

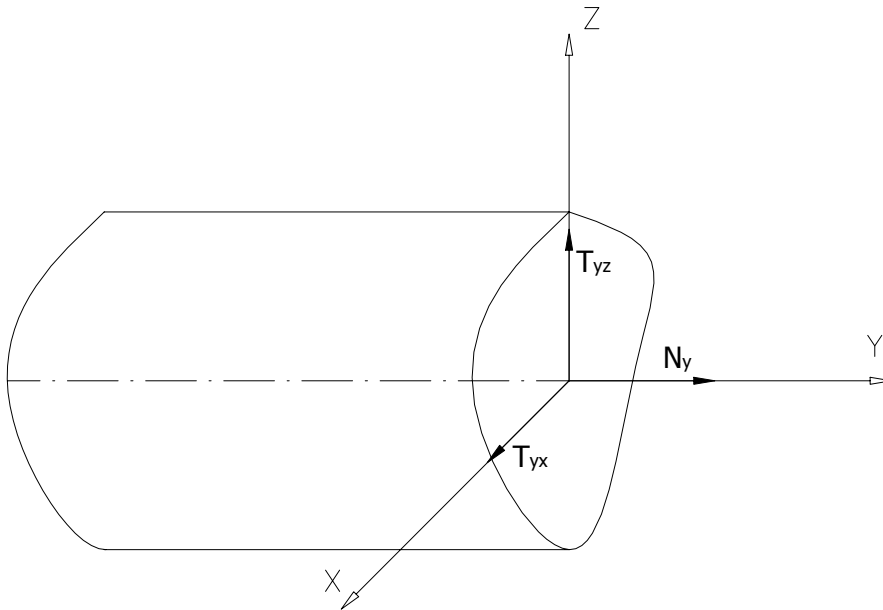
Olga Kopacz, Adam Łodygowski, Krzysztof Tymper,  
Michał Płotkowiak, Wojciech Pawłowski  
Konsultacje naukowe: prof. dr hab. JERZY RAKOWSKI  
Poznań 2002/2003

## MECHANIKA BUDOWLI 2

### 1. UKŁADY PRZESTRZENNE

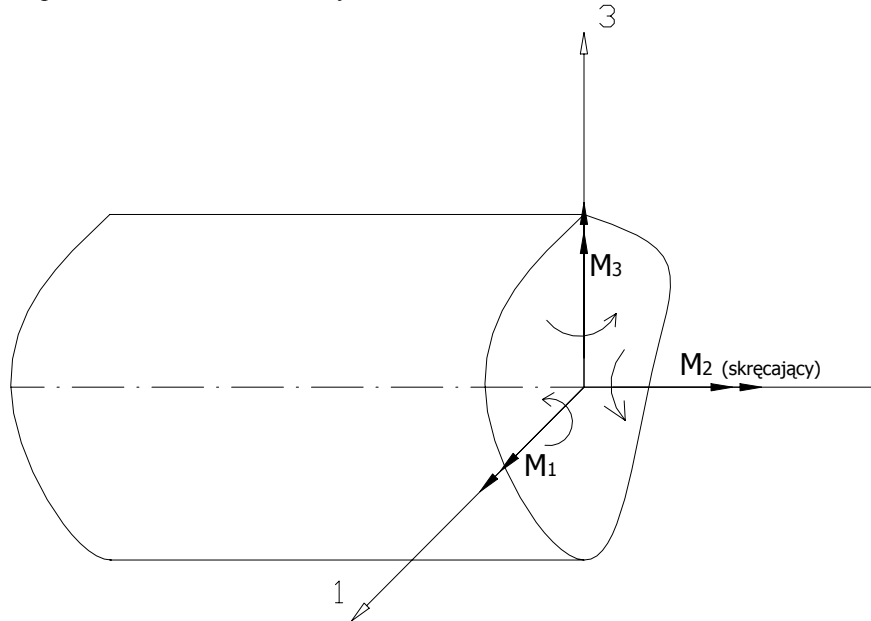
O przestrzenności nie świadczy tylko geometria ale również sposób obciążenia. Układy przestrzenne wykazują trójwymiarowy stan przemieszczeń.

Na rys.1 pokazane są dodatnie zwroty sił. Należy zwrócić szczególną uwagę na płaszczyznę przecięcia pręta (dodatnia lub ujemna), która determinuje zwroty dodatnich sił.



Rys. 1

Na rys.2 pokazane są dodatnie zwroty momentów



Rys. 2

Dla przeciętego pręta w dowolnym miejscu muszą być spełnione równania równowagi

$$\begin{aligned}
 \sum P_1 = 0 \quad \sum M_1 = 0 &\rightarrow P_3 \cdot x_2 - P_2 \cdot x_3 = 0 \\
 \sum P_2 = 0 \quad \sum M_2 = 0 &\rightarrow P_1 \cdot x_3 - P_3 \cdot x_1 = 0 \\
 \sum P_3 = 0 \quad \sum M_3 = 0 &\rightarrow P_2 \cdot x_1 - P_1 \cdot x_2 = 0
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\delta_{ik} = \sum \left\{ \int_S \frac{M_{1i} \cdot M_{1k}}{EJ_1} ds + \int_S \frac{M_{3i} \cdot M_{3k}}{EJ_3} ds + \int_S \frac{M_{2i} \cdot M_{2k}}{GI_s} ds + \right. \\
 \left. + \int_S \frac{N_i \cdot N_k}{EA} ds + \int_S \frac{T_{1i} \cdot T_{1k}}{GA} \kappa_1 ds + \int_S \frac{T_{3i} \cdot T_{3k}}{GA} \kappa_3 ds \right\} \tag{2.2}$$

Gdzie

$GI_s$  - parametr charakteryzujący sztywność na skręcanie,

### Sztywność na skręcenia

W zależności od kształtownika i rodzaju materiału z jakiego został on wykonany, określa się sztywność na zginanie.

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (2.3)$$

G - moduł Kirchhoffa

Dla prostokąta:

$$I_S = k \cdot h \cdot b^3 \quad (2.4)$$

Gdzie:

k - współczynnik zależny od stosunku wysokości do szerokości prostokąta

B < h	h/b	1,0	2,0	3,0	∞
	k	0,1406	0,228	0,2633	0,333

Przy czym jako wysokość (h) rozumie się dłuższy bok prostokąta

Dla koła:

$$I_S = I_0 \quad (2.5)$$

Dla kształtowników:

$$I_S = \eta \cdot \frac{1}{3} \cdot \sum_i h_i \cdot b_i^3 \quad (2.6)$$

Gdzie h i b to wymiary pólki i średników traktowanych jako prostokąty

Współczynnik  $\eta$  jest zależny od kształtu elementu:

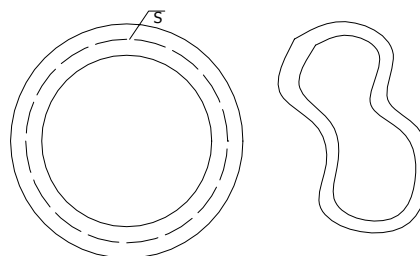
$\eta$	kątownik	dwuteownik	ceownik	teownik
	1	1,2	1,12	1,15

Zamknięty obszar cienkościenny:

$$I_S = \frac{4 \cdot \bar{\omega}^2 \cdot \delta}{s} \quad (2.7)$$

Gdzie:

- $\bar{\omega}$  - pole powierzchni zawarte w obrębie linii środkowej
- s - obwód linii środkowej
- $\delta$  - grubość (stała lub średnia)

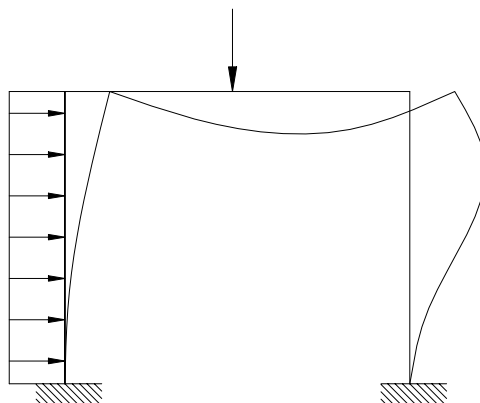


## 2. METODA PRZEMIESZCZEŃ

Starając się zrozumieć istotę metody przemieszczeń, najwygodniej jest ją przedstawić za pomocą analogii do metody sił, którą już poznaliśmy i przy użyciu której jesteśmy w stanie policzyć przemieszczenia i rozkład sił układów statycznie niewyznaczalnych.

	Metoda przemieszczeń	Metoda sił
1	niewiadomymi wielkościami są przemieszczenia węzłów	niewiadome są nadliczbowe siły
2	Ułożone równania kanoniczne metody przemieszczeń są równaniami równowagi (w ramach prostych- równania równowagi węzłów)	Ułożone równania kanoniczne metody sił są równaniami przemieszczeń
3	W metodzie przemieszczeń o liczbie niewiadomych decyduje liczba niezależnych obrotów i przesuwów	O liczbie niewiadomych metody sił decyduje stopień statycznej niewyznaczalności określony przez liczbę podpór i tarcz

Rozpatrzmy ramę płaską (rys.3) składającą się z prętów połączonych węzłami, które traktować będziemy jako tarcze doskonale sztywne.



Rys. 3

Rama obciążona jest dowolnymi siłami skupionymi lub obciążeniem ciągłym. Pod wpływem obciążeń układ odkształci się; w prętach powstanie stan naprężenia, którego składowymi uogólnionymi są  $M$ ,  $T$ ,  $N$ .

Pod wpływem przemieszczenia pręty podlegają deformacji a węzły doznają przemieszczeń. Stan przemieszczenia węzła charakteryzują trzy wielkości: kąt obrotu węzła  $\varphi$  oraz składowe przemieszczenia węzła: pionowa ( $v$ ) i pozioma ( $u$ ).

**Ważne:** w sformułowaniu metody przemieszczeń nie będziemy uwzględniać skracania i wydłużania się prętów pod wpływem działania obciążenia.

Posługiwać się będziemy pojęciami:

**Węzeł swobodny**- taki, który pod wpływem obciążenia układu może doznać przemieszczenia (u lub v).

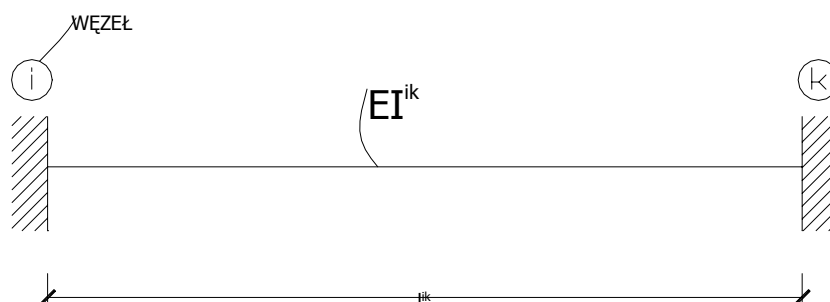
**Węzeł skrępowany**- (np. podporowe) węzły są utwierdzone- kąt obrotu i przesunięcie równe 0.

Przyjmijmy składowe stanu przemieszczenia węzła za wielkości niewiadome.

Gdybyśmy znali przemieszczenia węzłów, moglibyśmy wyznaczyć wielkości statyczne w prętach. Można bowiem traktować każdy pręt oddzielnie jako poddany działaniu obciążenia zewnętrznego oraz działaniu znanych przesunięć i obrotów jego przekrojów przywęzłowych. Zadanie to, przy użyciu metody sił, da się obliczyć dla każdego pręta.

Rozpatrując układ ramowy (rys.3) założmy, że wszystkie składowe stanu przemieszczenia węzłów swobodnych są równe zero. Otrzymamy wówczas układ prętów na obu końcach utwierdzonych. Obciążenie jednego pręta wywołuje wtedy stan naprężenia tylko w tym pręcie. Składowe stanu przemieszczenia przekrojów przywęzłowych są równe zero. Wielkości statyczne w dowolnym pręcie możemy wyznaczyć przy użyciu metody sił, traktując każdy z prętów jako oddzielny układ trzykrotnie statycznie niewyznaczalny.

**Przykład:**

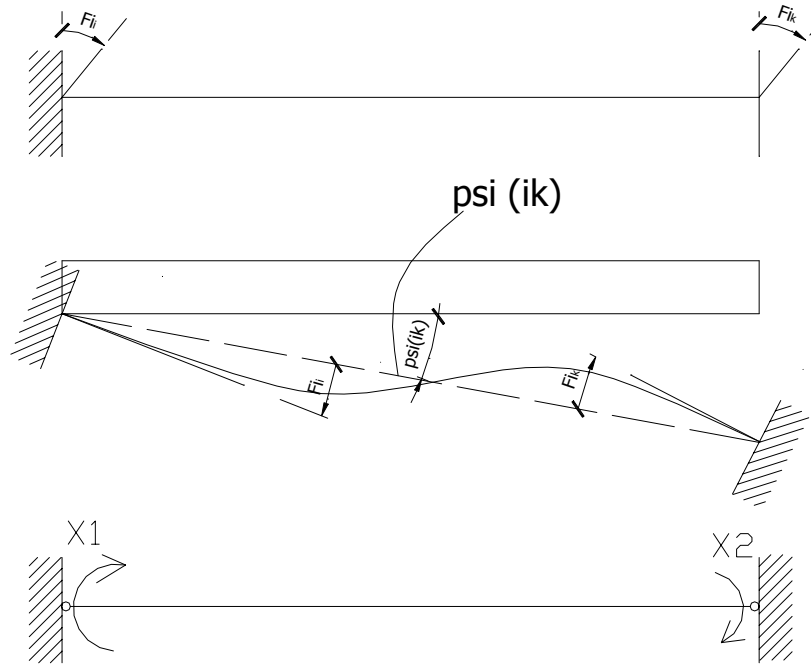


Rys. 4

Złożenia:

$$\begin{aligned} l_{ik} &= l \\ I_{ik} &= I \end{aligned} \quad (2.8)$$

Wymuszamy obroty podpory węzła „i” i „k” zgodnie z rys. 5



Rys. 5

Gdzie:

$\Psi(i,k)$  -  $\psi_{ik}$

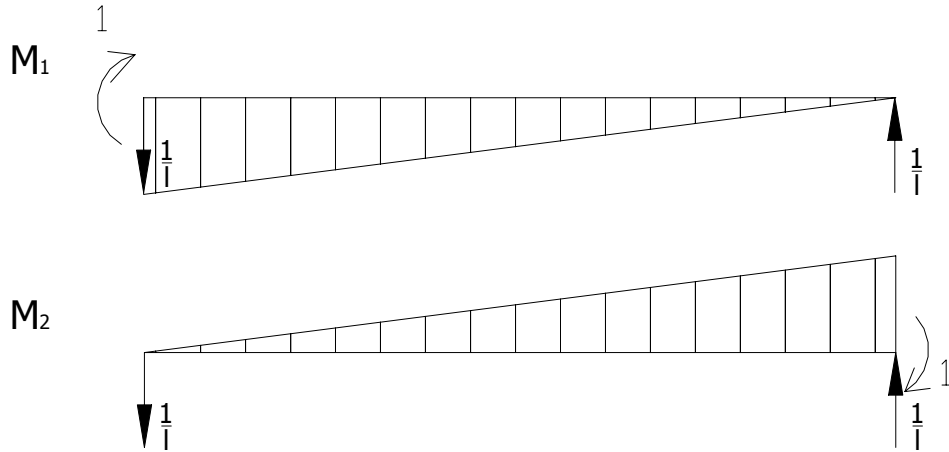
$F_i$  -  $\varphi_i$

Zgodnie z metodą sił, gdy występuje wymuszony obrót (osiadanie) można zapisać układ równań kanonicznych:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1\Delta} = 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2\Delta} = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Zgodnie z metodą sił rozwiązujemy układ równań.

Wykresy jednostkowe do obliczenia przemieszczeń  $\delta$  (rys.6)



Rys. 6

Obliczenia przemieszczeń w miejscach sił jedynkowych:

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} ds = \frac{l}{3EI} \\ \delta_{22} &= \int \frac{M_2 \cdot M_2}{EI} ds = \frac{l}{3EI} \\ \delta_{12} &= \int \frac{M_1 \cdot M_2}{EI} ds = -\frac{l}{6EI}\end{aligned}\quad (2.10)$$

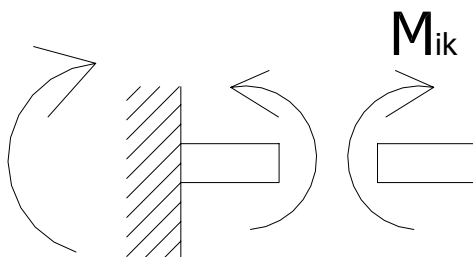
Obliczenia od osiadania:

$$\begin{aligned}\Delta_{1\Delta} &= -(\Delta_1 + \sum R_i \Delta) \\ \Delta_{1\Delta} &= -\varphi_1 - \frac{1}{l} \cdot V_i + \frac{1}{l} \cdot V_k = -\varphi_1 + \frac{V_k - V_i}{l} = -\varphi_1 + \psi_{ik} \\ \Delta_{2\Delta} &= -\varphi_1 + \psi_{ik}\end{aligned}\quad (2.11)$$

Podstawiając wyznaczone wielkości do układu równań i po rozwiązaniu go otrzymamy:

$$\begin{aligned}X_1 = M_{ik} &= \frac{2EI}{l} \cdot (2 \cdot \varphi_i + \varphi_k - 3 \cdot \psi_{ik}) \\ X_2 = M_{ki} &= \frac{2EI}{l} \cdot (2 \cdot \varphi_k + \varphi_i - 3 \cdot \psi_{ik})\end{aligned}\quad (2.12)$$

Otrzymane w ten sposób zależności są **WZORAMI TRANSFORMACYJNYMI** metody przemieszczeń, gdzie  $M_{ik}$  jest **przęsłowym momentem przywęzłowym** (rys.7).



Rys. 7

**Wzory transformacyjne:** określają zależności między przęsłowymi przywęzłowymi siłami wewnętrznymi a wymuszonymi przemieszczeniami podpór węzłowych.

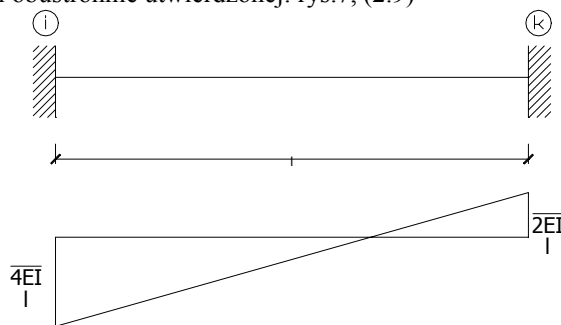
Korzystając z zależności (2.7) można łatwo wyprowadzić wzór na siły poprzeczne:

$$T_{ik} = T_{ki} = -\frac{6EI}{l^2} \cdot (\varphi_i + \varphi_k - 2 \cdot \psi_{ik}) \quad (2.13)$$

W podobny sposób można wyprowadzić zależności dla prętów: z przegubem z jednej strony lub z podporą ślizgową.

#### WZORY TRANSFORMACYJNE DLA PRĘTÓW RÓŻNIE PODPARTYCH

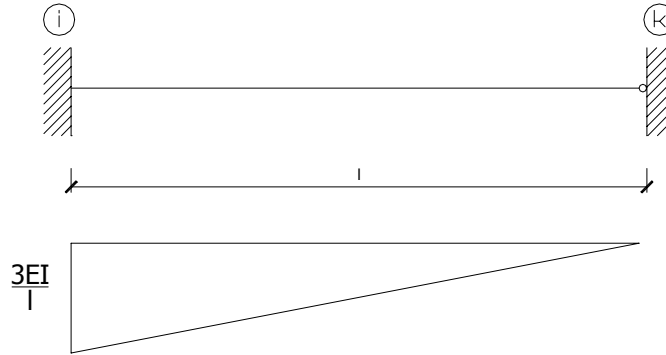
1. Dla belki obustronnie utwierdzonej: rys.7, (2.9)



Rys. 7

$$\begin{aligned} M_{ik} &= \frac{2EI}{l} \cdot (2 \cdot \varphi_i + \varphi_k - 3 \cdot \psi_{ik}) \\ M_{ki} &= \frac{2EI}{l} \cdot (2 \cdot \varphi_k + \varphi_i - 3 \cdot \psi_{ik}) \\ T_{ik} = T_{ki} &= -\frac{6EI}{l^2} \cdot (\varphi_i + \varphi_k - 2 \cdot \psi_{ik}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

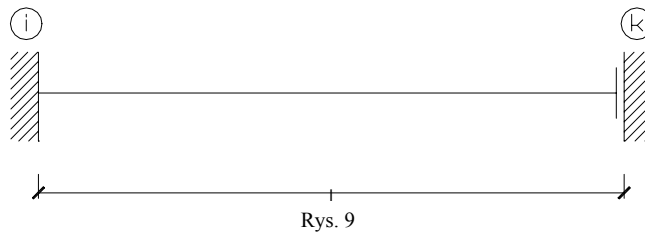
2. Dla belki z przegubem na jednym końcu: rys.8, (2.10)



Rys. 8

$$\begin{aligned}
 M_{ik} &= \frac{3EI}{l} \cdot (\varphi_i - \psi_{ik}) \\
 M_{ki} &= 0 \\
 T_{ik} = T_{ki} &= -\frac{3EI}{l^2} \cdot (\varphi_i - \psi_{ik})
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

3. Dla belki z podporą ślizgową na jednym końcu: rys.9, (2.11)

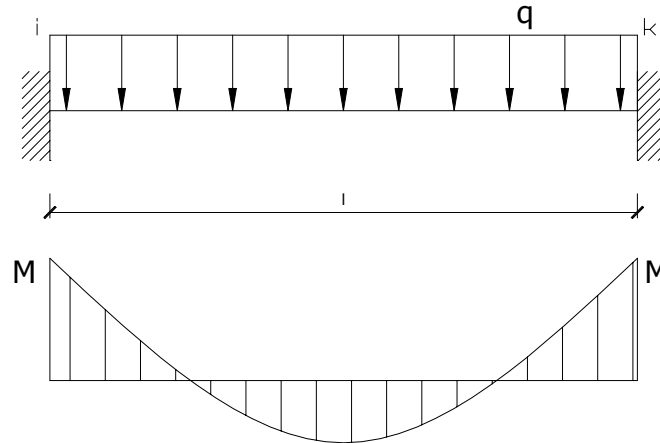


Rys. 9

$$\begin{aligned}
 M_{ik} &= \frac{EI}{l} \cdot (\varphi_i - \varphi_k) \\
 M_{ki} &= \frac{EI}{l} \cdot (\varphi_k - \varphi_i) \\
 T_{ik} = T_{ki} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

Podczas obliczeń metodą przemieszczeń wykorzystuje się również wykresy momentów dla obciążeń zewnętrznych. Oto kilka charakterystycznych przypadków:

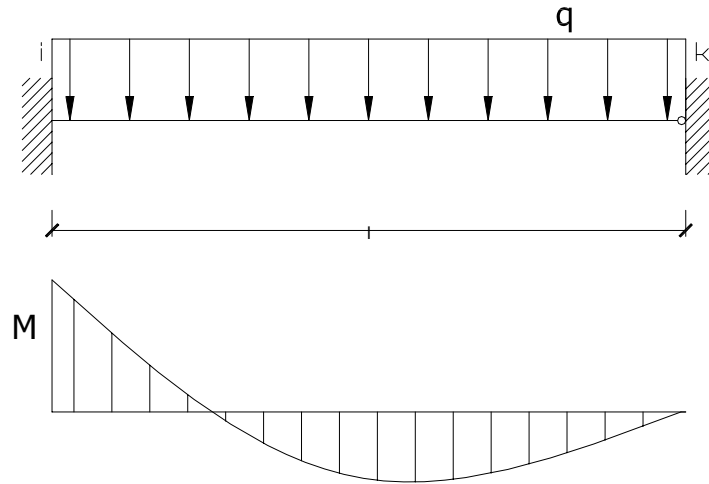
1. Obciążenie ciągłe dla pręta utwierdzonego:



Rys. 10

$$M_{ik} = -\frac{ql^2}{12} \quad M_{ki} = \frac{ql^2}{12} \quad M_{\max} = \frac{ql^2}{24} \quad (2.17)$$

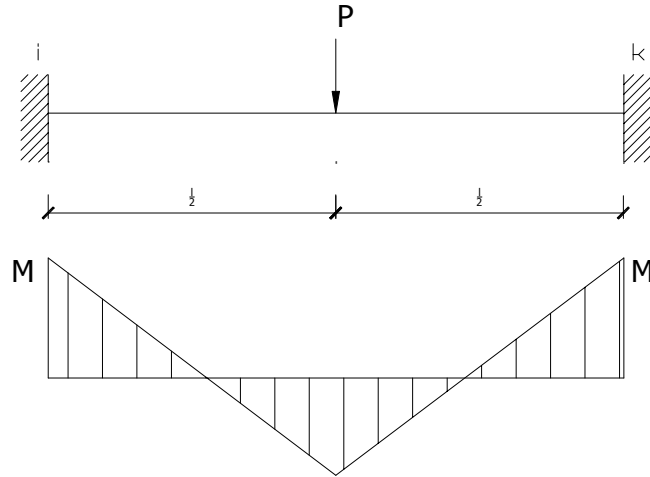
2. Obciążenie ciągłe dla pręta przegubowego:



Rys. 11

$$M_{ik} = -\frac{ql^2}{8} \quad M_{ki} = 0 \quad M_{\max} = \frac{9 \cdot q \cdot l^2}{128} \quad (2.18)$$

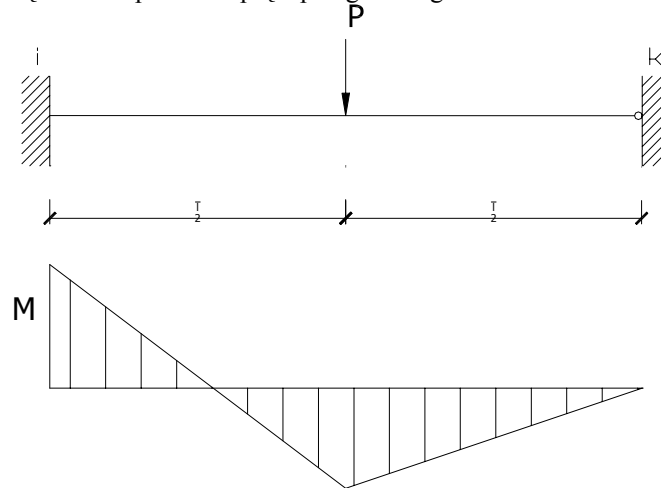
3. Obciążenie skupione dla pręta utwierdzonego:



Rys. 12

$$M_{ik} = -\frac{Pl}{8} \quad M_{ki} = \frac{Pl}{8} \quad M_{\max} = \frac{Pl}{8} \quad (2.19)$$

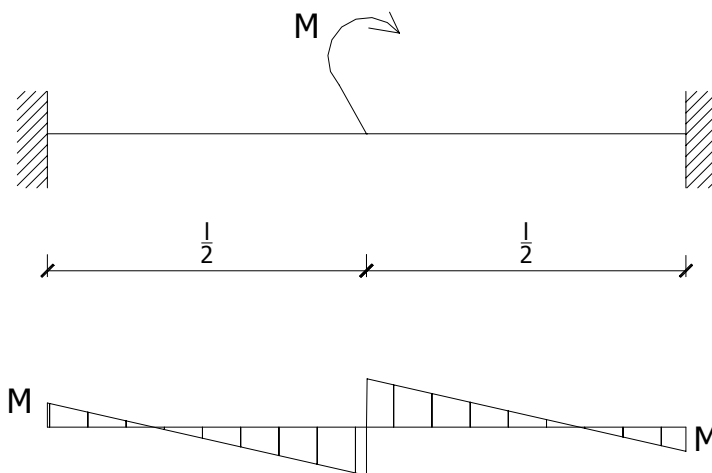
4. Obciążenie skupione dla pręta przegubowego:



Rys. 13

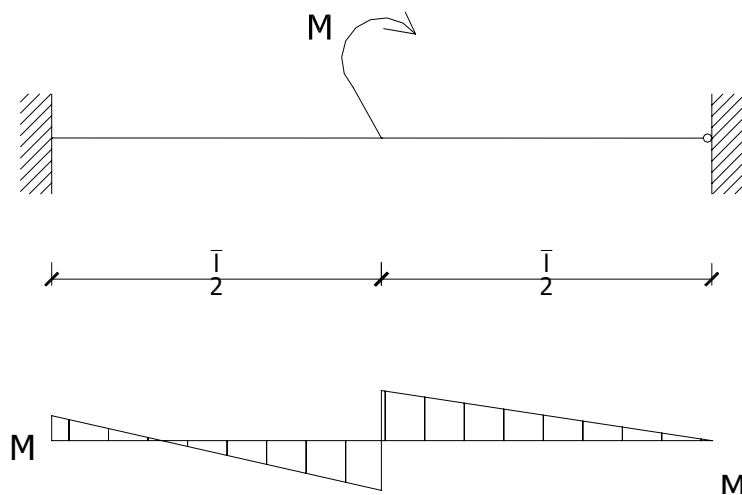
$$M_{ik} = -\frac{3}{16} \cdot Pl \quad M_{ki} = 0 \quad M_{\max} = \frac{5}{32} \cdot Pl \quad (2.20)$$

5. Obciążenie skupione dla pręta przegubowego:



Rys. 13

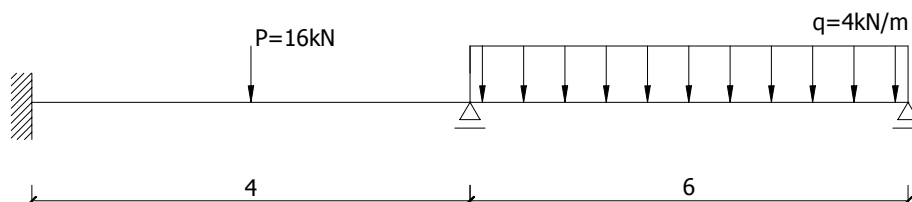
$$M_{ik} = -\frac{M}{4} \quad M_{ki} = -\frac{M}{4} \quad (2.21)$$



$$M_{ik} = -\frac{M}{8} \quad M_{ki} = 0 \quad (2.22)$$

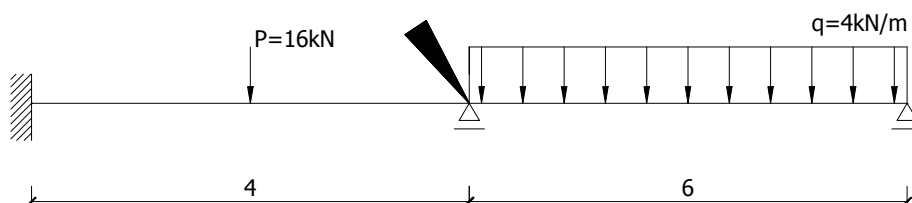
### PRZYKŁAD

Zadaną belkę (rys. 14) rozwiązać metodą przemieszczeń



Rys. 13

Zgodnie z założeniami należy zablokować możliwe przesuwu. W tym przypadku będzie to kąt obrotu na pośredniej podporze:

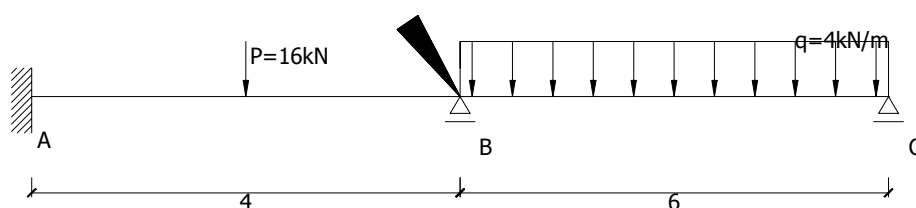


Rys. 14

Zapisujemy równanie z jednym przesuwem:

$$\{r_{11} \cdot \varphi_1 + R_{1P} = 0 \quad (2.23)$$

Korzystając ze wzorów transformacyjnych rysujemy wykres momentów na poszczególnych prętach (składnikach belki):



Rys. 14

Część belki AB to pręt obustronnie utwierdzony. Część BC to pręt utwierdzony w pkt. B i z podporą w pkt. C. Wykorzystując wzory transformacyjne (2.9 i 2.10) można zapisać:

Dla pręta AB:

$$\varphi_A = 0 \quad \varphi_B = 1 \quad u - \text{brak przesuwu}$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{l} \cdot (2 \cdot \varphi_A + \varphi_B - 3 \cdot \psi_{AB}) = \frac{2EI}{4} \quad (2.24)$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{l} \cdot (2 \cdot \varphi_B + \varphi_A - 3 \cdot \psi_{AB}) = EI$$

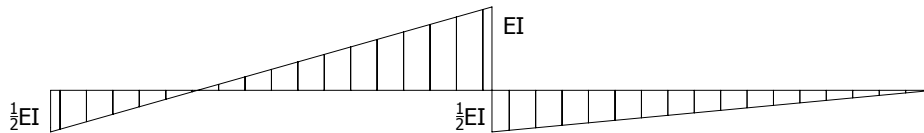
Dla pręta BC:

$$\varphi_B = 1 \quad \varphi_C = 0 \quad u - \text{brak przesuwu}$$

$$M_{BC} = \frac{3EI}{l} \cdot (\varphi_B - \psi_{BC}) = \frac{3EI}{6} \quad (2.25)$$

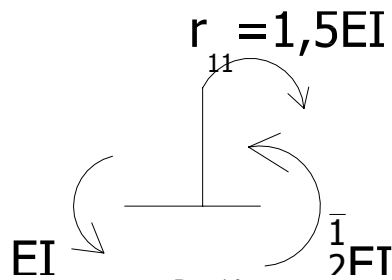
$$M_{CB} = 0$$

Po obliczeniu momentów rysuję wykres:



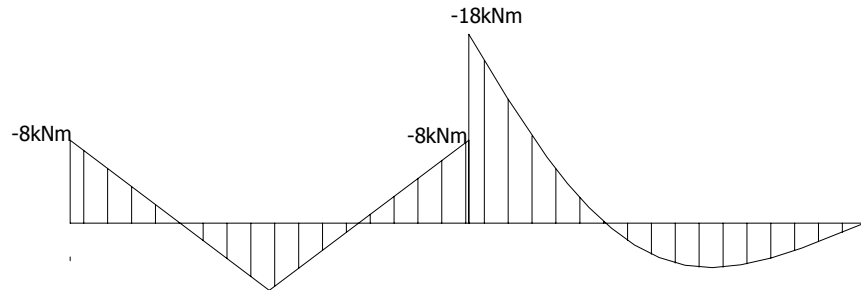
Rys. 15

Z równowagi węzła można wyznaczyć  $r_{11}$ :



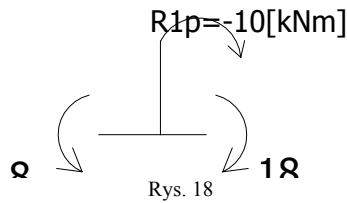
Rys. 16

Zgodnie z zależnościami (2.12 – 2.15) można narysować wykresy momentów od sił zewnętrznych:



Rys. 17

Z równowagi węzła można wyznaczyć  $R_{1P}$ :



Rys. 18

Obliczone wartości podstawia się do układu równań:

$$\begin{cases} r_{11} \cdot \varphi_1 + R_{1P} = 0 \\ 1,5EI \cdot \varphi_1 - 10 = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

$$\varphi_1 = \frac{20}{3 \cdot EI}$$

Korzystając ze wzoru superpozycyjnego lub ponownie podstawiając do wzorów transformacyjnych (z obliczonym kątem obrotu) obliczyć można końcowy wykres momentów:

$$M^n = M_0 + M_1 \cdot \varphi + M_1 \cdot \varphi + \dots$$

*AB*

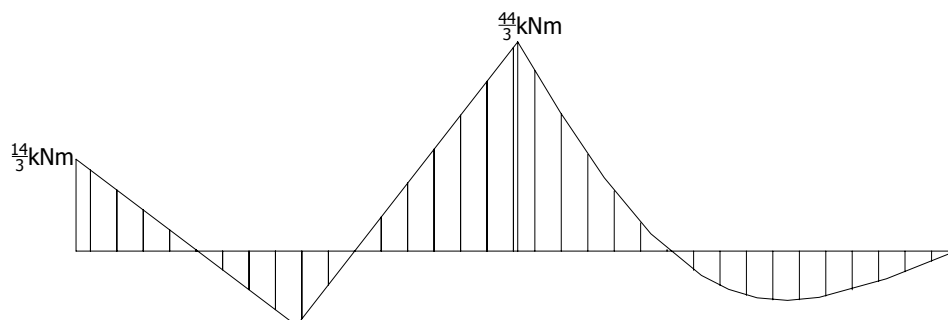
$$-8 + \frac{1}{2}EI \cdot \frac{20}{3 \cdot EI} = -\frac{14}{3} [kNm]$$

$$-8 - EI \cdot \frac{20}{3 \cdot EI} = -\frac{44}{3} [kNm] \quad (2.27)$$

*BC*

$$-18 + \frac{1}{2}EI \cdot \frac{20}{3 \cdot EI} = -\frac{44}{3} [kNm]$$

Znając wszystkie wartości można wykreślić wykres momentów  $M^P$ :



Rys. 18