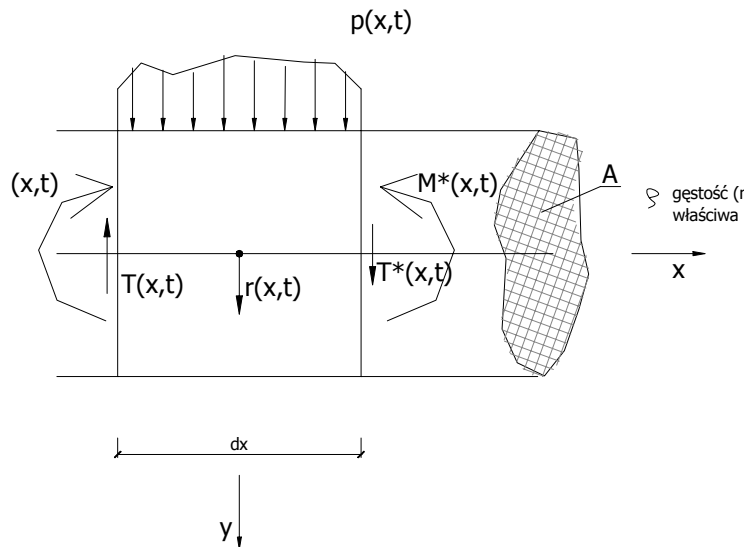


Olga Kopacz, Adam Łodygowski, Krzysztof Tymper,  
Michał Płotkowiak, Wojciech Pawłowski  
Konsultacje naukowe: prof. dr hab. JERZY RAKOWSKI  
Poznań 2002/2003

## MECHANIKA BUDOWLI 13

### 1. DRGANIA POPRZECZNE BELEK

Na nieskończenie mały wycinek belki  $dx$  działają siły jak na rys. 1



Rys. 1

$$\begin{aligned} M^*(x,t) &= M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx \\ T^*(x,t) &= T(x,t) + \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} dx \end{aligned} \quad (13.1)$$

Gdzie:  $r$  - siła oporu (bezwładności)

$$\begin{aligned} r(x,t) &= -dm \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -dm \cdot \ddot{w} \\ dm &= dx \cdot A \cdot \rho \\ \left( \ddot{\quad} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (13.2)$$

Można napisać sumę na oś  $y$ :

$$\sum y = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} + p = \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

*ale* (13.3)

$$EI \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -M \qquad \frac{\partial M}{\partial x} = T$$

Po zróżniczkowaniu i przekształceniach otrzymujemy zależność na drgania poprzeczne:

$$EI \cdot \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = p(x,t) \qquad (13.4)$$

## 2. DRGANIA WŁASNE BELEK

Rozpatrujemy drgania własne, w przypadku których siła wymuszająca jest równa 0, więc zależność (13.4) przyjmuje postać:

$$EI \cdot \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (13.5)$$

Zakładamy rozdzielenie zmiennych

$$w(x,t) = W(x) \cdot T(t) \qquad (13.6)$$

Zatem otrzymujemy:

$$EI \cdot \frac{d^4 W(x)}{dx^4} \cdot T(t) + \mu \cdot \frac{d^2 T(t)}{dt^2} \cdot w(x) = 0 \qquad (13.7)$$

Po przekształceniach otrzymujemy (pochodne zwyczajne):

$$\frac{EI}{\mu} \cdot \frac{\frac{d^4 W(x)}{dx^4}}{w(x)} = - \frac{\frac{d^2 T(t)}{dt^2}}{T(t)} = \omega^2 \qquad (13.8)$$

Wartość wyniku zależności (13.6)  $\omega^2$  musi być stałą a nie funkcją, ponieważ funkcję przestrzenną przyrównujemy do funkcji czasu.

Z zapisu (13.8) otrzymujemy zależności (13.9) i (13.10):

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 \cdot T(t) = 0 \quad (13.9)$$

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} - \omega^2 \cdot \mu \cdot \frac{1}{EI} W(x) = 0$$

gdzie

$$\omega^2 \cdot \mu \cdot \frac{1}{EI} = \alpha^4 \quad (13.10)$$

$\mu$  - gęstość liniowa

Rozwiązanie zależności (13.10):

$$W^{(IV)}(x) - \alpha^4 W(x) = 0$$

$$W(x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + C \operatorname{sh} \alpha x + D \operatorname{ch} \alpha x \quad (13.11)$$

Rozwiązanie otrzymujemy korzystając z warunków brzegowych (ponieważ jest to równanie we współrzędnych przestrzennych):



Rys. 2

Zapisać można następujące warunki brzegowe:

- 1)  $x = 0 \rightarrow W(0) = 0$
- 2)  $x = l \rightarrow W(l) = 0$
- 3)  $x = 0 \rightarrow M(0) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 W}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0 \quad W'''(0) = 0 \quad (13.12)$
- 4)  $x = l \rightarrow M(l) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 W}{dx^2} \Big|_{x=l} = 0 \quad W'''(l) = 0$

Są to warunki jednorodne, więc bez dodatkowych warunków nie da się rozwiązać.

$$\begin{aligned}
 1) \quad & A \cdot 0 + B \cdot 1 + C \cdot 0 + D \cdot 1 = 0 \\
 2) \quad & A \sin \alpha l + B \cos \alpha l + C \operatorname{sh} \alpha l + D \operatorname{ch} \alpha l \\
 3) \quad & \alpha^2 [0 - B \cdot 1 + 0 + D \cdot 1] = 0 \\
 4) \quad & A \alpha^2 \sin \alpha l + B \alpha^2 \cos \alpha l + C \alpha^2 \operatorname{sh} \alpha l + D \alpha^2 \operatorname{ch} \alpha l = 0 \\
 & B + D = 0 \quad B = 0 \\
 & -B + D = 0 \quad \rightarrow \quad D = 0
 \end{aligned} \tag{13.13}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & A \sin \alpha l + C \operatorname{sh} \alpha l = 0 \\
 4) \quad & \alpha^2 [A \sin \alpha l + C \operatorname{sh} \alpha l] = 0
 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} 2) \\ 4) \end{aligned}} \right\} \text{wyznacznik} = 0$$

$$2 \sin \alpha l \cdot \operatorname{sh} \alpha l = 0 \rightarrow \sin \alpha l = 0 \Rightarrow \alpha l = k\pi$$

Mamy rozwiązanie kiedy  $\alpha = \frac{k\pi}{l} \Rightarrow \alpha^4 = \frac{k^4 \pi^4}{l^4} = \frac{\omega^2 \mu}{EI}$

k - dowolna liczba naturalna

$$\boxed{\frac{\omega^2 \mu}{EI} = \frac{\pi^4}{l^4} \cdot k^4} \tag{13.14}$$

Dla belki wolnopodpartej:

$$\boxed{\omega^2 = \frac{EI}{\mu} \cdot \frac{\pi^4}{l^4} \cdot k^4} \tag{13.15}$$

Gdzie

$\omega$  - częstość kołowa drgań własnych belki wolnopodpartej

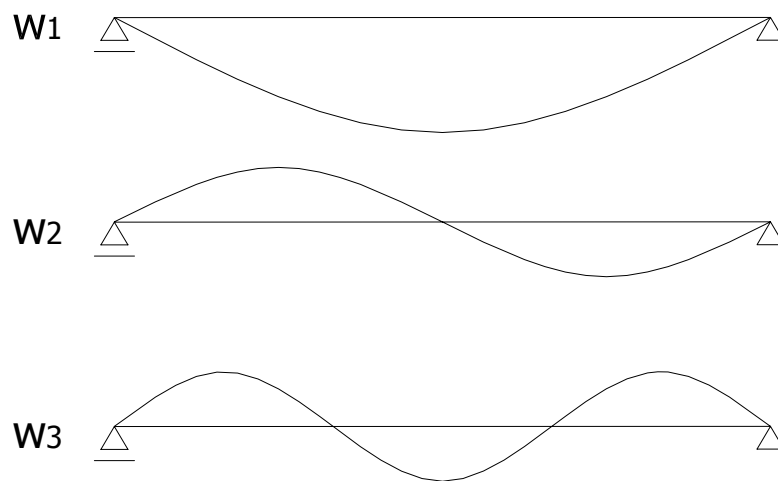
Stałe z warunków początkowych

$$T(t) = a \sin(\omega t + \varphi) \tag{13.16}$$

Ostatecznie drgania belki wynoszą:

$$\boxed{W_k(x, t) = \sin \alpha_k x \cdot a_k \sin(\omega_k t + \varphi_k)} \tag{13.17}$$

Zależność drgań belki (13.17) obrazuje rys.3



Rys. 2