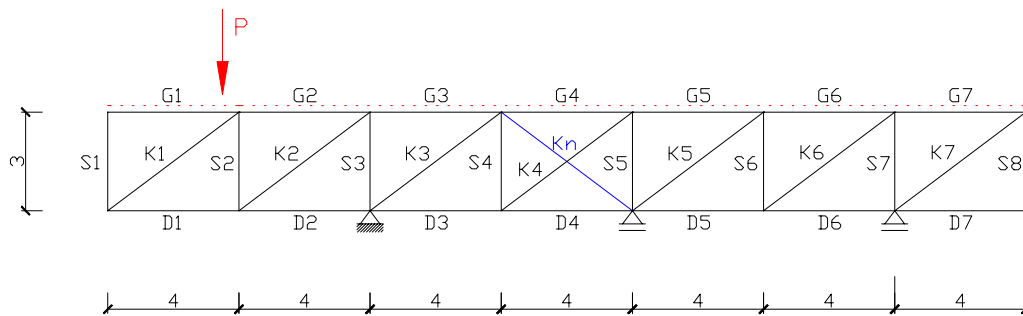


Olga Kopacz, Adam Łodygowski, Wojciech Pawłowski,  
Michał Płotkowiak, Krzysztof Tymper  
Konsultacje naukowe: prof. dr hab. JERZY RAKOWSKI  
Poznań 2002/2003

## MECHANIKA BUDOWLI

### Linie wpływu sił w prętach kratownic statycznie niewyznaczalnych

Dana kratownica:



Zależności między sztywnościami:

$$G \rightarrow \frac{4}{3} \cdot (EA)$$

$$D \rightarrow \frac{4}{3} \cdot (EA)$$

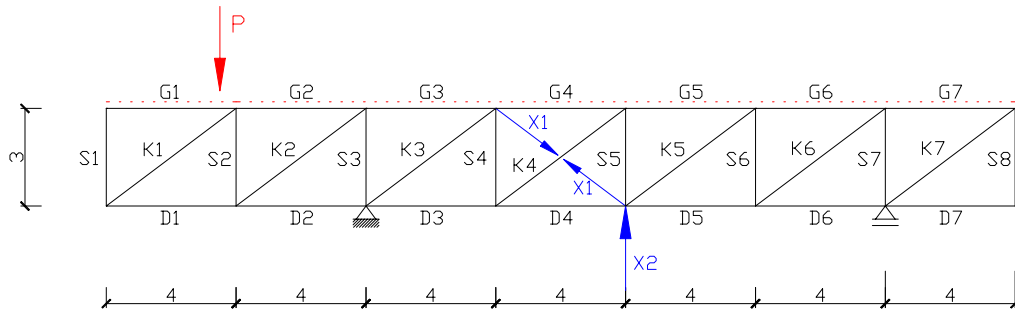
$$S \rightarrow \frac{3}{3} \cdot (EA)$$

$$K \rightarrow \frac{5}{3} \cdot (EA)$$

**CEL:** Obliczyć linię wpływu sił w pręcie D4 (siła porusza się po pasie górnym)

$$IwD_4 = IwD_4^0 + D_4^{x_1=1} \cdot IwX_1 + D_4^{x_2=1} \cdot IwX_2$$

Dobranie układu podstawowego:



Układ równań kanonicznych:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

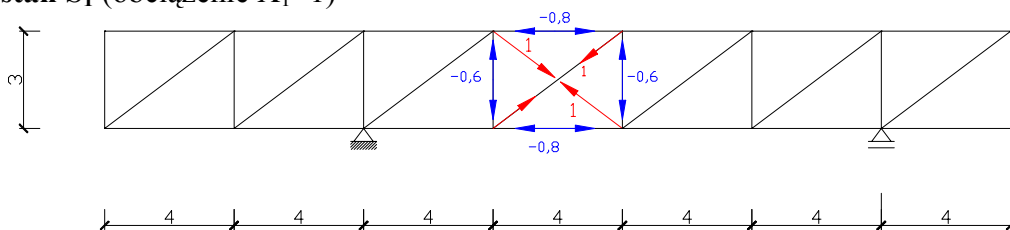
W celu obliczenia delt korzysta się z zależności:

$$\delta_{ik} = \sum_m \frac{S_{im} \cdot S_{km}}{EA_m} \cdot l_m$$

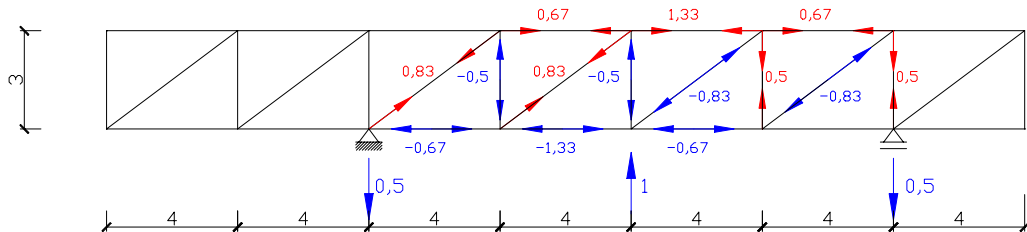
$$\Delta_{iP} = \sum_m \frac{S_{im} \cdot S_{Pm}^0}{EA_m} \cdot l_m$$

- $l_m$  - długość pręta,
- $S_{i/k}$  - i-ty lub k-ty pręt,
- $m$  - oznacza sumę po wszystkich prętach,

stan  $S_1$  (obciążenie  $X_1=1$ )



stan  $S_2$  (obciążenie  $X_2=1$ )



Obliczenie przemieszczeń:

$$\delta_{11} = \sum_m \frac{S_1 \cdot S_1}{EA_m} \cdot l_m = \frac{12m}{EA}$$

$$\delta_{12} = \sum_m \frac{S_1 \cdot S_2}{EA_m} \cdot l_m = \frac{5,9m}{EA}$$

$$\delta_{22} = \sum_m \frac{S_2 \cdot S_2}{EA_m} \cdot l_m = \frac{27,3(3)m}{EA}$$

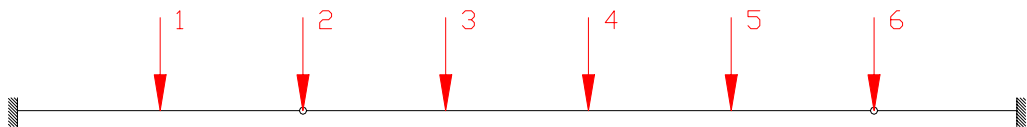
Obciążenie  $P$  jest porusza się  $\Delta_{1P}$  i  $\Delta_{2P}$  są wielkościami zmiennymi. Zgodnie z tw. Maxwella ( $\Delta_{1P} = \Delta_{P1}$ ;  $\Delta_{2P} = \Delta_{P2}$ ) są one liniami ugięć pasa górnokratownicy wywołane działaniem odpowiednio siłami  $X_1$  i  $X_2$ .

Zastosujemy metodę ciężarów sprężystych:

$$W_j^{(i)} = \sum_m \frac{S_{im} \cdot \overline{S_{jm}}}{EA_m} \cdot l_m$$

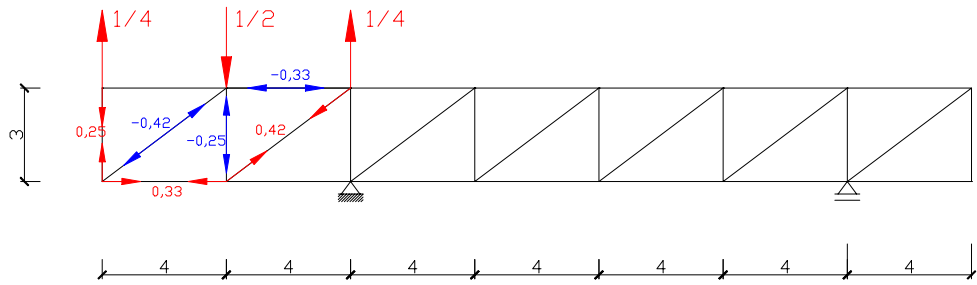
$W_j^{(i)}$  - ciężar sprężysty obliczony dla węzła  $j$  w stanie  $i$ -tym,

$\overline{S}_m$  - siła w pręcie  $m$ -tym wywołana obciążeniem wirtualnym przyłożonym do węzła  $j$ -tego układu podstawowego

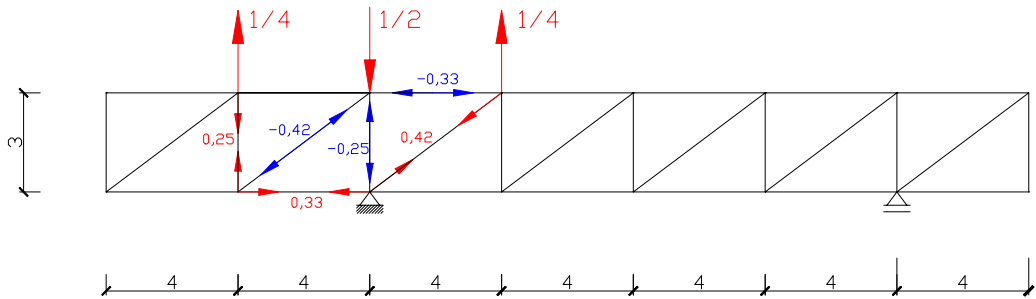


Obliczanie sił  $\overline{S}_{jm}$

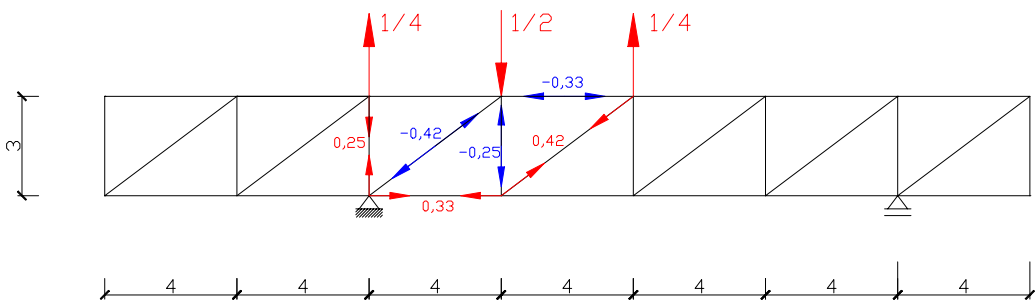
**j=1**



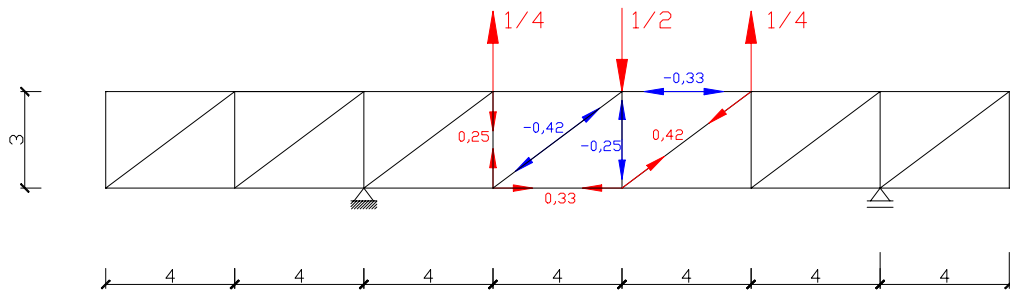
**j=2**



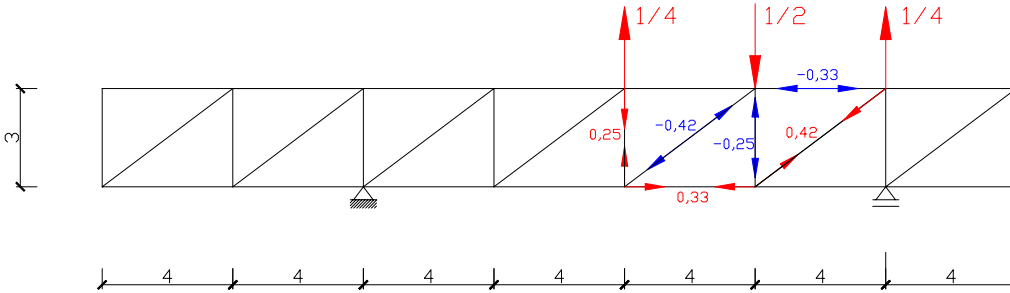
**j=3**



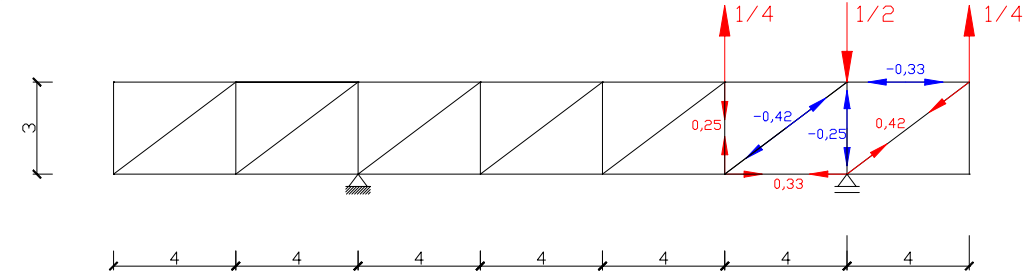
**j=4**



**j=5**



**j=6**



Wszystkie wyniki przedstawić można w tabelce:  
Obliczone wartości delt od sił jedynkowych:

	I*EA	S1	S2	S1*S1*/EA	S1*S2*/EA	S2*S2*/EA
D1	3	0	0	0	0	0
D2	3	0	0	0	0	0
D3	3	0	-0,6(6)	0	0	1,3(3)
D4	3	-0,8	-1,3(3)	1,92	3,2	5,3(3)
D5	3	0	-0,6(6)	0	0	1,3(3)
D6	3	0	0	0	0	0
D7	3	0	0	0	0	0
S1	3	0	0	0	0	0
S2	3	0	0	0	0	0
S3	3	0	0	0	0	0
S4	3	-0,6	-0,5	1,08	0,9	0,75
S5	3	-0,6	-0,5	1,08	0,9	0,75
S6	3	0	0,5	0	0	0,75
S7	3	0	0,5	0	0	0,75
S8	3	0	0	0	0	0
K1	3	0	0	0	0	0
K2	3	0	0	0	0	0
K3	3	0	0,8(3)	0	0	2,08(3)
K4	3	1	0,8(3)	3	2,50	2,08(3)
K5	3	0	-0,8(3)	0	0	2,08(3)
K6	3	0	-0,8(3)	0	0	2,08(3)
K7	3	0	0	0	0	0
G1	3	0	0	0	0	0
G2	3	0	0	0	0	0
G3	3	0	0	0	0	0
G4	3	-0,8	0,6(6)	1,92	-1,6	1,3(3)
G5	3	0	1,3(3)	0	0	5,3(3)
G6	3	0	0,6(6)	0	0	1,3(3)
G7	3	0	0	0	0	0
KN	3	1	0	3	0	0
				<b>12</b>	<b>5,9</b>	<b>27,3(3)</b>

Wartości sił w prętach od obciążenia grupami sił wirtualnych:

j	1	2	3	4	5	6
D1	0,3(3)	0	0	0	0	0
D2	0	0,3(3)	0	0	0	0
D3	0	0	0,3(3)	0	0	0
D4	0	0	0	0,3(3)	0	0
D5	0	0	0	0	0,3(3)	0
D6	0	0	0	0	0	0,3(3)
D7	0	0	0	0	0	0
S1	0,25	0	0	0	0	0
S2	-0,25	0,25	0	0	0	0
S3	0	-0,25	0,25	0	0	0
S4	0	0	-0,25	0,25	0	0
S5	0	0	0	-0,25	0,25	0
S6	0	0	0	0	-0,25	0,25
S7	0	0	0	0	0	-0,25
S8	0	0	0	0	0	0
K1	-0,41(6)	0	0	0	0	0
K2	0,41(6)	-0,41(6)	0	0	0	0
K3	0	0,41(6)	-0,41(6)	0	0	0
K4	0	0	0,41(6)	-0,41(6)	0	0
K5	0	0	0	0,41(6)	-0,41(6)	0
K6	0	0	0	0	0,41(6)	-0,41(6)
K7	0	0	0	0	0	0,41(6)
G1	0	0	0	0	0	0
G2	-0,3(3)	0	0	0	0	0
G3	0	-0,3(3)	0	0	0	0
G4	0	0	-0,3(3)	0	0	0
G5	0	0	0	-0,3(3)	0	0
G6	0	0	0	0	-0,3(3)	0
G7	0	0	0	0	0	-0,3(3)
KN	0	0	0	0	0	0

Wartość ciężarków sprężystych:  $W_j^{(i)} = \sum_m \frac{S_{im} \cdot \overline{S_{jm}}}{EA_m} \cdot l_m$

	W <sub>3</sub> od X <sub>1</sub>	W <sub>4</sub> X <sub>1</sub>	W <sub>5</sub> X <sub>1</sub>	W <sub>2</sub> X <sub>2</sub>	W <sub>3</sub> X <sub>2</sub>	W <sub>4</sub> X <sub>2</sub>	W <sub>5</sub> X <sub>2</sub>	W <sub>6</sub> X <sub>2</sub>
D1	0	0	0	0	0	0	0	0
D2	0	0	0	0	0	0	0	0
D3	0	0	0	0	-0,6(6)	0	0	0
D4	0	-0,8	0	0	0	-1,3(3)	0	0
D5	0	0	0	0	0	0	-0,6(6)	0
D6	0	0	0	0	0	0	0	0
D7	0	0	0	0	0	0	0	0
S1	0	0	0	0	0	0	0	0
S2	0	0	0	0	0	0	0	0
S3	0	0	0	0	0	0	0	0
S4	0,45	-0,45	0	0	0,375	-0,375	0	0
S5	0	0,45	-0,45	0	0	0,375	-0,375	0
S6	0	0	0	0	0	0	-0,375	0,375
S7	0	0	0	0	0	0	0	-0,375
S8	0	0	0	0	0	0	0	0
K1	0	0	0	0	0	0	0	0
K2	0	0	0	0	0	0	0	0
K3	0	0	0	1,041(6)	-1,041(6)	0	0	0
K4	1,25	-1,25	0	0	1,041(6)	-1,041(6)	0	0
K5	0	0	0	0	0	-1,041(6)	1,041(6)	0
K6	0	0	0	0	0	0	-1,041(6)	1,041(6)
K7	0	0	0	0	0	0	0	0
G1	0	0	0	0	0	0	0	0
G2	0	0	0	0	0	0	0	0
G3	0	0	0	0	0	0	0	0
G4	0,8	0	0	0	-0,6(6)	0	0	0
G5	0	0	0	0	0	-1,3(3)	0	0
G6	0	0	0	0	0	0	-0,6(6)	0
G7	0	0	0	0	0	0	0	0
KN	0	0	0	0	0	0	0	0
	<b>2,5</b>	<b>-2,05</b>	<b>-0,45</b>	<b>1,041(6)</b>	<b>-0,958(3)</b>	<b>-4,75</b>	<b>-2,083(3)</b>	<b>1,041(6)</b>

Zestawienie wyników:

$$\delta_{11} = \frac{12}{EA}$$

$$\delta_{12} = \frac{5,9}{EA}$$

$$\delta_{22} = \frac{27,3(3)}{EA}$$

od  $X_1$

$$W_1 = 0$$

$$W_2 = 0$$

$$W_3 = \frac{2,5}{EA}$$

$$W_4 = -\frac{2,05}{EA}$$

$$W_5 = -\frac{0,45}{EA}$$

$$W_6 = 0$$

od  $X_2$

$$W_1 = 0$$

$$W_2 = \frac{1,041(6)}{EA}$$

$$W_3 = -\frac{0,958(3)}{EA}$$

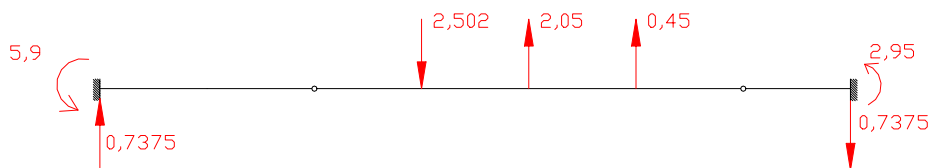
$$W_4 = -\frac{4,75}{EA}$$

$$W_5 = -\frac{-2,08(3)}{EA}$$

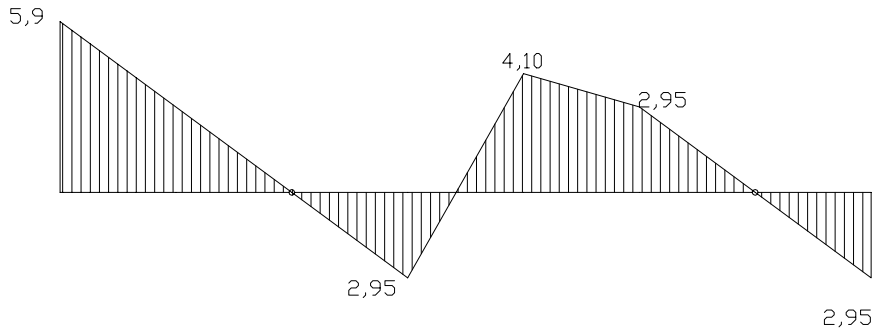
$$W_6 = \frac{1,041(6)}{EA}$$

Rysuję wykresy dla belki od obciążenia ciężarkami sprężystymi:

$\Delta_{P1}$



$(\overline{M}_1) \cdot EA$

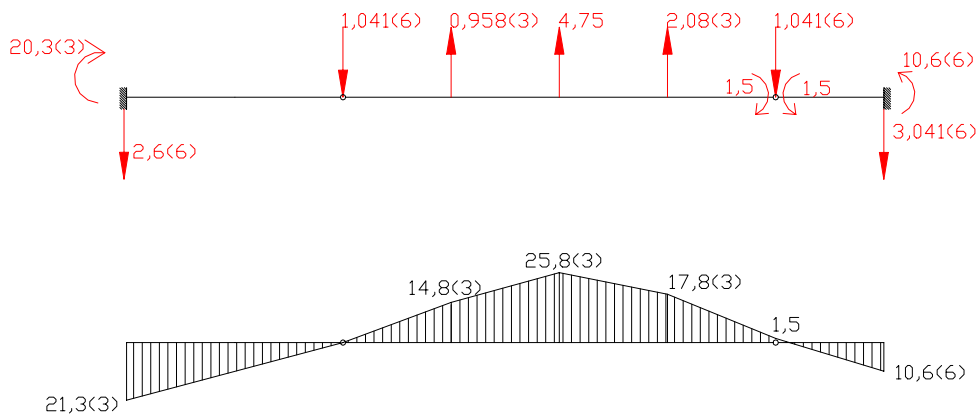


$\Delta_{P2}$

W tym stanie należy w wykresie momentów uwzględnić w pkt. 7 wartość momentu wtórnego odpowiadająca rzeczywistemu skróceniu słupka  $S_7$ , przy obciążeniu kratownicy  $X_2=1$ .

$$M_7 = \frac{3}{EA} \cdot (-1) \cdot 0,5 \cdot 1 = -\frac{1,5}{EA}$$

$(\overline{M}_2) \cdot EA$



Aby znaleźć linie wpływu  $X_1$  i  $X_2$  trzeba jeszcze zrobić macierz odwrotną z macierzą podatności:

$$X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + \delta_{1P} = 0$$

$$X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + \delta_{2P} = 0$$

gdzie  $\beta$  są wyrazami macierzy odwrotnej macierzy:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 5,9 \\ 5,9 & 27,3(3) \end{bmatrix}$$

Każdy wyraz macierzy przekształcamy zgodnie ze wzorem:

$$A_{ij}^{-1} = \frac{1}{\det A} (-1)^{i+j} A_{ij}^0$$

czyli odwrotność wyznacznika macierzy pomnożona przez  $-1$  do potęgi  $(i+j)$  i pomnożony przez wyraz wolny, który pozostał po skreśleniu  $i$ -tego wiersza i  $j$ -tej kolumny.

$$A_{11}^{-1} = \frac{1}{293,19} (-1)^{1+1} \cdot 27,3(3) = 0,0932273725$$

$$A_{12}^{-1} = \frac{1}{293,19} (-1)^{1+2} \cdot 5,9 = -0,0201234694$$

$$A_{22}^{-1} = \frac{1}{293,19} (-1)^{2+2} \cdot 12 = 0,0409290904$$

Otrzymujemy macierz odwrotną, która pomnożona przez macierz początkową musi dać macierz jedynkową:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,0932273725 & -0,0201234694 \\ -0,0201234694 & 0,0409290904 \end{bmatrix}$$

Sprawdzenie:

$$\begin{bmatrix} 0,0932273725 & -0,0201234694 \\ -0,0201234694 & 0,0409290904 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 5,9 \\ 5,9 & 27,3(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

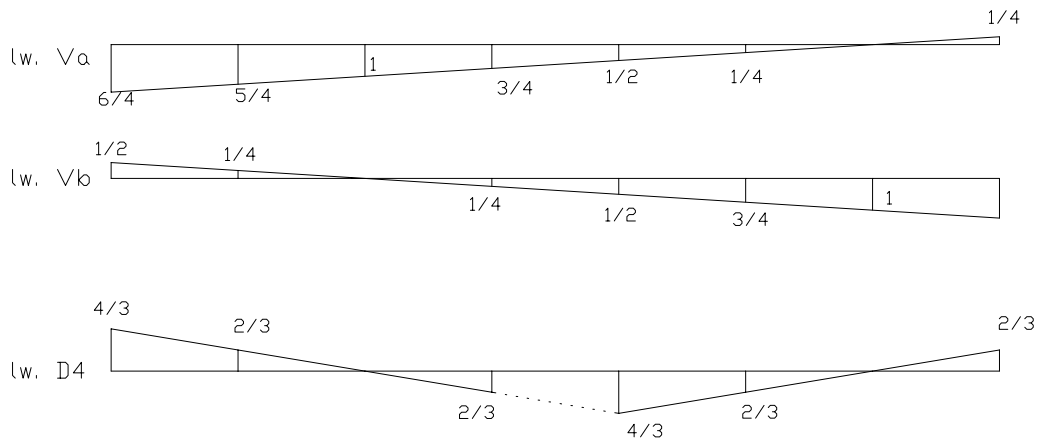
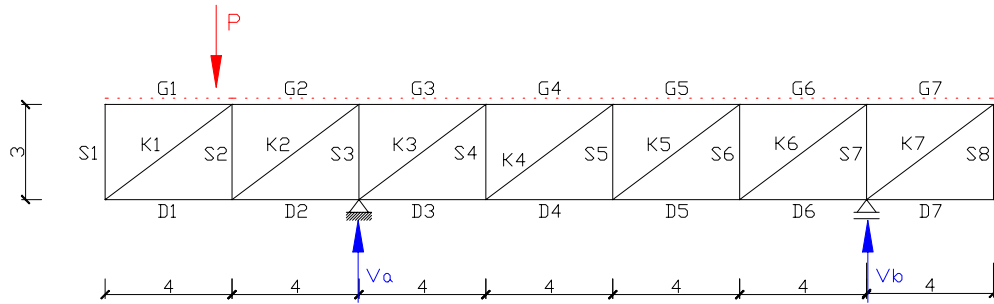
Mając wszystkie składowe równania na linię wpływu można zapisać:

$$X_1 = -0,0932273725 \cdot \Delta_{1P} + 0,020123469 \cdot \Delta_{2P}$$

$$X_2 = 0,020123469 \cdot \Delta_{1P} - 0,0409290904 \cdot \Delta_{2P}$$

$$lwD_4 = lwD_4^0 + D_4^{x_1=1} \cdot lwX_1 + D_4^{x_2=1} \cdot lwX_2$$

Lw  $D_4^0$ :



$$x \in \langle 0, 12 \rangle$$

$$D_4 = \frac{8}{3} \cdot V_b$$

$$x \in \langle 16, 28 \rangle$$

$$D_4 = \frac{8}{3} \cdot V_a$$

**Linie wpływu  $X_1$  i  $X_2$  przedstawione tabelarycznie:**

x	$\Delta_{1P}$	$\Delta_{2P}$	$B_{11}$	$B_{12}$	$B_{22}$	lw $X_1$	lw $X_2$
0	-5,900	21,333	-0,09322737	0,02012347	-0,04092909	0,97934218	-0,99188240
4	-2,950	10,667	-0,09322737	0,02012347	-0,04092909	0,48967109	-0,49594120
8	0,000	0,000	-0,09322737	0,02012347	-0,04092909	0,00000000	0,00000000
12	2,950	-14,833	-0,09322737	0,02012347	-0,04092909	-0,57351888	0,66647908
16	-4,100	-25,833	-0,09322737	0,02012347	-0,04092909	-0,13762407	0,97482861
20	-2,950	-17,833	-0,09322737	0,02012347	-0,04092909	-0,08384779	0,67053788
24	0,000	-1,500	-0,09322737	0,02012347	-0,04092909	-0,03018520	0,06139364
28	2,950	10,633	-0,09322737	0,02012347	-0,04092909	-0,06104119	-0,37584843

**Linia wpływu końcowa przedstawiona tabelarycznie:**

$D_4$ od $X_1$	$D_4$ od $X_2$	lw $D_4^0$	lw $D_4$
-0,800	-1,333	-1,333	<b>-0,7942972120</b>
-0,800	-1,333	-0,667	<b>-0,3971486060</b>
-0,800	-1,333	0,000	<b>0,0000000000</b>
-0,800	-1,333	0,667	<b>0,2368430018</b>
-0,800	-1,333	1,333	<b>0,1436611047</b>
-0,800	-1,333	0,667	<b>-0,1603056055</b>
-0,800	-1,333	0,000	<b>-0,0577100175</b>
-0,800	-1,333	-0,667	<b>-0,1167024786</b>

