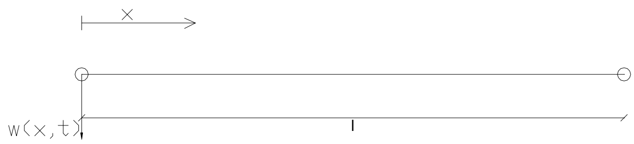
Olga Kopacz, Adam Łodygowski, Krzysztof Tymper,
Michał Płotkowiak, Wojciech Pawłowski
Konsultacje naukowe: prof. dr hab. JERZY RAKOWSKI
Poznań 2002/2003

MECHANIKA BUDOWLI 13

Ugięcia belek drgających. Wzory transformacyjne belek o ciągłym rozkładzie masy.



w-przemieszczenie dominujące:

$$w(x,t) = w(x) \cdot T(t) \qquad (14.1)$$

Wprowadzenie warunków brzegowych prowadzi do jednorodnego układu równań. Rozwiązanie nietrywialne istnieje dla det=0. Otrzymuje się równanie charakterystyczne.

Przyjmujemy następującą funkcję określającą linię ugięcia belki:

$$w(x) = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x + Csh\alpha x + Dsh\alpha x \qquad (14.2)$$

gdzie:

$$\alpha^4 = \omega^2 \frac{\mu}{EI} \quad , \quad \mu = A\rho \qquad (14.3)$$

μ-gęstość liniowa

Poszukamy rozwiązań równania (14.2) dla różnych warunków brzegowych belek.

1. Belka obustronnie utwierdzona.

$$1)\ w(0)=0 \qquad , \qquad 2)\ w(l)=0$$

$$3)\ \left.\frac{dw(x)}{dx}\right|_{x=0}=\varphi(0)=0\ , \qquad 4)\ \left.\frac{dw(x)}{dx}\right|_{x=l}=\varphi(l)=0 \tag{14.4}$$

Powyższe warunki podstawiamy do równania (14.2), którego wyznacznik przyrównujemy do zera (równanie charakterystyczne):

$$ch\alpha\, l\cdot\cos\alpha\, l-1=0 \tag{14.5}$$

Równanie to ma rozwiązania dla pewnych wartości:

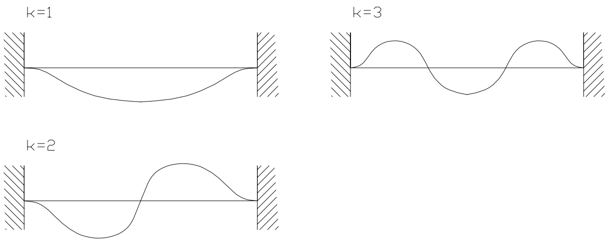
$$\begin{aligned}
\alpha_1 l&=4{,}73 \quad \rightarrow \varpi_1=\frac{22{,}37}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}\\
\alpha_2 l&=7{,}853 \quad \rightarrow \varpi_2=\frac{61{,}67}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}\\
\alpha_3 l&=10{,}996 \quad \rightarrow \varpi_3=\frac{120{,}91}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}
\end{aligned} \tag{14.6}$$

Ogólnie można zapisać:

$$\alpha_k l\approx\frac{2k+1}{2}\pi \qquad k\geq 2 \tag{14.7}$$

Funkcja ugięcia dla k-tej postaci:

$$w_k(x)=A_k(\sin\alpha_k l-sh\alpha_k l)\left[\frac{\sin\alpha_k x-sh\alpha_k x}{\sin\alpha_k l-sh\alpha_k l}-\frac{\cos\alpha_k x-ch\alpha_k x}{\cos\alpha_k l-ch\alpha_k l}\right] \tag{14.8}$$



Liczba miejsc zerowych funkcji $w_k(x)$ równa jest k-1

2. Belka utwierdzona z podpartym wolnym końcem.

Po podstawieniu warunków brzegowych do wyrażenia (14.2) otrzymamy wyznacznik:

$$tg\alpha l - tgh\alpha l = 0 \tag{14.9}$$

Rozwiązania powyższego równania wynoszą:

$$\begin{aligned} \alpha_1 l = 3{,}927 \rightarrow \quad \omega_1 = \frac{15{,}42}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}} \\ \alpha_2 l = 7{,}069 \rightarrow \quad \varpi_2 = \frac{49{,}97}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}} \end{aligned} \tag{14.10}$$

Ogólnie można zapisać:

$$\alpha_k l \approx \frac{4k+1}{4}\pi \qquad\qquad k \geq 3 \tag{14.11}$$

Funkcja ugięcia dla k-tej postaci:

$$w_k(x) = A_k \sin\alpha_k l\left[\frac{\sin\alpha_k x}{\sin\alpha_k l} - \frac{sh\alpha_k x}{sh\alpha_k l}\right] \tag{14.12}$$

3. Belka jednostronnie utwierdzona

Równanie charakterystyczne ma postać:

$$\cos\alpha l \cdot ch\alpha l + 1 = 0 \tag{14.13}$$

Rozwiązania równania (14.11):

$$\begin{aligned} \alpha_1 l = 1{,}875 &\rightarrow \quad \omega_1 = \frac{3{,}52}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}} \\ \alpha_2 l = 4{,}6941 &\rightarrow \quad \omega_2 = \frac{22{,}03}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}} \end{aligned} \tag{14.14}$$

Zapis uogólniony:

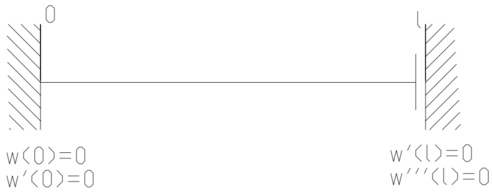
$$\alpha_k l \approx \frac{2k-1}{2}\pi \qquad k \geq 2 \tag{14.15}$$

Funkcja ugięcia dla k-tej postaci:

$$w_k(x) = A_k(\sin\alpha_k l + sh\alpha_k l)\left[\frac{\sin\alpha_k x - sh\alpha_k x}{\sin\alpha_k l + sh\alpha_k l} - \frac{\cos\alpha_k x - ch\alpha_k x}{\cos\alpha_k l + ch\alpha_k l}\right] \tag{14.16}$$

Zadanie

Znaleźć częstości kołowe drgań własnych dla układu przedstawionego poniżej.



Funkcja lini ugięcia ma postać:

$$w(x) = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x + Csh\alpha x + Dch\alpha x$$

Różniczkujemy powyższą funkcję (dx)

$$w'(x) = A\alpha\cos\alpha x - B\alpha\sin\alpha x + C\alpha\, ch\alpha x + D\alpha\, sh\alpha x$$

$$w''(x) = -A\alpha^2\sin\alpha x - B\alpha^2\cos\alpha x + C\alpha^2\, sh\alpha x + D\alpha^2\, ch\alpha x$$

$$w'''(x) = -A\alpha^3\cos\alpha x + B\alpha^3\sin\alpha x + C\alpha^3\, ch\alpha x + D\alpha^3\, sh\alpha x$$

Podstawiając warunki brzegowe otrzymujemy układ czterech równań jednorodnych:

$$\begin{cases} 0 = B + D \\ 0 = A\alpha + C\alpha \\ 0 = A\alpha\cos\alpha l - B\alpha\sin\alpha l + C\alpha\, ch\alpha l + D\alpha\, sh\alpha l \\ 0 = -A\alpha^3\cos\alpha l + B\alpha^3\sin\alpha l + C\alpha^3 ch\alpha l + D\alpha^3 sh\alpha l \end{cases}$$

Wstawiając dwa pierwsze równania do dwóch kolejnych, otrzymujemy układ dwóch równań:

$$\begin{cases} 0 = C(\alpha\, ch\alpha l - \alpha\cos\alpha l) + D(\alpha\sin\alpha l + \alpha\, sh\alpha l) \\ 0 = C(\alpha^3\cos\alpha l + \alpha^3 ch\alpha l) + D(\alpha^3 sh\alpha l - \alpha^3\sin\alpha l) \end{cases}$$

Układ równań posiada rozwiązanie nietrywialne gdy wyznacznik równy jest zeru.

$$\begin{vmatrix} \alpha(ch\alpha l - \cos\alpha l) & \alpha(\sin\alpha l + sh\alpha l) \\ \alpha^3(\cos\alpha l + ch\alpha l) & \alpha^3(sh\alpha l - \sin\alpha l) \end{vmatrix} = 0$$

Otrzymujemy równanie charakterystyczne:

$$ch\alpha l \cdot \sin\alpha l + \cos\alpha l \cdot sh\alpha l = 0$$

Przeszukujemy powyższe równanie wstawiając wartości od 0, w celu otrzymania rozwiązania.

$$\alpha_1 l = 2{,}365 \qquad \rightarrow \omega_1 = \frac{5{,}593}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

$$\alpha_2 l = 5{,}4978 \qquad \rightarrow \omega_2 = \frac{30{,}226}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

$$\alpha_3 l = 8{,}63938 \qquad \rightarrow \omega_3 = \frac{74{,}639}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

Równanie posiada nieskończoną liczbę rozwiązań, powtarzających się okresowo.

Warunek ortogonalności.

Równanie w przestrzeni

$$\frac{d^4 x(x)}{dx^4} - \frac{\mu \varpi^2}{EI} w(x) = 0 \tag{14.17}$$

Równanie to spełnione jest dla pewnej wartości ω

$$\begin{aligned} \omega_i \quad &\rightarrow \quad EIw_i'''' - \mu\,\omega_i^2 w_i = 0 \\ \omega_j \quad &\rightarrow \quad EIw_j'''' - \mu\,\omega_j^2 w_j = 0 \end{aligned} \tag{14.18}$$

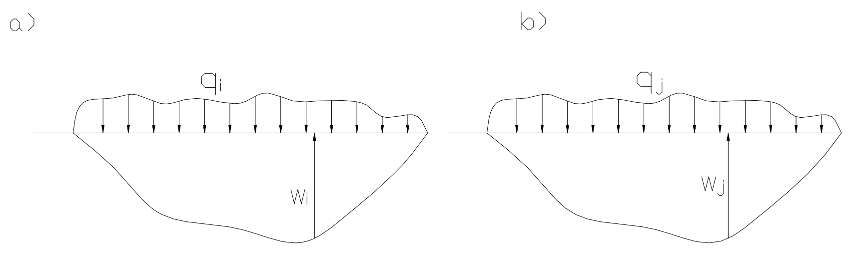
Zgodnie z teorią zginania belek prostych:

$$EIw_i'''' = q(x) \tag{14.19}$$

Po przekształceniu (14.18) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} EIw_i'''' &= \mu\,\omega_i^2 w_i = q_i(x) \\ EIw_j'''' &= \mu\,\omega_j^2 w_j = q_j(x) \end{aligned} \tag{14.20}$$

Otrzymujemy dwa stany a)(i-ty) oraz b)(j-ty):



Z twierdzenia Bettiego:

Praca obciążenia q_i na przemieszczeniach w_j, równa jest pracy obciążenia q_j na przemieszczeniach w_i.

$$\int_0^l q_i(x) w_j(x) dx = \int_0^l q_j(x) w_i(x) dx \tag{14.21}$$

Przekształcając powyższe wyrażenie i podstawiając wzory (14.20) otrzymujemy:

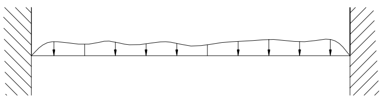
$$\begin{gathered}\int_0^l \left[\mu\,\omega_i^2 w_i(x) w_j(x) - \mu\,\omega_j^2 w_j(x) w_i(x)\right] dx = 0 \\ (\omega_i^2 - \omega_j^2)\int_0^l \mu\, w_i(x) w_j(x) = 0\end{gathered} \tag{14.22}$$

Jeżeli i=j to równanie jest spełnione, natomiast gdy $i \neq j$ ($\omega_i^2 \neq \omega_j^2$) to otrzymujemy warunek z przyrównania całki w wyrażeniu (1.22) do zera:

$$\int_0^l \mu\, w_i(x) w_j(x) dx = 0 \tag{14.23}$$

Jest to **warunek ortogonalności**.

Wzory transformacyjne belek o ciągłym rozkładzie masy.



Rozpatrujemy belkę na którą działa obciążenie związane z cechami materiału.

Jaką postać przyjmą drgania belki, jeśli wymusimy obroty podpór „i", „j" oraz przesunięcia tych podpór?

W każdej chwili czasu ugięcie w punkcie i równe jest V_i. Zapisać możemy następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} &w(0) = V_i \\ &w'(0) = \varphi(0) = \varphi_i \\ &w(l) = V_k \\ &w'(l) = \varphi_k \end{aligned} \tag{14.24}$$

Momenty oraz siły tnące w belce wynoszą:

$$\begin{aligned} M(x) &= \begin{cases} M(0) = M_{ik} \\ M(l) = M_{ki} \end{cases} \\ T(x) &= \begin{cases} T(0) = T_{ik} \\ T(l) = T_{ki} \end{cases} \end{aligned} \tag{14.25}$$

Wstawiając warunki brzegowe do równania:

$$w(x) = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x + Csh\alpha x + Dch\alpha x \tag{14.26}$$

wyznaczamy stałe. Różniczkując równanie (14.25) otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} &w'(x) = \varphi = A\alpha\cos\alpha x - B\alpha\sin\alpha x + C\alpha ch\alpha x + D\alpha sh\alpha x \\ &w''(x)\cdot EI = M(x) = EI(-A\alpha^2\sin\alpha x - B\alpha^2\cos\alpha x + C\alpha^2 sh\alpha x + \\ &\qquad + D\alpha^2 ch\alpha x) \\ &w''(x)\cdot EI = T(x) = EI(-A\alpha^3\cos\alpha x + B\alpha^3\sin\alpha x + C\alpha^3 ch\alpha x + \\ &\qquad + D\alpha^3 sh\alpha x) \end{aligned} \tag{14.27}$$

Po podstawieniu stałych do równania momentów otrzymujemy wzory transformacyjne:

$$\begin{aligned} M_{ik} &= \frac{EI}{l}\left[c(\lambda)\varphi_i + s(\lambda)\varphi_k - r(\lambda)\frac{V_k}{l} + t(\lambda)\frac{V_i}{l}\right] \\ M_{ki} &= \frac{EI}{l}\left[s(\lambda)\varphi_i + c(\lambda)\varphi_k - t(\lambda)\frac{V_k}{l} + r(\lambda)\frac{V_i}{l}\right] \end{aligned} \tag{14.28}$$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
c(\lambda) &= \lambda \frac{ch\lambda \sin\lambda - sh\lambda \cos\lambda}{z} \\
s(\lambda) &= \lambda \frac{sh\lambda - \sin\lambda}{z} \\
r(\lambda) &= \lambda^2 \frac{sh\lambda \cdot \sin\lambda}{z} \\
t(\lambda) &= \lambda^2 \frac{sh\lambda \cdot \sin\lambda}{z} \\
z &= 1 - ch\lambda \cos\lambda \\
\lambda &= \alpha\, l
\end{aligned}
\tag{14.29}
$$