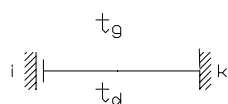
Rys.1.2

Jeżeli poszczególne pręty układu (układ podstawowy) wyizolujemy otrzymamy trzy możliwości. Pręt może być: obustronnie utwierdzony, jednostronnie utwierdzony lub podparty na podporze ślizgowej. Wzory transformacyjne dla tych możemy wyznaczyć znaną nam metodą sił.

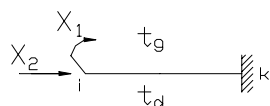
Mamy zatem:

- ♦ dla układu z podporą ślizgową i obustronnie utwierdzonego

a) schemat rzeczywisty



b) układ podstawowy



Rys.4.3

Dla danego układu (rys.4.3a) przyjmujemy układ podstawowy jak na rysunku obok (rys.4.3b). Mamy dwie nadliczbowe X_1, X_2 dla których układ równań kanonicznych jest postaci:

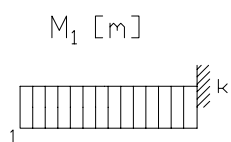
$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2P} = 0$$

Współczynniki δ_{11}, δ_{12} wyznaczymy z wzoru:

$$\delta_{ik} = \int \frac{M_i \cdot M_k}{EI} ds \quad m = \begin{bmatrix} m \cdot kNm \\ \frac{kN}{m^2} m^4 \\ m = m \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Wykonujemy wykresy momentów od nadliczbowych $X_1 = 1, X_2 = 1$. Z rysunku widać, że wykres momentów od $X_2 = 1$ jest równy zero, zatem poszczególne współczynniki z indeksem 2 będą równe zero, a układ równań sprowadza się do postaci: $\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0$. Zgodnie z rysunkiem (rys.4.4) i powyższym wzorem (4.7):



Rys.4.4

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} (l \cdot 1 \cdot 1) = \frac{l}{EI}$$

$$\Delta_{1t} = \int M_1 \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h} ds = l \cdot 1 \cdot \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h}$$

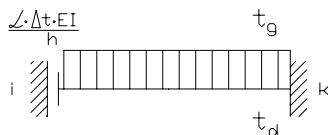
stąd:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0 \Rightarrow X_1 = -\frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}}$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}} = \frac{l \cdot 1 \cdot \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h}}{\frac{l}{EI}} = \frac{-\alpha_t \cdot \Delta t \cdot EI}{h}$$

Możemy wykonać wykres momentów w układzie statycznie niewyznaczalnym (rys.4.5) i wyznaczyć szukane momenty M_{ik} , M_{ki} (wartości tych momentów przedstawione są w tabeli umieszczonej poniżej).

W przypadku układu obustronnie utwierdzonego postępujemy jak w powyższym przypadku.

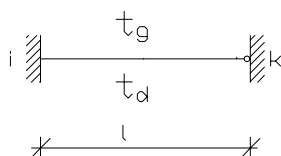


Rys.4.5

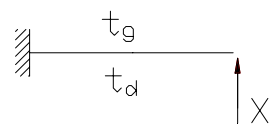
- ♦ dla układu jednostronnie utwierdzonego Schemat postępowania jest analogiczny do schematu postępowania jak dla układu z podporą ślizgową.

WYKŁADY Z MECHANIKI BUDOWLI
METODA PRZEMIESZCZEŃ- RÓWNANIA ŁAŃCUCHA KINEMATYCZNEGO, WZORY TRANSFORMACYJNE OD
TEMPERATURY, PRZYKŁAD LICZBOWY

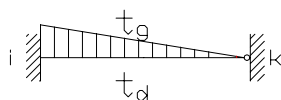
a) schemat rzeczywisty



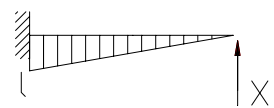
b) układ podstawowy



c) wykres momentów
w ukł.rzeczywistym



d) wykres momentów
od X_1=1



Rys.4.6

Układ równań kanonicznych:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l \right) = \frac{l}{EI} \cdot \frac{l^3}{3}$$

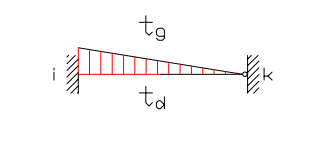
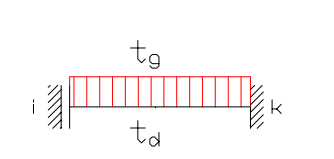
$$\Delta_{1P} = \int M_1 \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h} ds = \frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h} = \frac{l^2 \cdot \alpha_t \cdot \Delta t}{2h}$$

Zatem nasza niewiadoma wynosi:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{\frac{l^2 \cdot \alpha_t \cdot \Delta t}{2h}}{\frac{l}{EI} \cdot \frac{l^3}{3}} = -\frac{3}{2} EI \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h} \quad \text{a wykres momentów w układzie}$$

statycznie niewyznaczalnym (od wyznaczonego X_1) przedstawiony jest na powyższym rysunku (rys.4.6c). Wyznaczone w ten sposób wzory transformacyjne przedstawione są w poniższej tabeli.

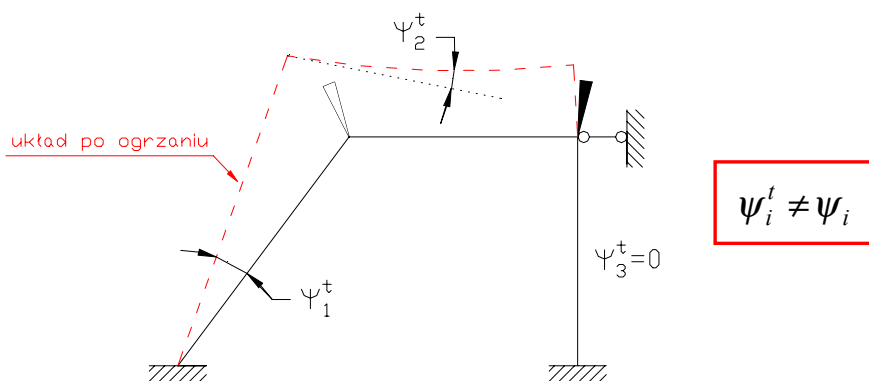
Schemat	Wzory transformacyjne	-
	$M_{ik}^{\Delta t} = -\frac{EI}{h} \alpha_t \cdot \Delta t$ $M_{ki}^{\Delta t} = +\frac{EI}{h} \alpha_t \cdot \Delta t$ $\Delta t = t_d - t_g > 0$	(4.7)

	$M_{ik}^{\Delta t} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{EI}{h} \alpha_t \cdot \Delta t \quad \Delta t = t_d - t_g > 0$ $M_{ki}^{\Delta t} = 0$	(4.8)
	$M_{ik}^{\Delta t} = -\frac{EI}{h} \alpha_t \cdot \Delta t$ $M_{ki}^{\Delta t} = +\frac{EI}{h} \alpha_t \cdot \Delta t$	(4.9)

ad a) Zgodnie z wzorami (4.6) dla układu równomiernie ogrzanego możemy zapisać:

$$\sum_i l_i^y \cdot \psi_i^t + \sum_i \Delta l_i^x = 0$$

$$\sum_i l_i^x \cdot \psi_i^t + \sum_i \Delta l_i^y = 0 \quad \text{gdzie: } \Delta l_i = l_i \cdot \alpha_t \cdot t$$



Rys.4.7

Wartości ψ_i^t wyznaczamy z równań łańcucha kinematycznego, i określamy dla nich wykresy sił wewnętrznych podstawiając do wzorów transformacyjnych powyższe wartości. Pozwoli to nam na wyznaczenie

wielkości R_{ii} , które będziemy mogli potraktować jako wyrazy wolne w układzie równań kanonicznych.

W przypadku gdy występuje tylko osiadanie podpór, wyrazy wolne wyznacza się w sposób jak wyżej, tzn. z równań łańcuchów kinematycznych układu podstawowego w postaci:

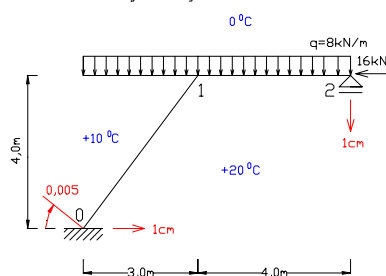
$$\begin{aligned} 1) \sum_i l_i^y \cdot \psi_i^\Delta &= u_n - u_0 \\ 2) - \sum_i l_i^x \cdot \psi_i^\Delta &= v_n - v_0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

W przypadku równoczesnego działania temperatury i osiadania dochodzi do osiadania w postaci kątów.

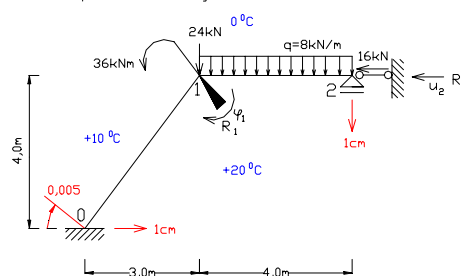
PRZYKŁAD

Na prostym przykładzie zobaczymy jak zapisać równania łańcucha i wykonać wykresy sił wewnętrznych w przypadku obciążenia układu temperaturą, siłami zewnętrznymi czy przy osiadaniu podpór. Przyjmujemy, że nasz układ (rama) obciążony jest jak na rysunku poniżej. Przyjmujemy układ podstawowy (rys.4.8b) i zapisujemy dla niego układ równań kanonicznych. I tak:

a) schemat rzeczywisty



b) schemat podstawowy

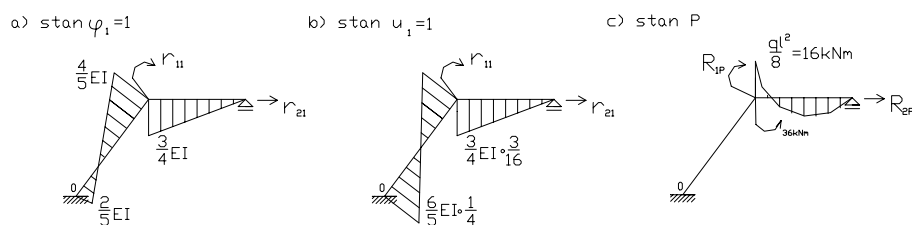


Rys.4.8

- ♦ Dla układu obciążonego **siłami zewnętrznymi** układ równań kanonicznych ma postać:

$$\begin{cases} r_{11} \cdot \varphi_1 + r_{12} \cdot u_2 + R_{1P} = 0 \\ r_{21} \cdot \varphi_1 + r_{22} \cdot u_2 + R_{2P} = 0 \end{cases}$$

W celu wyznaczenia współczynników $r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}$ oraz R_{1P}, R_{2P} wykonujemy wykresy momentów zgodnie z poznanymi wcześniej wzorami transformacyjnymi przy $\varphi_1 = 1, u_2 = 1$ oraz od obciążenia siłami zewnętrznymi (rys.4.9).



Rys.4.9

Poszczególne współczynniki wyznaczamy z równowagi węzłów, natomiast r_{21}, r_{22}, R_{2P} z równania pracy wirtualnej. Otrzymujemy zatem:

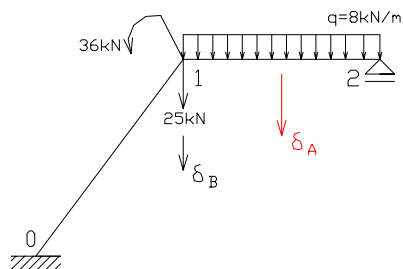
$$r_{11} = \frac{4}{5}EI + \frac{3}{4}EI$$

$$r_{12} = \frac{3}{4}EI \cdot \frac{3}{16} - \frac{6}{5}EI \cdot \frac{1}{4}$$

$$r_{21} \cdot \bar{1} + \left(\frac{4}{5}EI + \frac{2}{5}EI \right) \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4}EI \left(-\frac{3}{16} \cdot \bar{1} \right) = 0 \cdot \bar{1}$$

$$r_{22} \cdot \bar{1} - \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{4}EI \left(\frac{1}{4} \right) \cdot 2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{16}EI \left(-\frac{3}{16} \cdot \bar{1} \right) = 0 \cdot \bar{1}$$

W przypadku wyznaczania współ. R_{2P} należy także uwzględnić pracę wykonaną na przemieszczeniach δ_A, δ_B (rys.4.10) wywołanych działaniem obciążenia zewnętrznego.



Rys.1.10

W celu wyznaczenia δ_A, δ_B budujemy dodatkowe dwa łańcuchy kinematyczne:

$$01 \downarrow \quad 2A \downarrow$$

$$3 \cdot \psi_{01} = \delta_B \quad -2 \cdot \psi_{21} = \delta_A$$

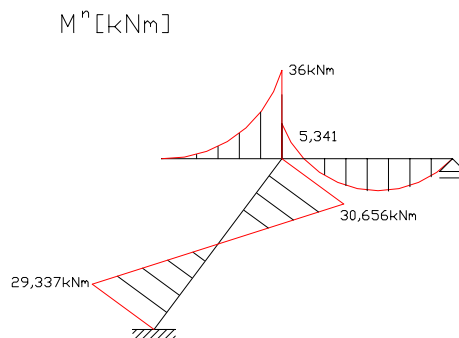
Równanie pracy wirtualnej przyjmuje postać:

$$R_{2P} \cdot \bar{1} - 16 \left(-\frac{3}{1} \cdot \bar{1} \right) - 16 \cdot \bar{1} + 24 + 24 \cdot \bar{\delta}_B + 8 \cdot 4 \bar{\delta}_A = 0 \cdot \bar{1}$$

Mając wyznaczone współczynniki rozwiązujemy układ równań kanonicznych otrzymując:

$$\varphi_1 = -\frac{3,299}{EI} \quad u_2 = \frac{93,3908}{EI}$$

wartości te wstawiamy do wzorów transformacyjnych otrzymując końcowe wartości momentów na poszczególnych końcach prętów. Wykres momentów przedstawiony jest na poniższym rysunku.



♦ Układ obciążony **temperaturą**-

Schemat postępowania jest analogiczny jak poprzednio, tu jednak w celu wyznaczenia współczynników R_{1t}, R_{2t} postępujemy dwuetapowo określając osobno ich wartości od obciążenia Δt i t_0 . Wykonujemy wykresy momentów od obciążenia Δt zgodnie z wzorami transformacyjnymi przedstawionymi w tabeli (4.7.4.8) otrzymując z równowagi węzłów $R_{1\Delta t}, R_{2\Delta t}$. W celu wyznaczeni R_{1t_0}, R_{2t_0} należy wykonać dodatkowy łańcuch kinematyczny przy czym należy pamiętać o uwzględnieniu wydłużenia prętów wywołanych ich podgrzaniem (ozębieniem) temperaturą $t_0 = \frac{t_d + t_g}{2} - t_m$. I tak dla:

- pręta 0-1 mamy $t_0 = \frac{20^\circ C + 10^\circ C}{2} - 25^\circ C = -10^\circ C$

- pręta 1-2 mamy $t_0 = \frac{20^\circ C + 0^\circ C}{2} - 25^\circ C = -15^\circ C$

Równania łańcucha wyglądają następująco:

$$012 \rightarrow$$

$$4 \cdot \psi_{01(t_0)} + \underbrace{3 \cdot \alpha_t(-10^\circ C)}_{\text{element wynikajacy z ogrzania}} + 4 \cdot \alpha_t(-15^\circ C) = 0$$

$$012 \uparrow$$

$$3 \cdot \psi_{01(t_0)} - 4 \cdot \alpha_t(-10^\circ C) + 4 \cdot \psi_{12(t_0)} = 0$$

Szukane przez nas ostateczne współczynniki R_{1t}, R_{2t} wynoszą:

$$R_{1t} = R_{1\Delta t} + R_{1t_0} \quad R_{2t} = R_{2\Delta t} + R_{2t_0}$$

- ♦ Układ z nałożonym **osiadaniem podpór**- jak widać z rysunku (rys.4.7) zadane osiadania wynoszą $0,01m$. W tym zatem przypadku prawa strona nie jest równa zero lecz zadanemu osiadanu. Mamy zatem:

$$012 \rightarrow$$

$$4 \cdot \psi_{01} = -0,01$$

$$012 \downarrow$$

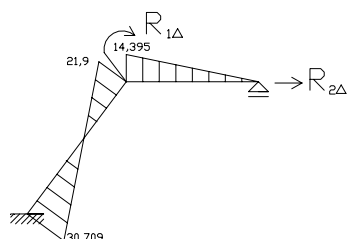
$$3 \cdot \psi_{01} + 4 \cdot \psi_{12} = 0,01$$

Wykonujemy wykresy momentów od wyznaczonych wartości

$$\psi_{01} = \frac{-0,01}{4}, \psi_{12} = \frac{3}{16} 0,01 \text{ pamiętając, że } \varphi_0 = 0,005 \text{ i podobnie jak}$$

poprzednio wyznaczamy $R_{1\Delta}, R_{2\Delta}$.

WYKŁADY Z MECHANIKI BUDOWLI
 METODA PRZEMIESZCZEŃ- RÓWNANIA ŁAŃCUCHA KINEMATYCZNEGO, WZORY TRANSFORMACYJNE OD
 TEMPERATURY, PRZYKŁAD LICZBOWY



Współczynnik $R_{1\Delta}$ określamy z równowagi węzła natomiast $R_{2\Delta}$ z równania pracy wirtualnej:

$$R_{2p} \cdot \bar{1} + (30,709 + 21,935) \cdot \frac{\bar{1}}{4} - 14,395 \cdot \left(\frac{-3}{16} \cdot \bar{1} \right) = 0 \cdot \bar{1}$$

Po ich określeniu możemy wyznaczyć wykres momentów w układzie statycznie niewyznaczalnym zgodnie z użytymi już wcześniej wzorami transformacyjnymi.

Widzimy zatem, iż mimo tego, że sam schemat budowy łańcucha jest dla wszystkich rodzajów obciążeń jednakowy to różnice między nimi są znaczne. Należy zwrócić baczną uwagę przy ich budowaniu, stanowią one bowiem podstawę do poprawnego rozwiązania zadania.