

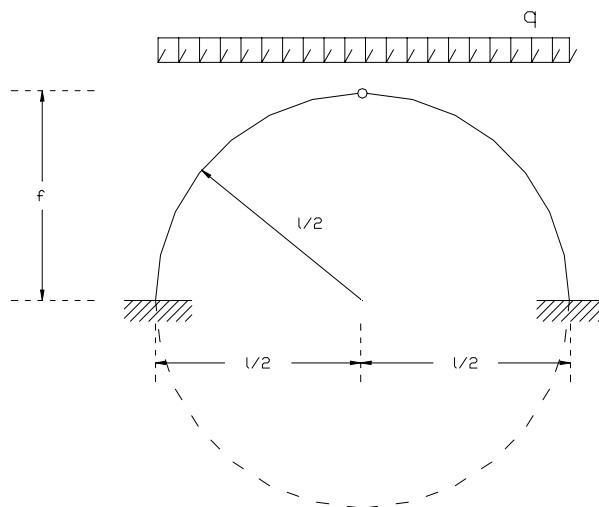
Olga Kopacz, Adam Łodygowski, Krzysztof Tymber,
Michał Płotkowiak, Wojciech Pawłowski
Konsultacje naukowe: prof. dr hab. Jerzy Rakowski
Poznań 2002/2003

1. SZCZEGÓLNE PRZYPADKI ŁUKÓW.

1.1 Łuk jednoprzegubowy kołowy.

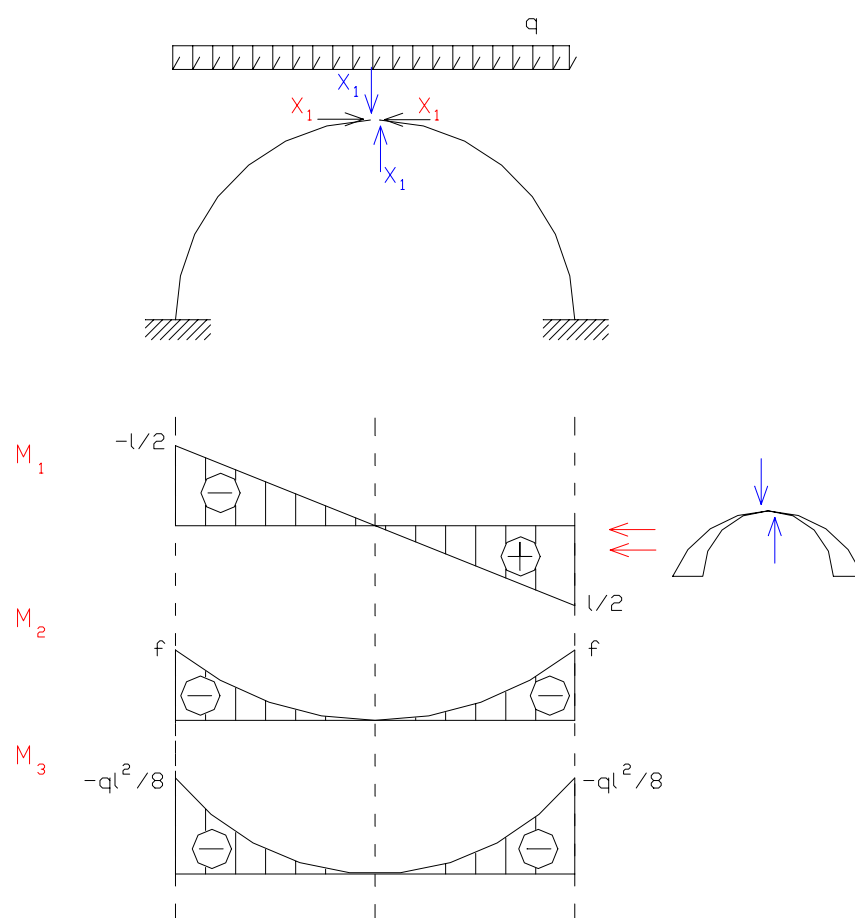
Dla łuku jak na rysunku (Rys.1.1) dla obciążenia układ podstawowy (Rys.1.2) i wykonuję dla niego wykresy momentów .

schemat rzeczywisty



Rys.1.1

schemat zastępczy



Rys.1.2

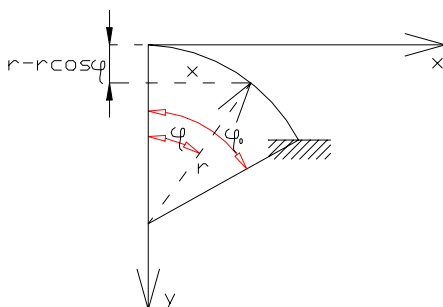
Układ równań kanonicznych przyjmuje zatem postać:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

Poszczególne współczynniki wyznaczamy zaś, z zależności:

$$\delta_{ik} = \int \frac{M_i M_k}{EI} ds \quad (1.1)$$

przy czym każdemu punktowi na łuku w układzie współrzędnych x, y odpowiada punkt o współrzędnych biegunowych r, φ stąd:



$$\cos \varphi = \frac{r - y}{r} \Rightarrow y = r - r \cos \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cdot \sin \varphi$$

$$M_1 = 1 \cdot x = r \cdot \sin \varphi$$

$$M_2 = -r(1 - \cos \varphi) = -y$$

$$M_P^0 = \frac{-qx^2}{2} = \frac{-q}{2} r^2 \sin^2 \varphi$$

współczynniki wynoszą:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0$$

$$\delta_{11} = \int_s \frac{M_1^2}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} r^2 \cdot \sin^2 \varphi r \cdot d\varphi = \frac{1}{EI} r^3 \int \sin^2 \varphi \cdot d\varphi =$$

$$\frac{r^3}{EI} \left[\frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]_{-\varphi_0}^{\varphi_0} = \varphi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_0$$

$$\delta_{22} = \int_s \frac{M_2^2}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} r^3 (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{EI} r^3 \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (1 - 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{EI} r^3 \left[\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} 1 \cdot d\varphi - 2 \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \cos \varphi d\varphi + \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \cos^2 \varphi d\varphi \right] =$$

$$= \frac{1}{EI} r^3 \left(3\varphi_0 - 4 \sin \varphi_0 + \frac{1}{2} \sin 2\varphi_0 \right)$$

$$\delta_{11} = \int_s \frac{M_1^2}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} r^2 \cdot \sin^2 \varphi r \cdot d\varphi = \frac{1}{EI} r^3 \int \sin^2 \varphi \cdot d\varphi =$$

$$= \frac{r^3}{EI} \left[\frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]_{-\varphi_0}^{\varphi_0} = \varphi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_0$$

$$\delta_{2P} = \int_s \frac{M_2 \cdot M_P}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} r(1 - \cos \varphi) \cdot \frac{q}{2} r^2 \sin^2 \varphi \cdot r \cdot d\varphi =$$

$$= \frac{1}{EI} \frac{q}{2} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (r - r \cdot \cos \varphi) r^2 \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{EI} \frac{q}{2} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} r^4 (\sin^2 \varphi - \cos \varphi \sin^2 \varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{r^4}{EI} \frac{q}{2} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (\sin^2 \varphi - \cos \varphi \cdot \sin^2 \varphi) d\varphi = \frac{r^4}{EI} \frac{q}{2} \left[\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \sin^2 \varphi d\varphi - \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \cos \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \right]$$

$$= \frac{r^4}{EI} \cdot \frac{q}{2} \left[\left(\frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_{-\varphi_0}^{\varphi_0} - \left(\frac{1}{1(2+1)} \sin^{2+1} \varphi \right) \Big|_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \right] =$$

$$\frac{r^4}{EI} \cdot \frac{q}{2} \left[\varphi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_0 - \left(\frac{1}{3} \sin^3 \varphi_0 - \frac{1}{3} \sin^3 (-\varphi_0) \right) \right] = \frac{r^4}{EI} \cdot \frac{q}{2} \left[\varphi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_0 - \frac{2}{3} \sin^3 \varphi_0 \right]$$

Przy czym:

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{8}{10} \Rightarrow \varphi_0 = 53^\circ 12'$$

Dalszy ciąg postępowania wygląda jak w każdym innym łuku (patrz wykład poprzedni).

1.2 Łuk bezprzegubowy-linie wpływu nadliczbowych.

Powiedzmy, że mamy łuk bezprzegubowy (Rys.1.3) i chcemy wyznaczyć linie wpływu nadliczbowych. Układ ten jest układem trzykrotnie niewyznaczalnym. Wygodne jest tu wykorzystać metodę bieguna sprężystego. Schemat podstawowy przyjmujemy przecinając łuk jak na rysunku poniżej (Rys.1.4) Otrzymamy wtedy układ równań kanonicznych przyjmując postać:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \Delta_{2P} = 0 \\ \delta_{321} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3P} = 0 \end{cases}$$

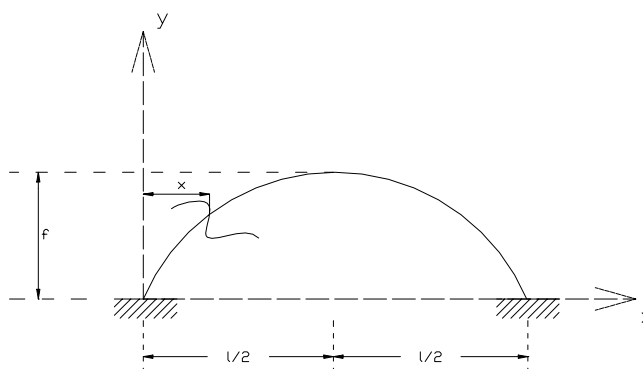
Położenie bieguna sprężystego określamy wielkością e z warunku

$$\int \frac{M_1 M_2}{EI} ds = 0 \text{ stąd:}$$

$$e = \frac{\int_s y \frac{J_c}{J} ds}{\int_s \frac{J_c}{J} ds} = \frac{\int_x y \frac{J_c}{J_c / \cos \varphi \cos \varphi} dx}{\int_x \frac{J_c}{J_c / \cos \varphi \cos \varphi} dx} = \frac{\int_{\xi} y \frac{1}{2} d\xi}{\int_{\xi} \frac{1}{2} d\xi} = \frac{2 \int_0^1 f \cdot \xi^2 d\xi}{2 \int_0^1 \xi^2 d\xi} = \frac{f \frac{\xi^3}{3} \Big|_0^1}{\xi \Big|_0^1} = \frac{f}{3}$$

Funkcją opisującą krzywiznę jest: $\varphi = \frac{4f}{l^2} x(1-x)$, a $I(x) = \frac{I_0}{\cos \varphi}$.

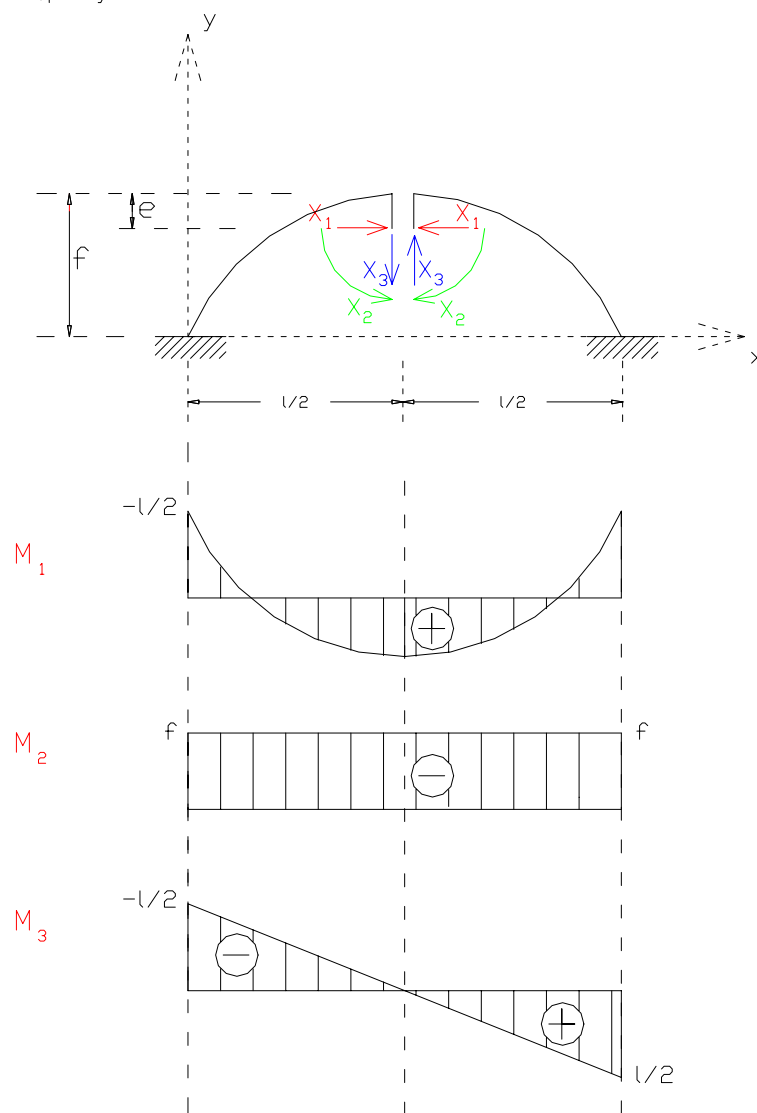
schemat rzeczywisty



Rys.1.3

WYKŁADY Z MECHANIKI BUDOWLI
SZCZEGÓLNE PRZYPADKI ŁUKÓW, STOPIEŃ STAT. NIEWYZNACZALNOŚCI

schemat zastępczy



Rys.1.4

Współczynniki δ_{ik} obliczamy zgodnie z wzorem (1.1):

$$\delta_{ik} = \int \frac{M_i M_k}{EI} ds$$

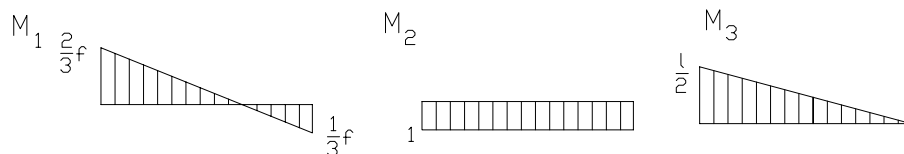
Spójrzmy na wykresy momentów (Rys. 1.4) (Uwaga! na biegunie nie wykonujemy wykresów-jego $I = \infty$) okazuje się, że wprowadzenie bieguna sprężystego powoduje obniżenie wykresu momentów M_1 -otrzymaliśmy zatem funkcję dwuznakową-suma pól

równa jest zeru! Zatem $\delta_{13}, \delta_{23} = 0$ a ponieważ $e = \frac{f}{3}$ stąd i $\delta_{12}, \delta_{13} = 0$ Nasz

układ równań kanonicznych sprowadza się zatem do postaci:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2P} = 0 \\ \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3P} = 0 \end{cases}$$

Współczynniki δ_{ik} określamy z wyżej wypisanego wzoru (1.1) korzystając z twierdzenia Wereszczagina-Mohra.



$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} f \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} f - \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{3} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{f}{3} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{f}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} f \right) \right] = \frac{l \cdot f^2}{18EI}$$

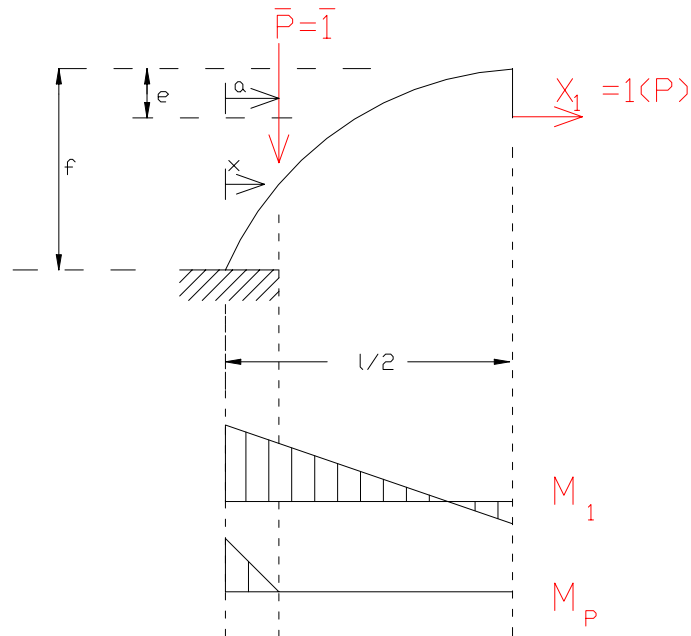
$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left(\frac{l}{2} \cdot 1 \cdot 1 \right) = \frac{l}{2EI}$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \right) = \frac{l^3}{24EI}$$

Szukane linie wpływu określamy zależnością:

$$lW X_i = \frac{-\Delta_{iP}}{\beta_{ii}} \quad (1.2)$$

Musimy zatem wyznaczyć zatem: $\Delta_{p1}(x), \Delta_{p2}(x), \Delta_{p3}(x)$. Nasz łuk jest łukiem symetrycznym zatem dalsze postępowanie przeprowadzimy na jego połowce (Rys. 1.5)



Rys.1.5

W celu wyznaczenia $\Delta_{P_1}(x)$ wyznaczamy wykresy momentów od nadliczbowej i zadanej siły $P = \bar{1}$ (rys.1.5). Współczynnik określony jest wzorem :

$$\Delta_{P_1}(x) = \int_0^l \frac{\bar{M} \cdot M_1}{EI_0} ds \quad (1.3)$$

Określmy $\Delta_{P_1}(x)$ jako funkcję a skoro $\bar{M} = -\bar{1}(a-x)$ to powyższy związek przechodzi do postaci :

$$\Delta_{P_1}(a) = \int_0^a \frac{(x-a) \left[\frac{4f}{l^2} x(l-x) - \frac{2}{3} f \right] \cdot M_1}{EI_0} dx = \frac{f}{EI_0} \cdot \frac{1}{3} \cdot \alpha^2 (\alpha - 1)^2$$

przy czym $\alpha = \frac{a}{l}$. Postępując analogicznie otrzymujemy :

$$\Delta_{P_2}(a) = \int_0^a \frac{\bar{M} \cdot M_2}{EI_0} dx = \frac{-l^2}{EI_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot \alpha^2$$

$$\Delta_{P_3}(a) = \int_0^a \frac{\bar{M} \cdot M_3}{EI_0} dx = \frac{l^3}{EI_0} \cdot \frac{1}{12} \cdot \alpha^2 (3 - 2\varepsilon)$$

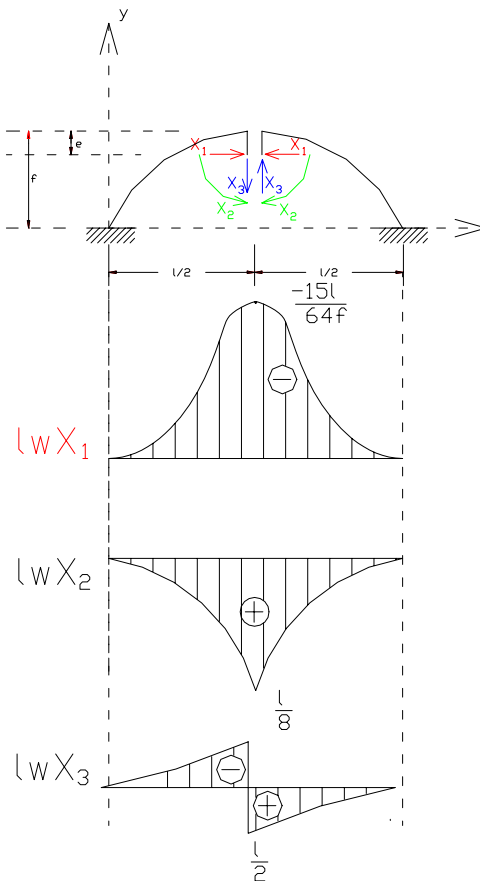
Linie wpływu zatem dla naszej umownej części po zamianie parametru a , na współrzędną x określone są następująco :

$$lwX_1 = \frac{-15}{4} \cdot \frac{l}{f} \cdot \xi^2 (\xi - 1)^2$$

$$lwX_2 = \frac{l}{2} \cdot \xi^2$$

$$lwX_3 = \xi^2 (2\xi - 3)$$

Na poniższym rysunku przedstawiono wyżej określone linie wpływu nadliczbowych(rys.1.6).

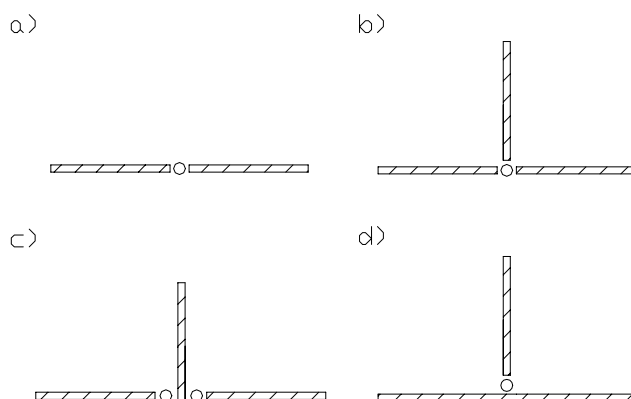


Rys.1.6

2. DODATKI .

2.1 .Stopień statycznej niewyznaczalności

Stopień statycznej niewyznaczalności można wyznaczyć wieloma sposobami. W tym rozdziale przytoczymy trzy z nich. Na początku zdefiniujemy krotność przegubów. Na poniższych rysunkach widzimy kilka rodzajów przegubów z różną liczbą prętów się w nich schodzących.



Rys.1.7

Pierwszy z nich jest przegubem jednokrotnym (rys.1.7 a). Oznacza to, że możliwy jest dowolny obrót w obrębie tego przegubu. Jeśli w węzle zbiegają się więcej niż dwa pręty (rys.1.6 b,c i d) mówimy o przegubach wielokrotnych. Ich nazwa pochodzi od liczby zbiegających się prętów. Przegub w którym zbiegają się dwa pręty połączone jak na rysunku 1.6 d nazywamy przegubem jednokrotnym. Krotność przegubu oznaczamy ogólnie jako :

$$K_R = k - 1 \quad (1.4)$$

gdzie :

k – liczba prętów zbiegających się w pełnym przegubie.

Przedstawmy w skrócie wspomniane metody określania stopnia statycznej niewyznaczalności :

♦ **Sposób 1**

Sposób ten polega na zamianie prętów na pojedyncze tarcze w wyniku dokonania cięcia. Stopień statycznej niewyznaczalności określamy wg wzoru :

$$SSN = p - 3 \cdot t \quad (1.5)$$

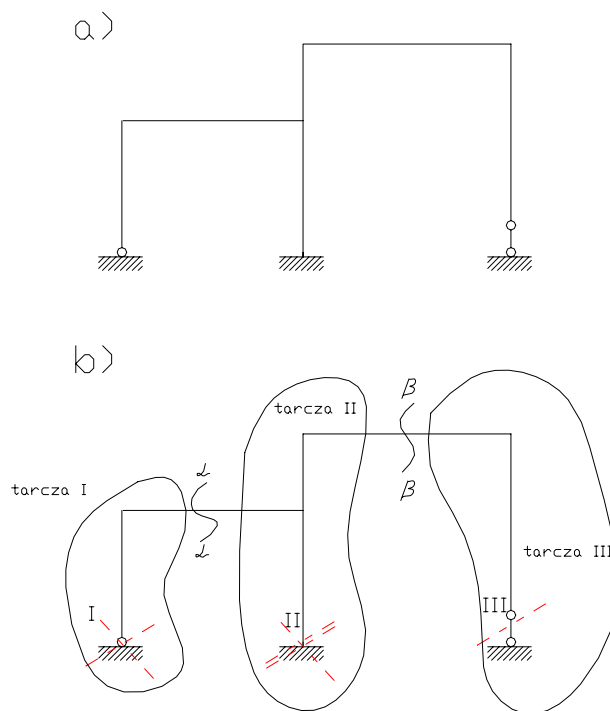
gdzie :

p – liczba przeciętych prętów

t – liczba utworzonych niezależnych tarcz.

Przykład 1

Weźmy układ prętów jak na rysunku poniżej i spróbujmy określić jego SSN .



Rys.1.8

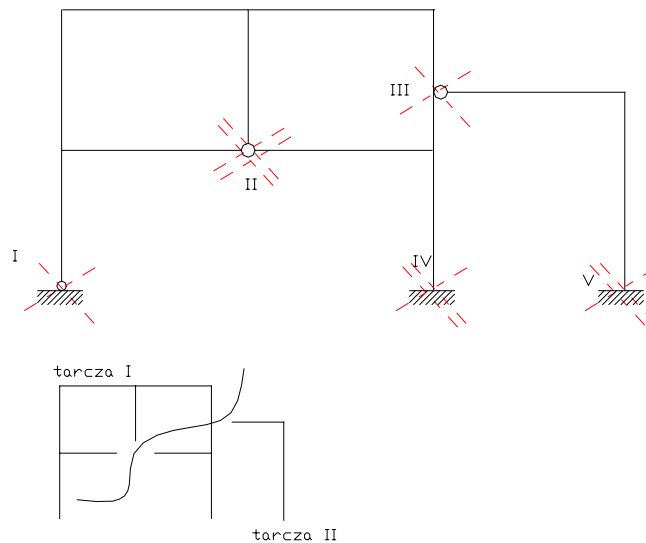
By odrzucić więź I musimy zrobić dwa cięcia(rys.1.8b), więź II trzy a trzeci tylko jedno cięcie. Z rysunku powyżej widać, że z przecięcia dodatkowo dwóch prętów górnych nasz układ prętowy przekształcił się w układ trzech niezależnych tarcz poza tym przecięcie $\alpha - \alpha$ i $\beta - \beta$ to dodatkowe zwolnienie sześciu więzów (3+3). Zatem zgodnie ze wzorem (1.5) stopień statycznej niewyznaczalności :

$$SSN = p - 3 \cdot t = (6 + 3 + 3) - 3 \cdot 3 = 3$$

Przykład 2

Na rysunku 1.9 przedstawiona jest rama (układ prętów). Sposób postępowania jest analogiczny jak w przykładzie pierwszym. Określamy liczbę cięć i liczbę tarcz

powstałych w ich wyniku. Liczba cięć dla poszczególnych więzów związana jest z krotnością przegubów stąd cztery cięcia w węźle II $(K - 1) \cdot 2 = (3 - 1) \cdot 2 = 4$.



Rys.1.9

W tym przypadku dokonaliśmy czternastu cięć uzyskując przy tym dwie tarcze. Zatem stopień statycznej niewyznaczalności :

$$SSN = p - 3 \cdot t = 14 - 3 \cdot 2 = 8$$

układ jest ośmiokrotnie statycznie niewyznaczalny.

♦ **Sposób 2**

Sposób ten polega na wprowadzeniu dodatkowych więzów, które usztywnią układ. Praktycznie sposób ten polega na wprowadzeniu w miejsce podór utwierdzenia i zastąpieniu przegubów podporami sprężystymi. Stopień statycznej niewyznaczalności układu :

$$SSN = N - d \tag{1.6}$$

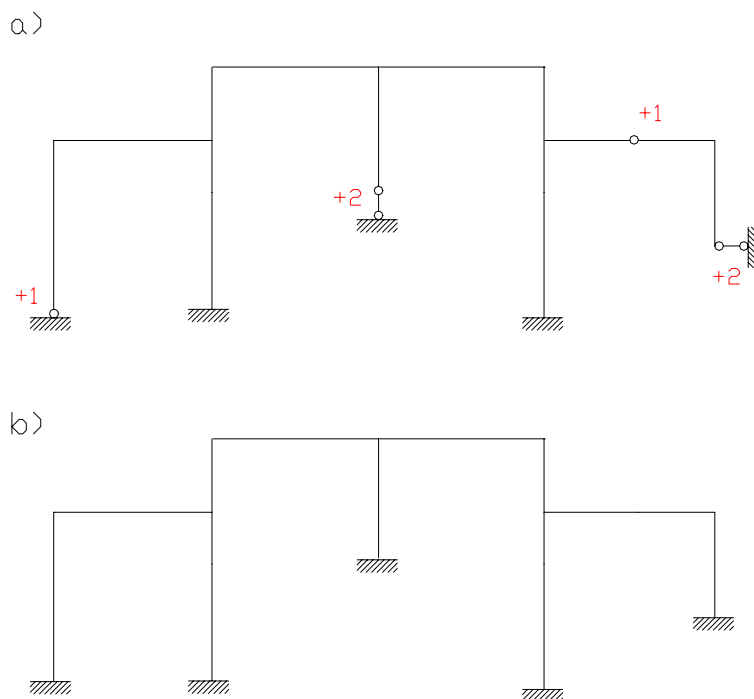
gdzie :

N – stopień statycznej niewyznaczalności nowego przesztynionego układu

d – liczba wprowadzonych dodatkowych więzów.

Przykład 1

Na poniższym rysunku (rys.1.10) pokazano układ prętowy przed i po usztywnieniu. Liczba więzów potrzebnych do usztywnienia pokazana została na rysunku (rys.1.10b)



Rys.1.10

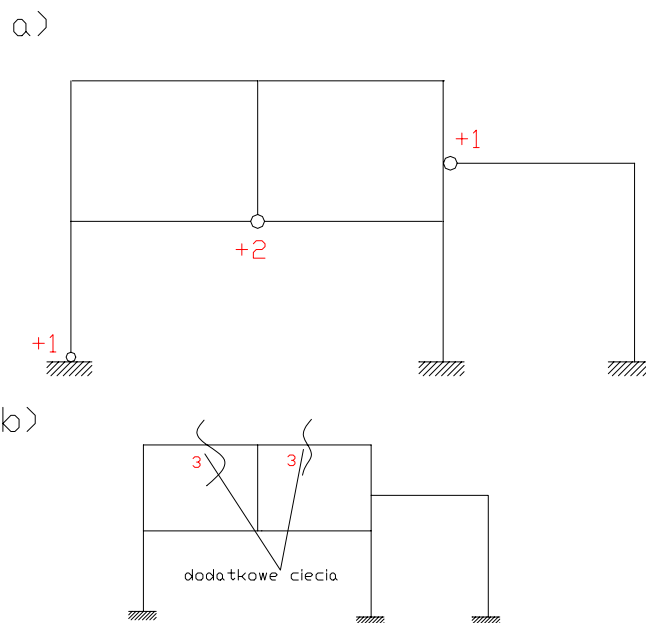
Stopień statycznej niewyznaczalności układu wynosi zatem :

$$SSN = N - d = 12 - 6 = 6$$

Przykład 2

Przyjrzyjmy się teraz ramie z rysunku 1.8. Należy tu zwrócić uwagę na to, iż pręty górne zostały przecięte w celu usunięcia układu zamkniętego, który tworzą owe pręty. Stopień statycznej niewyznaczalności nowego przesztywnionego układu wynosi : $N = 12$ (rys.1.10), liczba wprowadzonych więzów cztery. Zatem :

$SSN = N - d = 12 - 4 = 8$ otrzymaliśmy wynik jak w przypadku określania SSN metodą pierwszą.



Rys.1.11

♦ **Sposób 3**

Można udowodnić, że stopień statycznej niewyznaczalności :

$$SSN = r + p_1 + 2p_2 + 3p_3 - (2w_2 + 3w_3) \quad (1.7)$$

gdzie :

r – liczba reakcji (albo liczba wieżów podporowych)

p_1 – liczba prętów zakończonych obustronnie przegubami

p_2 – liczba prętów zakończonych z jednej strony przegubem z drugiej sprężystie zamocowanych

p_3 – liczba prętów obustronnie sprężystie zamocowanych

w_2 – liczba węzłów przegubowych

w_3 – liczba węzłów w których występują sprężystie zamocowane pręty.

Przykład 1

Dla układu z rysunku 1.10 możemy określić zgodnie z rysunkiem poniżej (rys.1.12) :

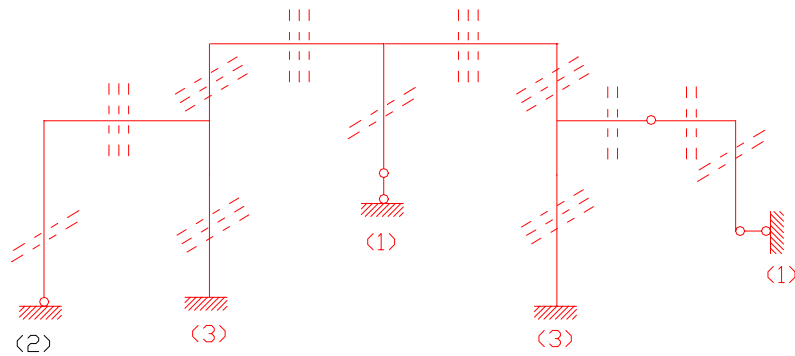
$$r = 10$$

$$p_1 = brak$$

$$p_2 = 5 \text{ (oznaczono // na rysunku)}$$

$$p_3 = 7 \text{ (oznaczono /// na rysunku)}$$

$$\left. \begin{array}{l} w_2 = 4 \\ w_3 = 9 \end{array} \right\} \text{ do } w_2, w_3 \text{ dodajemy także przeguby i utwierdzenia}$$



Rys.1.12

$$SSN = 41 - 35 = 6$$

Przykład 2

Mamy układ jak na rysunku (rys.1.13). Postępując analogicznie do przykładu 1 otrzymujemy :

$$r = 2 + 3 = 5$$

$$p_1 = brak$$

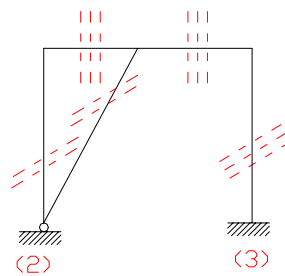
$$p_2 = 2$$

$$p_3 = 3$$

$$w_2 = 1$$

$$w_3 = 4$$

$$SSN = 4$$



Rys.1.13