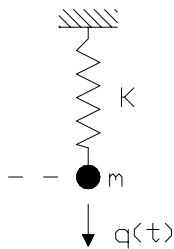


Olga Kopacz, Adam Łodygowski, Krzysztof Tymber,
Michał Płotkowiak, Wojciech Pawłowski
Konsultacje naukowe: prof. dr hab. Jerzy Rakowski
Poznań 2002/2003

OPIS RUCHU

1. 1. Opis ruchu



Rys.11.1

Przypuśćmy, że mamy układ jak na rysunku obok (rys.11.1). Zgodnie z zasadą d'Alemberta równanie równowagi można zapisać:

$$m \ddot{q}(t) + \kappa q(t) = 0 \quad (11.1)$$

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0 \quad (11.2)$$

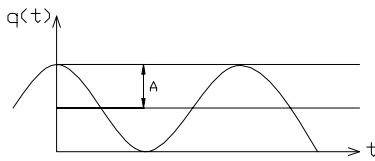
gdzie: $\omega^2 = \frac{\kappa}{m}$, $\left(\ddot{}\right) = \frac{d^2}{dt^2}$ i :

m – masa [kg]

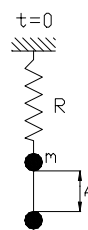
q – przemieszczenie w czasie

κ – sztywność podpory $\left[\frac{N}{m}\right]$.

Rozwiązaniem jest funkcja $q(t) = q_s \sin \omega t + q_c \cos \omega t \Rightarrow q(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, przy czym kąt φ -to kąt fazowy. Stałe A, φ wyznaczymy z dwóch warunków początkowych:



Rys.11.2



np.

$$1^0) t = 0 \Rightarrow q(0) = a$$

$$2^0) t = 0 \Rightarrow \dot{q}(0) = \left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

Z warunków tych otrzymujemy:

$$a = A \sin(0 + \varphi) = A \sin \varphi \Rightarrow A \sin \frac{\pi}{2} = a \Rightarrow A = a$$

$$\frac{dq}{dt} = A \cos(\omega t + \varphi) \omega \Rightarrow 0 = A \omega \cos(\omega \cdot 0 + \varphi) \Rightarrow \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Zatem dla warunków początkowych j.w otrzymujemy pełne rozwiązanie postaci:

$$q(t) = a \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = a \cos \omega t \quad (11.3)$$

gdzie:

a -amplituda drgań, to max. wartość przemieszczenia(wychylenia) w stosunku do położenia równowagi,

ω -to częstość kołowa drgań własnych (zakładamy brak czynników zaburzających, czyli nie występuje tłumienie) [rd/s], jest cechą indywidualną każdego ciała (**Jest stała!**)

Uwaga! Nie ma związku między amplitudą a częstością kołową!

Zgodnie z rozwiązaniem (wzór 11.3) nasza kulka powróci do swego położenia po czasie odpowiadającym 2π . Podstawmy tą wartość do naszego rozwiązania:

$$q(t) = a \cos(\omega t + 2\pi) = \cos\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)\right] = \cos[\omega(t + T)]$$

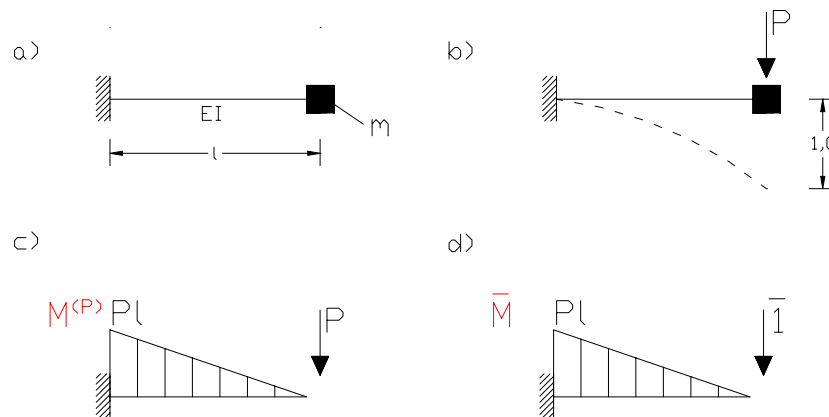
gdzie $T = \frac{2\pi}{\omega}$ to okres drgań, czyli czas dzielący dwa identyczne stany rozpatrywanego ciała (łatwiej można to sobie wyobrazić patrząc na rysunek 11.2).

Zadanie 1

Wyznaczyć częstość kołową elementu.

- ♦ Powiedzmy, że mamy układ jak na rysunku (rys.11.3) z jednym stopniem swobody. Zakładamy, że masa belki jest znikomo mała w stosunku do nałożonej masy (powstały w ten sposób błąd będzie bardzo mały i nieistotny dla dalszych rozważań). Częstość kołowa wyrażana jest wzorem:

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \quad (11.4)$$



Rys.11.3

Sztywność belki wyznaczmy korzystając z pracy wirtualnej. W miejscu masy przykładamy taką siłę P , która spowoduje jednostkowe ugięcie belki (rys.11.3b) stąd δ równe będzie 1. Wykonujemy wykresy momentów od zadanej siły P i siły jedynkowej (rys.11.3c i d) otrzymując:

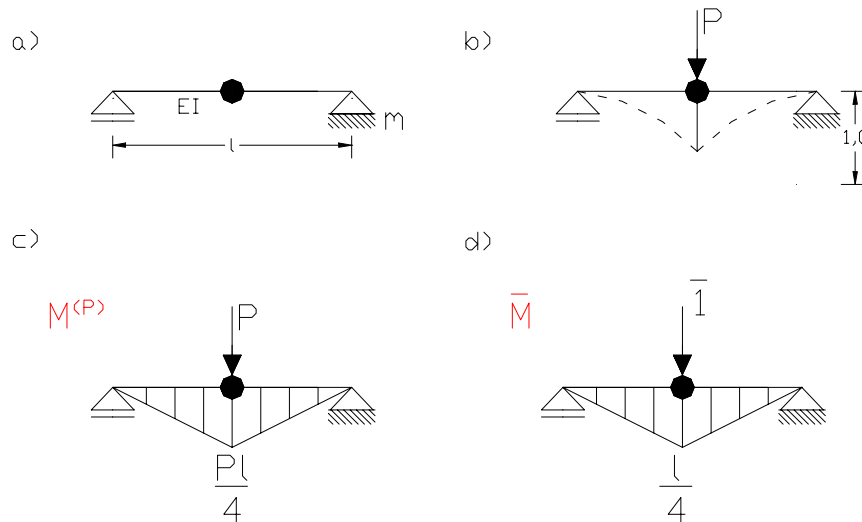
$$\delta = \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} P \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l \right) = \frac{P \cdot l^3}{3EI}$$

Przyrównując otrzymaną wartość do jedynki:

$$1 = \frac{P \cdot l^3}{3EI} \Rightarrow P = \frac{3EI}{l^3} \text{ czyli } \kappa = \frac{3EI}{l^3} \text{ stąd szukana częstość kołowa wynosi:}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3EI}{m \cdot l^3}} \quad (11.5)$$

- ♦ Zajmijmy się teraz belką swobodnie podpartą, której masę sprowadzimy do masy skupionej umieszczonej w środku jej rozpiętości (rys.11.4). Sposób postępowania jest analogiczny jak dla belki z przykładu pierwszego. Wykonujemy wykresy momentów od zadanej siły P i siły jedynkowej.



Rys.11.4

$$\delta = \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{Pl}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{4} \cdot 2 \right) = \frac{P \cdot l^3}{48EI}$$

ponieważ :

$$1 = \frac{P \cdot l^3}{48EI} \Rightarrow P = \frac{48EI}{l^3} \quad \text{czyli} \quad \kappa = \frac{48EI}{l^3} \quad \text{stąd szukana częstość kołowa}$$

wynosi:

$$\omega = \sqrt{\frac{48EI}{m \cdot l^3}} \quad (11.6)$$

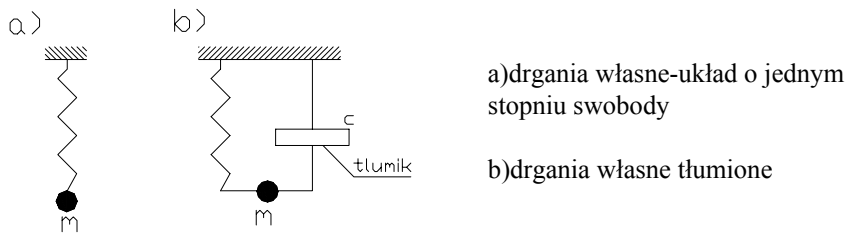
przy czym $m = \rho \cdot l \cdot A$ (A-pole przekroju poprzecznego belki).

1. 2. Drgania własne, tłumione.

Tłumienie drgań jest wynikiem działania sił oporu oznaczanych jako R . Siły te działają w ruchu zwanym *Voigt*. Zakładamy w nim tłumienie lekkie (wiskotyczne) proporcjonalne do prędkości ruchu, co zapisujemy:

$$R \sim \dot{c} \cdot \dot{q}(t)$$

Na rysunku (rys.11.5) widzimy ciało o masie m drgające swobodnie (bez tłumienia) i podczas tłumienia drgań.



Rys.11.5

Równanie ruchu z uwzględnieniem tłumienia przyjmuje postać:

$$m \cdot \ddot{q}(t) + c \cdot \dot{q}(t) + \kappa(t) = 0 \quad (11.7)$$

gdzie

c - stała tłumienia

przy wprowadzeniu zmiennej $\rho = \frac{c}{2m}$ równanie przechodzi do postaci:

$$\ddot{q}(t) + 2\rho \cdot \dot{q}(t) + \omega^2 \cdot q(t) = 0 \quad (11.8)$$

ρ – współczynnik tłumienia drgań.

Rozwiązaniem równania ruchu (wzór 11.8) będzie funkcja postaci: $q(t) = Ae^{rt}$.

Podstawiając ją do równania otrzymamy równanie charakterystyczne postaci:

$$r^2 + 2\rho \cdot r + \omega^2 = 0 \quad (11.9)$$

Rozwiązując je możemy otrzymać trzy przypadki:

$$\Delta = 4\rho^2 - 4\omega^2 = 4(\rho^2 - \omega^2) \Rightarrow \begin{cases} < 0 \\ > 0 \\ = 0 \end{cases}$$

♦ Rozważamy małe tłumienia $\rho < \omega$

Możliwe są dwa rozwiązania:

$$r_1 = -\rho - i\sqrt{\omega^2 - \rho^2} \quad r_2 = -\rho + i\sqrt{\omega^2 - \rho^2}$$

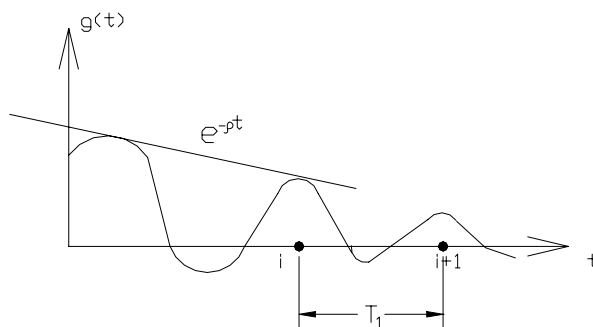
Rozwiązującą funkcją jest funkcja postaci:

$$q(t) = Ae^{-\rho t} \sin(\omega_1 t + \varphi) \quad (11.10)$$

co jest równoważne rozwiązaniu:

$$q(t) = e^{-\rho t} \sin(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t) \quad (11.11)$$

Wykres (rys.11.6) poniżej obrazuje funkcję rozwiązującą (wzór 11.10):



Rys.11.5

gdzie:

T_1 – okres drgań własnych tłumionych wynoszący:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad \text{a} \quad \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \rho^2}$$

Miarą tłumienia jest to z jaką szybkością następuje redukcja amplitudy, czyli relacja między dwiema kolejnymi amplitudami podobnych stanów. I tak:

$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \frac{q_{i+1}}{q_i}$. Podstawiając do funkcji rozwiązującej (11.10) otrzymujemy:]

$$\text{przy założeniu, że: } \sin(\omega_1 t + e) = 1 \quad \frac{q_{i+1}}{q_i} = \frac{Ae^{-\rho(t+T_1)}}{Ae^{-\rho t}} \Rightarrow$$

$$\frac{q_{i+1}}{q_i} = e^{-\rho T_1} = e^{-\lambda} \tag{11.12}$$

przy czym

$$\lambda = \left| \ln \frac{q_{i+1}}{q_i} \right| = \rho \cdot T_1 - \text{logarytmiczny dekrement mienia.}$$

♦ Silne tłumienie $\rho > \omega$

Możliwe są dwa rozwiązania:

$$r_1 = -\rho - \sqrt{\omega^2 - \rho^2} \quad r_2 = -\rho + \sqrt{\omega^2 - \rho^2}$$

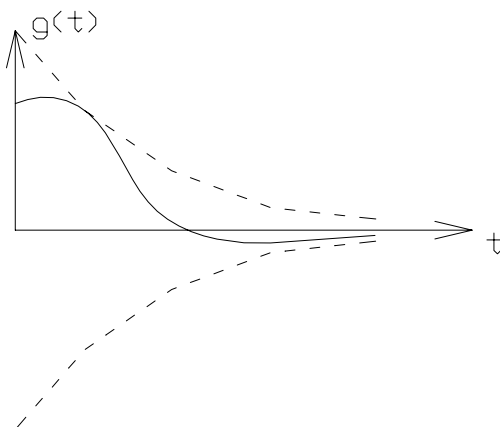
Funkcja rozwiązująca przyjmuje postać:

$$q(t) = e^{-\rho t} (c_1 \operatorname{ch} \omega_1 t + c_2 \operatorname{sh} \omega_1 t) \tag{11.13}$$

gdzie:

$$\overline{\omega}_1 = \sqrt{\rho^2 - \omega^2}$$

W tym przypadku wykres funkcji rozwiązującej wygląda następująco (rys.11.6):



Rys.11.6

- ♦ W trzecim ostatnim przypadku gdy $\rho = \omega$ funkcja rozwiązująca jest postaci:

$$q(t) = e^{-\rho t} (c_1 t + c_2) \quad (11.14)$$

a jej wykres jest taki jak przy silnym tłumieniu(rys.11.6).