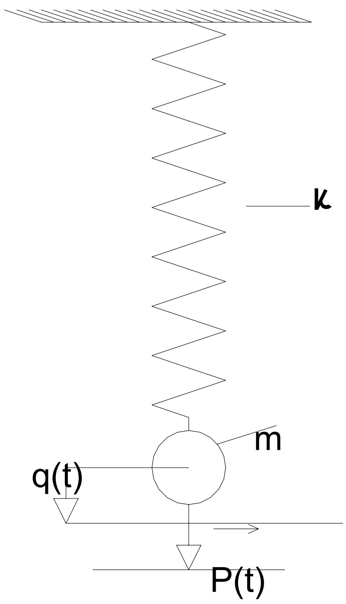
Olga Kopacz, Krzysztof Krawczyk, Adam Łodygowski,
Michał Płotkowiak, Agnieszka Świtek, Krzysztof Tymper
Konsultacje naukowe: prof. dr hab. JERZY RAKOWSKI
Poznań 2002/2003

MECHANIKA BUDOWLI 12

1. DRGANIA WYMUSZONE, NIETŁUMIONE

W celu ułatwienia rozumowania oraz otrzymania „ładnego” wyniku, zakładamy, że siła wymuszająca P(t) ma charakter oscylacyjny, co spowoduje, że szukana funkcja przemieszczeń q(t) będzie również okresowa



Rys. 1.1 Rozpatrywany przypadek drgań wymuszonych – układ o jednym stopniu swobody, utwierdzony sprężyście. q(t) – współrzędna uogólniona.

Równanie ogólne drgań:

$$m\ddot{q}(t) + \kappa q(t) = P(t) \tag{1.1}$$

Siła wymuszająca ma postać:

$$P(t) = P_1 \sin pt + P_2 \cos pt = P \sin(pt + \varepsilon) \tag{1.2}$$

Gdyby miała ona inna postać „można” byłoby ją rozwinąć w nieskończony szereg Fouriera, a rozwiązanie stanowiłaby suma poszczególnych rozwiązań przytoczonych poniżej.
Po podzieleniu przez m równanie zapisujemy:

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = Q \sin(pt + \varepsilon) \tag{1.3}$$

gdzie:

$$Q = \frac{P}{m}, \ \omega^2 = \frac{\chi}{m}$$

p – częstość kołowa drgań wymuszonych (częstość siły wymuszającej)
ε – kąt fazowy
P – amplituda siły okresowej, maksymalna wartość siły wymuszającej

Szukając rozwiązania zastosujemy całkę ogólną wyprowadzoną na wcześniejszym wykładzie:

$$q(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \frac{Q}{\omega^2 - p^2} \sin(pt + \varepsilon) \tag{1.4}$$

Można tak dobrać warunki początkowe aby wartości stałych całkowania C_1 i C_2 były równe 0. Rozwiązanie przyjmie zatem postać:

$$q(t) = \frac{Q}{\omega^2 - p^2} \sin(pt + \varepsilon) \tag{1.5}$$

Przypadkiem szczególnym będzie sytuacja, kiedy ε=0, co nie wpłynie na ogólny charakter analizy rozwiązania.

$$q(t) = \frac{Q}{\omega^2 - p^2} \sin pt \tag{1.6}$$

gdzie:

$\dfrac{Q}{\omega^2 - p^2}$ - jest liczbą

$$q(t) = \frac{\dfrac{Q}{\omega^2}}{1 - \dfrac{p^2}{\omega^2}} \sin pt \tag{1.7}$$

$$\frac{Q}{\omega^2} = \frac{Q}{\dfrac{\kappa}{m}} = \frac{Q}{\kappa} m = \frac{P}{\kappa} \tag{1.6}$$

P – statyczna wartość siły
K – sztywność sprężyny

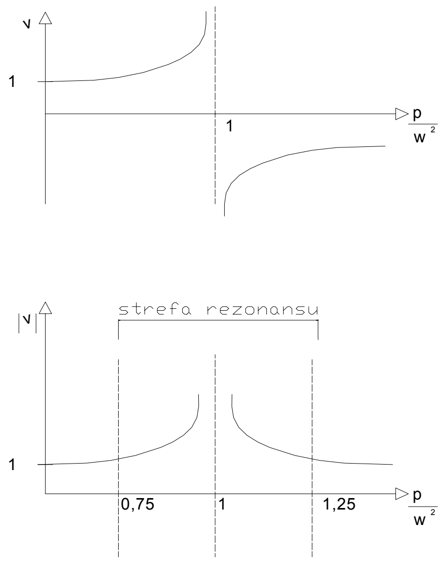
$\dfrac{P}{\kappa} = A_{st}$ - amplituda statyczna

$$q(t) = A_{st} \nu \sin pt \tag{1.7}$$

gdzie:

$$\nu = \frac{1}{1 - \dfrac{p^2}{\omega^2}}$$

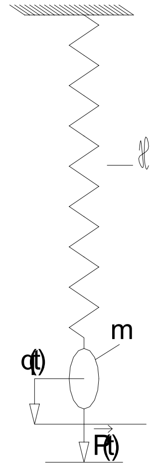
Jeżeli siła nie będzie się zmieniać w czasie, to $q(t)=A_{st}$, jeżeli zacznie się zmieniać, to ta wartość ugięcia ulegnie zmianie w czasie. Wpływ na wielkość drgań ma współczynnik ν.
W szczególnym przypadku, kiedy $p=\omega$, ugięcie może dojść do nieskończoności przy tej samej sile. Ryzyko takie istnieje w przypadku „zgrania” częstotliwości. Taką sytuację obrazuje wykres współczynnika ν w funkcji częstości kolowej drgań p/ω, a zjawisko towarzyszące takiej sytuacji nazywamy **rezonansem**. Obszar wykresu, w którym współczynnik ν przyjmuje niebezpieczne wartości nazywamy **strefą rezonansu**.



Rys. 1.2 Wykres zależności współczynnika ν ukazujący strefę rezonansu

Rezonans – to zjawisko polegające na zbliżeniu częstości kołowej drgań wymuszenia do częstości kołowej drgań własnych. Bardzo ważne jest uwzględnienie obliczeń dynamicznych dynamicznych budownictwie przemysłowym. Należ zwrócić uwagę, aby częstość kołowa pracy urządzeń nie zbliżyła się do częstości rezonansowej konstrukcji.

2. DRGANIA WYMUSZONE, TŁUMIONE



Rys. 2.1 Sytuacja analogiczna do przypadku drgań nietłumionych

Postępując analogicznie do drgań własnych widzimy, że całka ogólna obrazuje drgania szybko zanikając. Nie będziemy zajmowali się tą częścią rozważań, zakładamy, iż jest ona mało znacząca w przypadku wystąpienia tłumienia (ośrodka tłumiącego ρ).

Zapisujemy równanie ogólne drgań:

$$m\ddot{q}(t) + Cq(t) + \kappa q(t) = P\sin(pt + \varepsilon) \tag{2.1}$$

$$q(t) + 2\rho\dot{q}(t) + \omega^2 q(t) = Q\sin(pt + \varepsilon) \tag{2.2}$$

Całka szczególna przyjmie postać:

$$q(t) = a\sin(pt + \varphi) \quad \text{,gdzie:} \tag{2.3}$$

$$a = \frac{Q}{\sqrt{(\omega^2 + p^2)^2 + 4\rho^2 p^2}}$$

Zauważmy, że w przypadku, gdy ρ=0, równanie przyjmie postać jak wcześniej.

$$q(t) = A_{st}\nu \sin(pt + \varphi) \tag{2.4}$$

współczynnik dynamiczny drgań ma teraz postać:

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{p^2}{\omega^2}) + \frac{4\rho^2}{\omega^2} * \frac{p^2}{\omega^2}}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\eta^2\gamma^2}}$$,gdzie:

$$\eta^2 = \frac{p^2}{\omega^2} \quad ; \quad \gamma^2 = \frac{\rho^2}{\omega^2}$$

Zjawisko czystego rezonansu w tym przypadku nie zajdzie, gdyż amplituda nie osiągnie nieskończoności.
Wykres zależności współczynnika ν będzie teraz wyglądał tak:

$\gamma = 0$

$\gamma = 0{,}15$

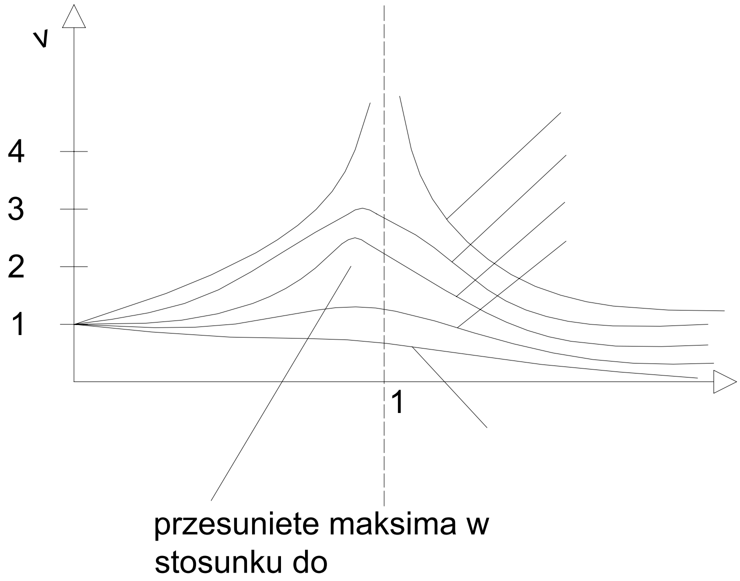
$\gamma = 0{,}25$

$\gamma = 0{,}5$

$\gamma = 1$

$\eta = \dfrac{p}{\omega}$

$\eta = 1$



Rys. 2.2 Wykres zależności współczynnika ν

Im większe tłumienie (γ=1), tym bezpieczniejsze od rezonansu. Dla γ=0,15 amplituda jest czterokrotnie większa, a więc zbliża nas do zagrożenia zajścia rezonansu.

Ponadto przy:
η<1 mówimy o wysokim strojeniu, natomiast przy
η>1 mówimy o niskim strojeniu konstrukcji.

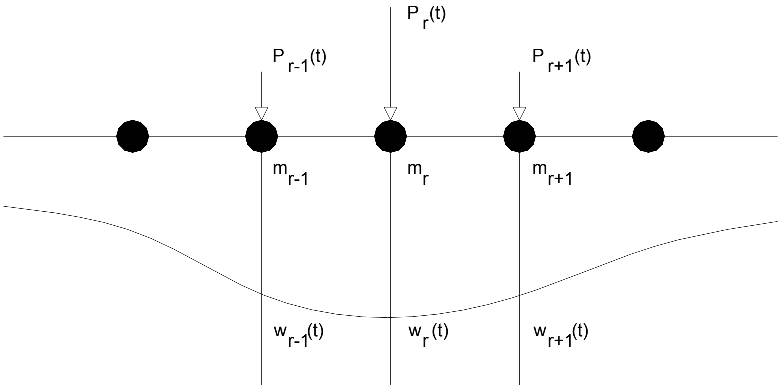
Tłumienie drgań możemy rozdzielić na:
wewnętrzne – tłumienie wywołane rozproszeniem energii wewnątrz układu (wynik tarcia wewnętrznego kryształów – strukturalne)
zewnętrzne – wszystkie przeszkody (opory ośrodków przeszkadzających) m.in. tarcie

3. DRGANIA UKŁADÓW O WIELU STOPNIACH SWOBODY

Zagadnienie dynamiki układów prętowych omówimy na przykładzie prostej belki.

3.1 Drgania własne

W analizie drgań wykorzystujemy układ masy rozłożony w sposób dyskretny, modelujemy go w określony sposób, poprzez granulację masy całego układu do pewnej liczby punktów masowych (Rys. 3.1.1)



Rys. 3.1.1. Granulacja masy w belce ciągłej

W naszym rozumowaniu wykorzystamy interpretację metody sił. Dominującą kwestią w przypadku ugięć są przemieszczenia pionowe, dlatego też pominiemy w naszych rozważaniach przesunięcia poziome.
Zgodnie z zasadą superpozycji skutków, jeżeli działają siły zmienne w czasie, $P_r(t)$ zawiera siły bezwładności, a układ jest quasistatyczny.
Dowolne przemieszczenie :

$$w_r(t) = \sum_{j=1}^{n} P_j(t)\delta_{rj} = \sum_{j=1}^{n} (\overline{P}_j(t) - m_j \ddot{w}_j(t))\delta_{rj} \tag{3.1.1}$$

gdzie:
n – liczba węzłów obciążonych masą = liczba stopni swobody
Siła P_j jest wynikiem działania obciążenia zewnętrznego i bezwładności masy.
Drgania własne możemy zatem zapisać:

$$w_r(t) = \sum_{j=1}^{n} (-m_j \ddot{w}_j(t))\delta_{rj} \tag{3.1.2}$$

Czyli przykładowo dla układu o dwóch stopniach swobody otrzymamy zapis:

$$\begin{aligned} w_1(t) &= -m_1\ddot{w}_1(t)\delta_{11} - m_2\ddot{w}_2(t)\delta_{12} \\ w_2(t) &= -m_1\ddot{w}_1(t)\delta_{21} - m_2\ddot{w}_2(t)\delta_{22} \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Wpadamy zatem na trop zapisu macierzowego:

$$[F]*[M]\{\ddot{w}(t)\} + \{w(t)\} = \{0\} \tag{3.1.4}$$

gdzie:
[F] – jest macierzą podatności

$$\{w\} = \begin{vmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \ldots \\ w_n(t) \end{vmatrix} \quad ; \qquad [F] = [\delta_{ik}] = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \ldots & \ldots \\ \delta_{22} & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \delta_{ik} \end{vmatrix}$$

Macierz [M] jest macierzą diagonalną, co daje znaczne uproszczenie obliczeń:

$$[M] = \begin{vmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_n \end{vmatrix}$$

Układ równań różniczkowych został wyprowadzony przy omawianiu drgań układów o jednym stopniu swobody. Zapis w postaci funkcji ekspotencjalnej, sinusowo – cosinusowej, „zduszonej” do sinusowej z przesunięciem, lub:

$$w_r(t) = w_r^{(0)} e^{i\omega t} \tag{3.1.5}$$

$$w_r = w_r^{(0)}$$

Otrzymamy układ równań zapisany macierzowo:

$$(-\omega^2)[F][M]\{w\}+\{w\}=\{0\}$$

$$\left([F][M]-\frac{1}{\omega^2}[I]\right)\{w\}=\{0\} \tag{3.1.6}$$

$$[I]=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_1\delta_{11}-\frac{1}{\omega^2} & m_2\delta_{12} \\ m_1\delta_{12} & m_2\delta_{22}-\frac{1}{\omega^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.1.7}$$

Taki układ równań jest układem jednorodnym, oznacza to, że jest on rozwiązywalny pod warunkiem, że jego wyznacznik równy jest 0. Przyrównując równanie wyznacznika do zera otrzymam kolejne, które pozwoli na wyznaczenie wartości ω. Drgania zajdą tylko wtedy, kiedy otrzymamy tyle wartości ω, ile wynosił rząd macierzy.

$$\det\left|[F][M]-\frac{1}{\omega^2}[I]\right|=0 \tag{3.1.8}$$

Jeżeli dany układ prętowy (ramowy) uda nam się przedstawić jako model masowy, obliczymy δ_{ik} , to możemy zawsze policzyć wszystkie częstości kołowe drgań własnych ω.
Granulacja masy jest znakomitym postępowaniem, wykorzystującym podstawowe założenia i kroki metody sił, czyli zasadę superpozycji, oraz współczynniki $\delta_{ik.}$