

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska

Instytut Konstrukcji Budowlanych

Zakład Mechaniki Budowli



OBLICZANIE SIŁ WEWNĘTRZNYCH W POWŁOKACH ZBIORNIKÓW OSIOWO - SYMETRYCZNYCH

Marzena Zaremba

KB2

Rok akademicki 2010/2011

prowadzący: dr hab. inż. P. Litewka

Treść zadania:

Dla układu nr 1 należy:

1. Obliczyć siły wewnętrzne w stanie błonowym:

- siły normalne południkowe i równoleżnikowe w powłoce kulistej od obciążenia śniegiem p i ciężarem własnym g (ciężar właściwy γ),
- siły normalne obwodowe w powłoce walcowej od obciążenia hydrostatycznego przy max napełnieniu cieczą o ciężarze właściwym γ_c

2. Obliczyć współczynniki podatności oraz siły nadliczbowe w połączeniach:

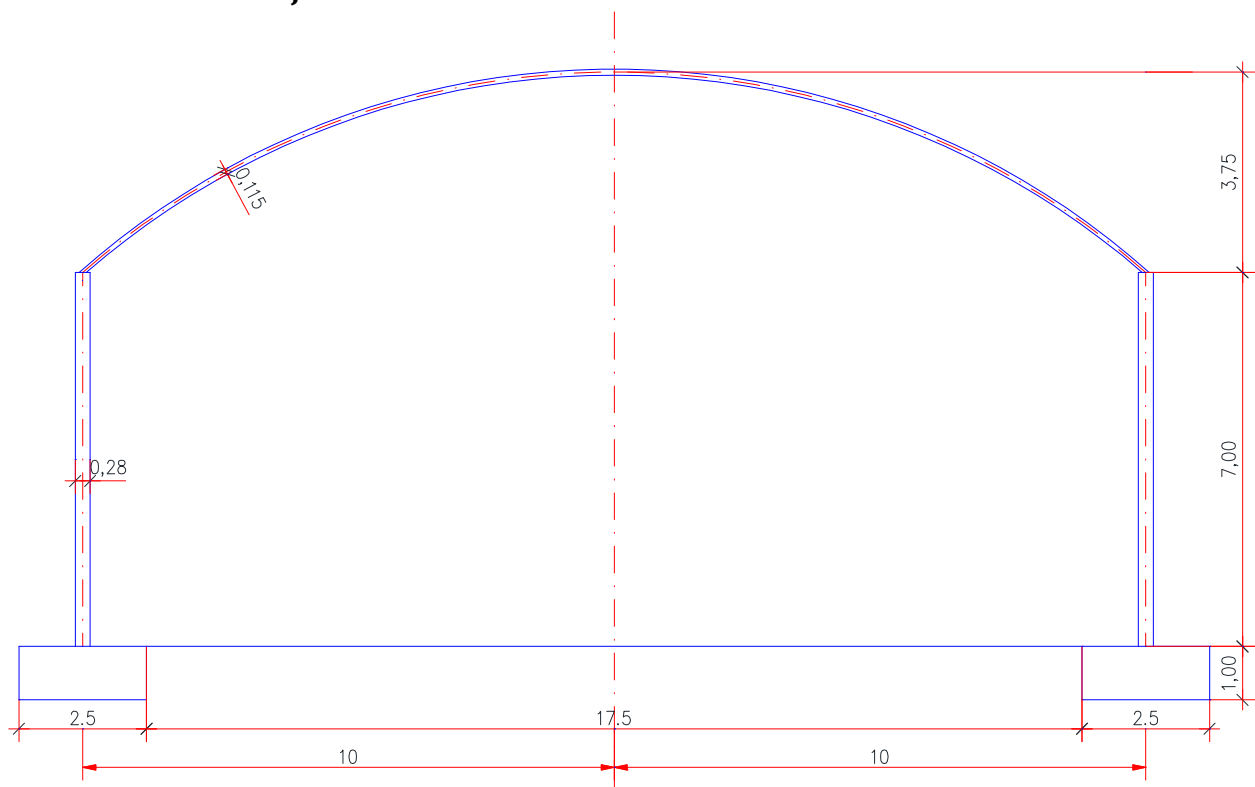
- powłoka kulista – powłoka walcowa oraz powłoka walcowa – ława fundamentowa na podłożu podatnym o sztywności C

3. Obliczyć całkowite siły wewnętrzne (w stanie błonowym i zgięciowym):

- siły normalne południkowe i równoleżnikowe oraz momenty zginające południkowe w powłoce kulistej
- siły normalne obwodowe oraz momenty zginające południkowe w powłoce walcowej

4. Sporządzić wykresy porównawcze sił wewnętrznych obliczonych w punktach 1 i 3.

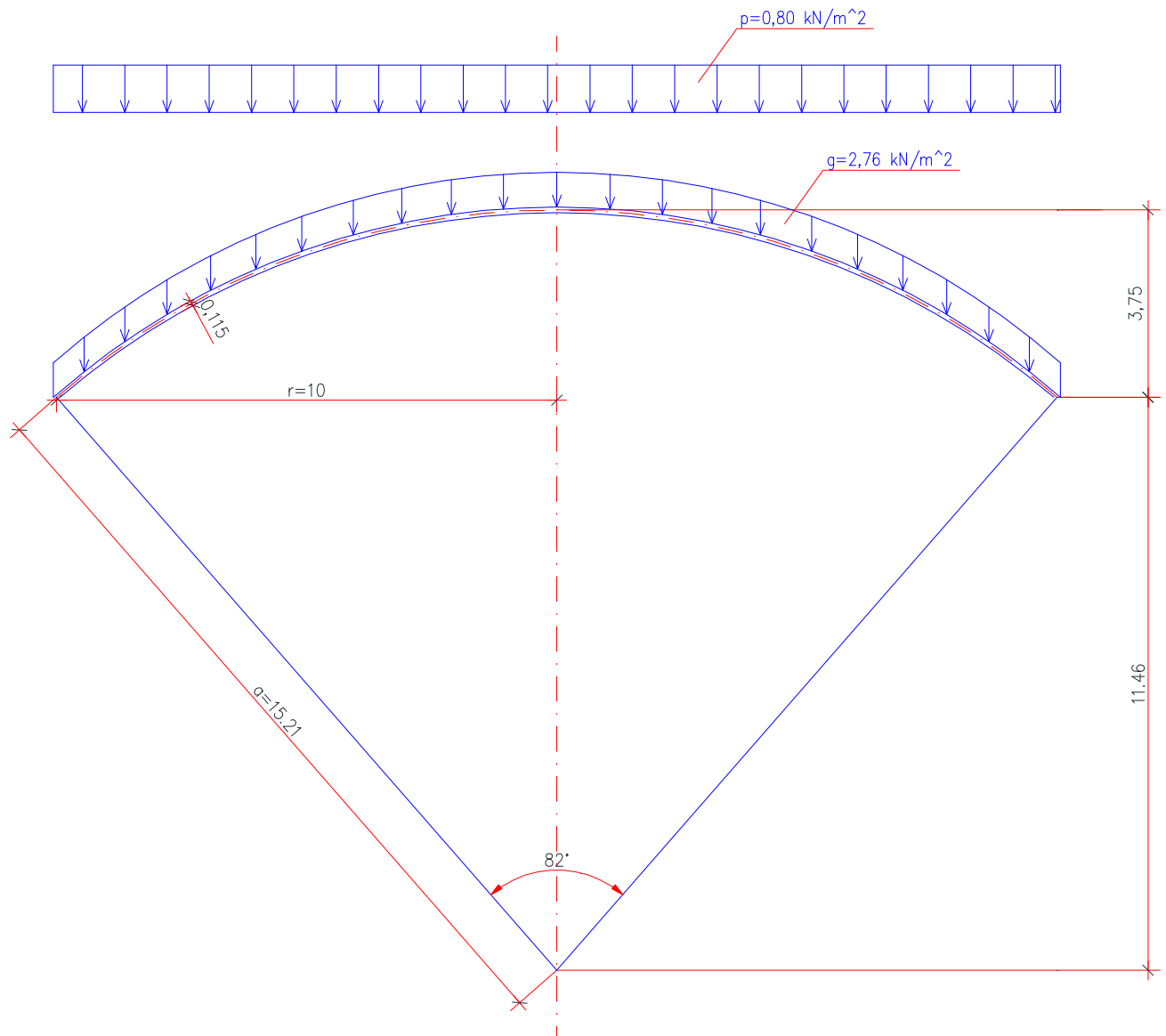
Schemat konstrukcji



f [m]	h [m]	r [m]	t ₁ [m]	t ₂ [m]	b [m]	h _b [m]	γ _c [kN/m ³]	γ [kN/m ³]	E [GPa]	ν [-]	C [kN/m ³]	p [kN/m ²]
3,75	7,00	10,0	0,115	0,28	2,4	1,00	8,0	24,0	25	0,17	150000	0,8

Siły wewnętrzne w stanie błonowym:

Kopuła kulista



Dane:

$$r^2 + (a - f)^2 = a^2$$

$$a = \frac{r^2 + f^2}{2f} = \frac{100 + 14,06}{7,5} = 15,21 \text{ m}$$

$$\alpha = \arcsin \frac{r}{a} = \arcsin \frac{10}{15,21} = 41,11 \approx 41^\circ$$

$$2\alpha = 2 \cdot 41 = 82^\circ$$

Ciężar własny kopuły:

$$g = \gamma \cdot t_1 = 24 \cdot 0,115 = 2,76 \frac{kN}{m^2}$$

Obciążenie śniegiem:

$$p = 0,8 \frac{kN}{m^2}$$

Sztywność powłoki:

$$D = \frac{E \cdot t_1^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} = \frac{25000000 \cdot 0,115^3}{12 \cdot (1 - 0,17^2)} = 3262,78 kNm$$

Współczynnik zanikania:

$$k_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot a}{t_1}} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4} \cdot (1 - \nu^2)} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15,21}{0,115}} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4} \cdot (1 - 0,17^2)} = 15,02$$

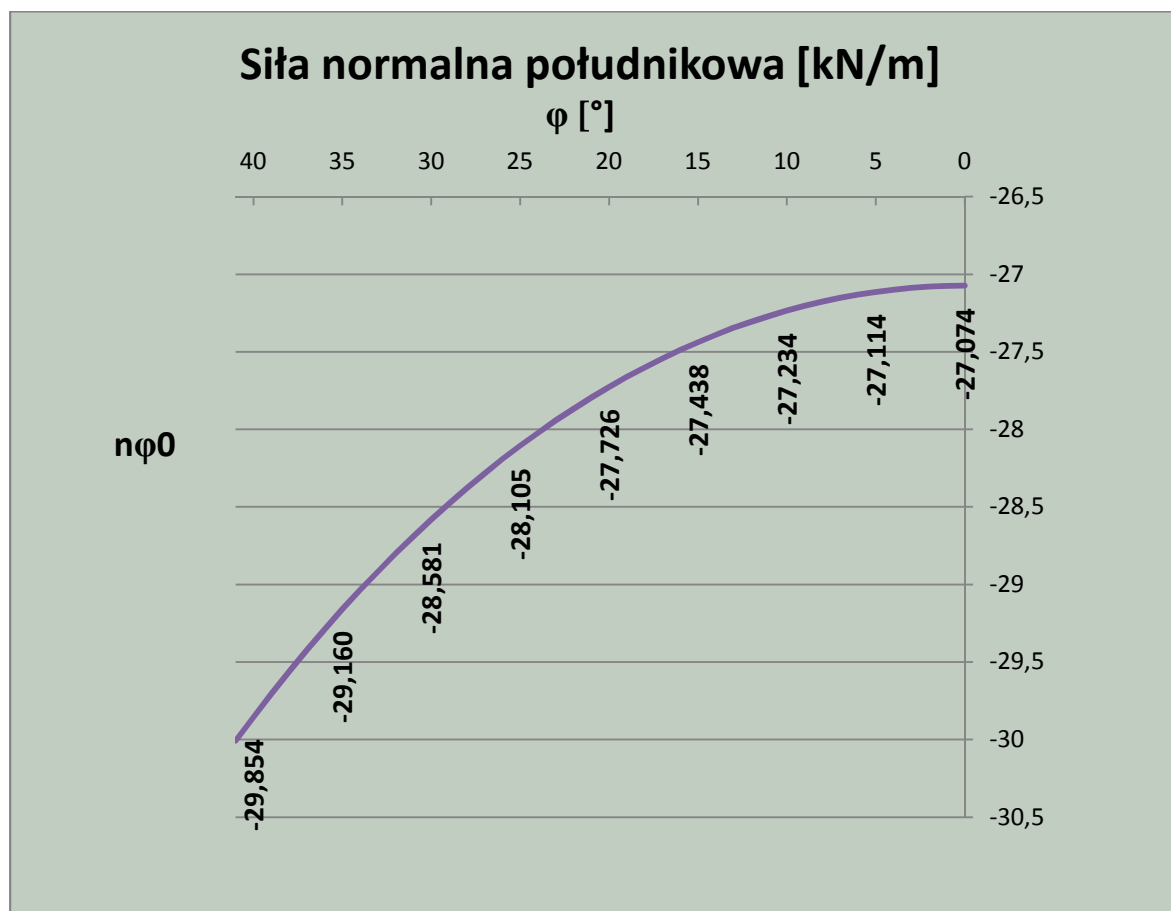
Siły normalne południkowe ($n_{\varphi 0}$) i równoleżnikowe ($n_{\theta 0}$) w powłoce kulistej od obciążenia śniegiem p i ciężarem własnym g :

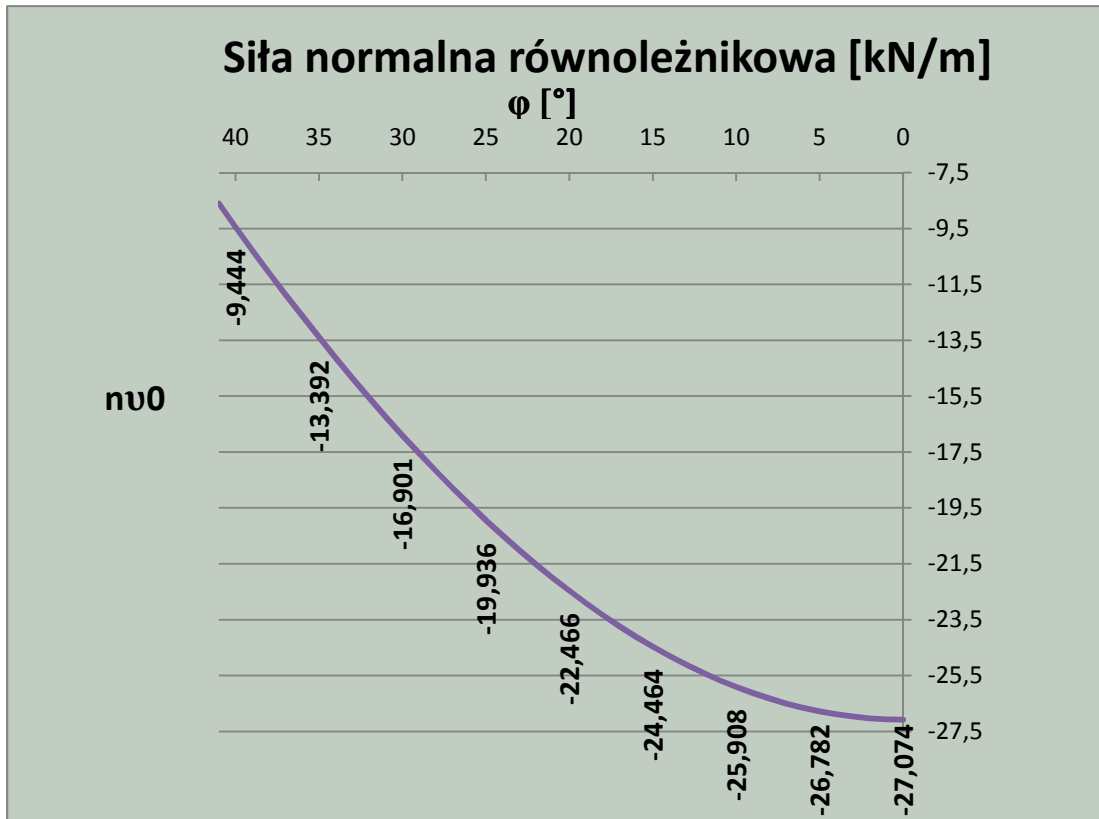
$$n_{\varphi 0} = \frac{-ga}{1 + \cos\varphi} - \frac{1}{2}pa$$

$$n_{\theta 0} = -ga \left(\cos\varphi - \frac{1}{1 + \cos\varphi} \right) - \frac{1}{2}pacos2\varphi$$

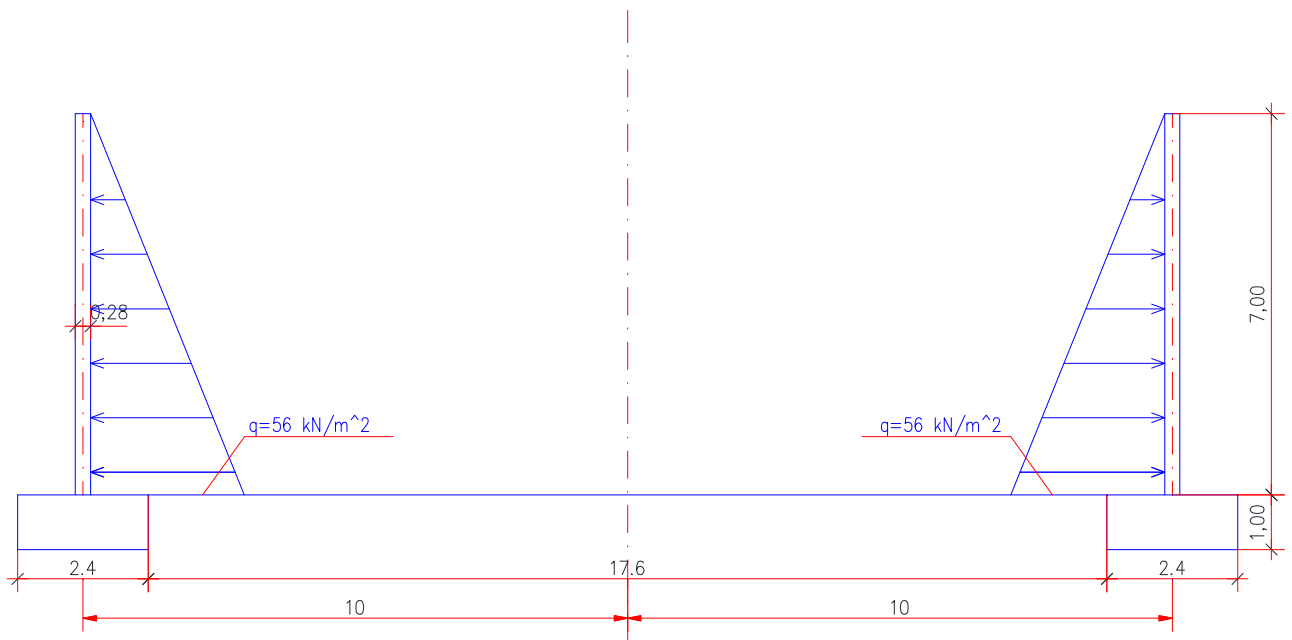
kąt φ [°]	kąt φ [rad]	$n_{\varphi 0}$ [kN/m]	$n_{\theta 0}$ [kN/m]
0	0,0000	-27,074	-27,074
1	0,0175	-27,075	-27,062
2	0,0349	-27,08	-27,027
3	0,0524	-27,088	-26,969
4	0,0698	-27,099	-26,887
5	0,0873	-27,114	-26,782
6	0,1047	-27,131	-26,653
7	0,1222	-27,152	-26,502
8	0,1396	-27,176	-26,327
9	0,1571	-27,204	-26,129
10	0,1745	-27,234	-25,908
11	0,1920	-27,268	-25,665
12	0,2094	-27,306	-25,399
13	0,2269	-27,346	-25,110
14	0,2443	-27,39	-24,798
15	0,2618	-27,438	-24,464
16	0,2793	-27,488	-24,109
17	0,2967	-27,543	-23,731
18	0,3142	-27,600	-23,331
19	0,3316	-27,662	-22,909
20	0,3491	-27,726	-22,466

21	0,3665	-27,795	-22,002
22	0,3840	-27,867	-21,516
23	0,4014	-27,943	-21,010
24	0,4189	-28,022	-20,483
25	0,4363	-28,105	-19,936
26	0,4538	-28,193	-19,368
27	0,4712	-28,284	-18,781
28	0,4887	-28,379	-18,173
29	0,5061	-28,478	-17,547
30	0,5236	-28,581	-16,901
31	0,5411	-28,688	-16,236
32	0,5585	-28,800	-15,552
33	0,5760	-28,915	-14,850
34	0,5934	-29,036	-14,130
35	0,6109	-29,160	-13,392
36	0,6283	-29,290	-12,637
37	0,6458	-29,424	-11,864
38	0,6632	-29,562	-11,074
39	0,6807	-29,706	-10,267
40	0,6981	-29,854	-9,4443
41	0,7156	-30,008	-8,6052





Powłoka walcowa



Parcie cieczy u spodu zbiornika:
 $q = \gamma_c \cdot h = 8 \cdot 7 = 56 \text{ kN/m}^2$

Sztywność powłoki:

$$D_2 = \frac{E \cdot t_2^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} = \frac{25000000 \cdot 0,28^3}{12 \cdot (1 - 0,17^2)} = 47094,36 \text{ kNm}$$

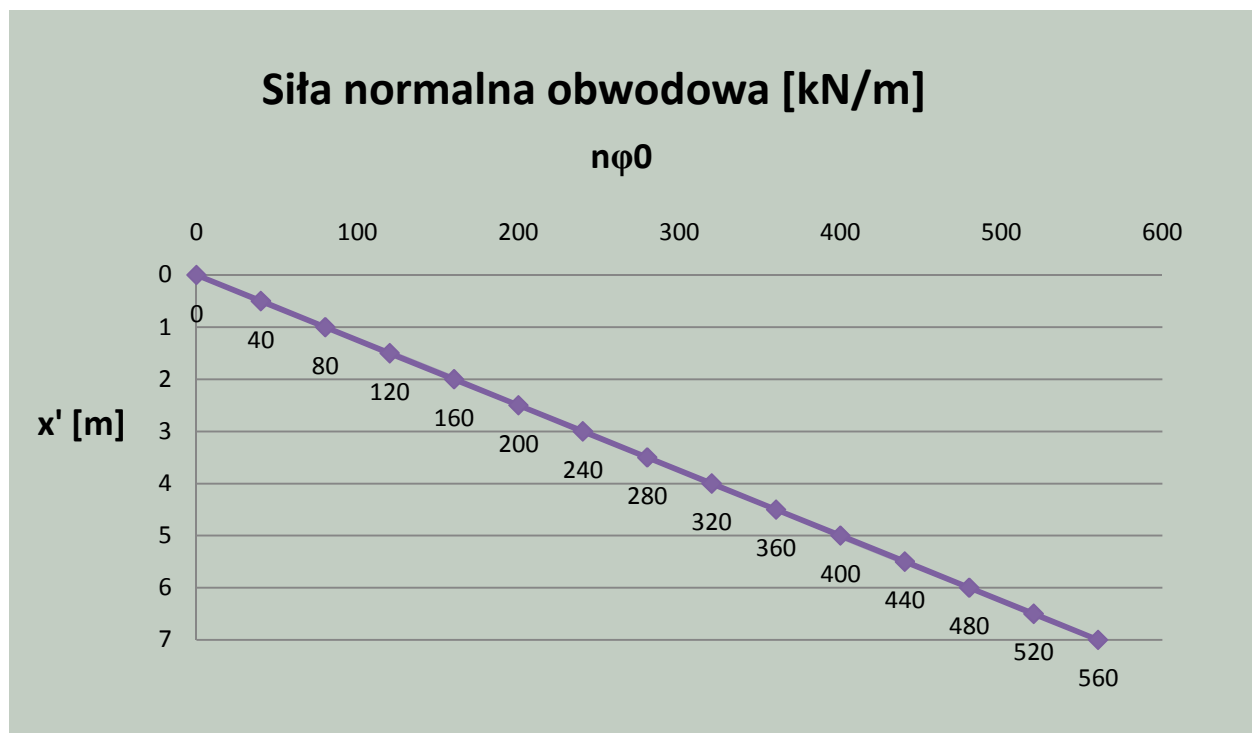
Współczynnik zanikania:

$$k_2 = \frac{1}{\sqrt{r \cdot t_2}} \cdot \sqrt[4]{3 \cdot (1 - \nu^2)} = \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 0,28}} \cdot \sqrt[4]{3 \cdot (1 - 0,17^2)} = 0,78$$

Siła normalna obwodowa ($n_{\varphi 0}$):

$$n_{\varphi 0} = \gamma_c \cdot r \cdot x'$$

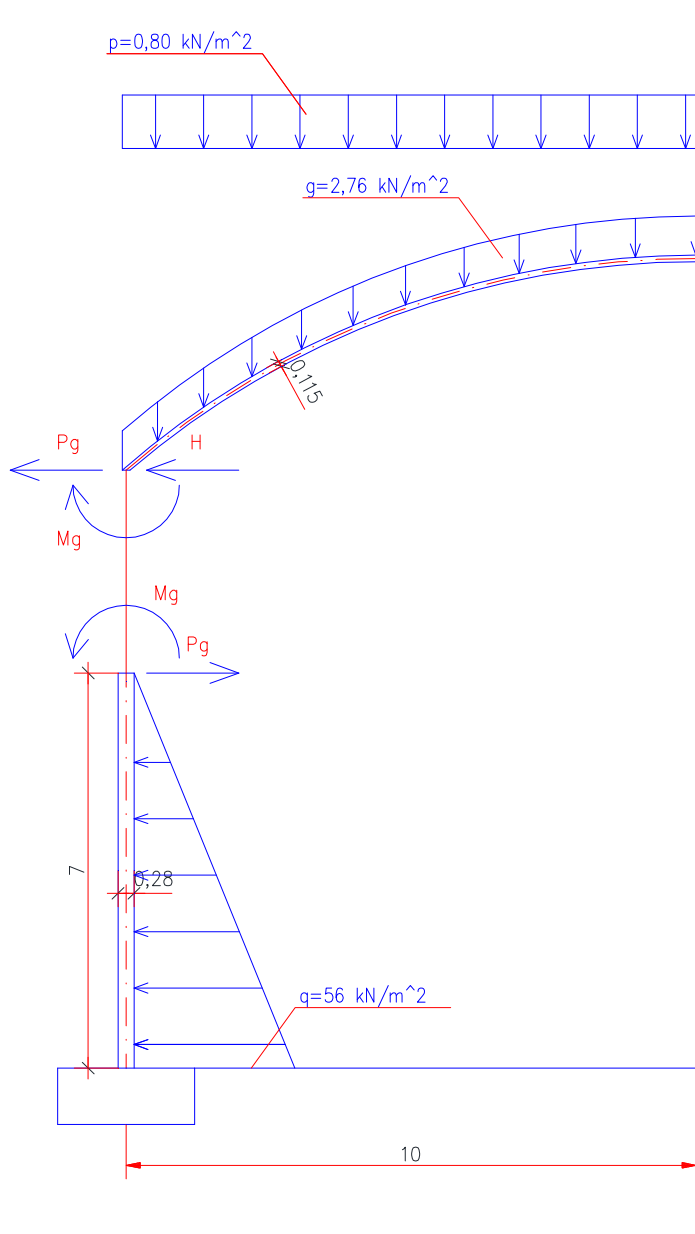
x [m]	x' [m]	$n_{\varphi 0}$ [kN/m]
7,0	0,0	0
6,5	0,5	40
6,0	1,0	80
5,5	1,5	120
5,0	2,0	160
4,5	2,5	200
4,0	3,0	240
3,5	3,5	280
3,0	4,0	320
2,5	4,5	360
2,0	5,0	400
1,5	5,5	440
1,0	6,0	480
0,5	6,5	520
0,0	7,0	560



Współczynniki podatności oraz siły nadliczbowe w połączeniach:

Powłoka kulista – powłoka walcowa

Schemat do obliczeń:



$$H = -[n_{\varphi 0}]_{\varphi=\alpha} \cdot \cos \alpha = -[-30,008] \cdot \cos(41^\circ) = 22,65 \text{ kN/m}$$

Współczynniki podatności:

$$\delta_{PP}^W = \frac{1}{2 \cdot D_2 \cdot k_2^3} = \frac{1}{2 \cdot 47094,36 \cdot 0,78^3} = 0,0000223726$$

$$\delta_{PM}^W = \delta_{MP}^W = \frac{-1}{2 \cdot D_2 \cdot k^2} = \frac{-1}{2 \cdot 47094,36 \cdot 0,78^2} = -0,0000174507$$

$$\delta_{MM}^W = \frac{1}{D_2 \cdot k_2} = \frac{1}{47094,36 \cdot 0,78} = 0,0000272230$$

$$\delta_{M0}^W = \frac{-r^2 \cdot \gamma_c}{E \cdot t_2} = \frac{-10 \cdot 8}{25000000 \cdot 0,28} = -0,0000114286$$

$$\delta_{PP}^K = \frac{2 \cdot k_1 \cdot r}{E \cdot t_1} \cdot \sin \alpha = \frac{2 \cdot 15,02 \cdot 10}{25000000 \cdot 0,115} \cdot \sin(41^\circ) = 0,0000685496$$

$$\delta_{PM}^K = \delta_{MP}^K = \frac{2 \cdot k_1^2}{E \cdot t_1} \cdot \sin \alpha = \frac{2 \cdot 15,02^2}{25000000 \cdot 0,115} \cdot \sin(41^\circ) = 0,000102962$$

$$\delta_{MM}^K = \frac{a}{D \cdot k_1} = \frac{15,21}{3262,78 \cdot 15,02} = 0,000310364$$

$$\begin{aligned} \delta_{P0}^K &= \frac{r}{E \cdot t_1} \cdot [n_{\vartheta 0} - \nu \cdot n_{\varphi 0}]_{\varphi=\alpha} + \frac{2 \cdot H \cdot k_1 \cdot r}{E \cdot t_1} \cdot \sin \alpha = \\ &= \frac{10}{25000000 \cdot 0,115} \cdot [-8,6052 - 0,17 \cdot (-30,008)] + \frac{2 \cdot 22,65 \cdot 15,02 \cdot 10}{25000000 \cdot 0,115} \cdot \sin(41^\circ) = \\ &= 0,00154465 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{M0}^K &= \frac{-1}{E \cdot t_1} \cdot \left[-\frac{dn_{\vartheta 0}}{d\varphi} + \nu \frac{dn_{\varphi 0}}{d\varphi} + (1 + \nu) \cdot (n_{\varphi 0} - n_{\vartheta 0}) \cdot \operatorname{ctg} \alpha \right]_{\varphi=\alpha} + \frac{2 \cdot H \cdot k_1^2}{E \cdot t_1} \cdot \sin \alpha = \\ &= \frac{-1}{25 \cdot 10^6 \cdot 0,115} \\ &\quad \cdot [-48,5355 + 0,17 \cdot (-8,9448 + (1 + 0,17) \cdot (-30,008 + 8,6052)) \\ &\quad \cdot \operatorname{ctg}(41^\circ)] + \frac{2 \cdot 22,65 \cdot 15,02^2}{25 \cdot 10^6 \cdot 0,115} \cdot \sin(41^\circ) = 0,00233764 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dn_{\varphi 0}}{d\varphi} &= -g \cdot a \cdot \sin \varphi \cdot \frac{1}{(1 + \cos \varphi)^2} = -2,76 \cdot 15,21 \cdot \sin(41^\circ) \cdot \frac{1}{(1 + \cos(41^\circ))^2} = \\ &= -8,9448 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dn_{\vartheta 0}}{d\varphi} &= g \cdot a \cdot \sin \varphi \cdot \left(1 + \frac{1}{(1 + \cos \varphi)^2} \right) + p \cdot a \cdot \sin 2\varphi = \\ &= 2,76 \cdot 15,21 \cdot \sin(41^\circ) \cdot \left(1 + \frac{1}{(1 + \cos(41^\circ))^2} \right) + 0,8 \cdot 15,21 \cdot \sin(82^\circ) = 48,5355 \end{aligned}$$

Równania kanoniczne i siły nadliczbowe:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\delta_{PP}^W + \delta_{PP}^K) \cdot P_g + (\delta_{PM}^W + \delta_{PM}^K) \cdot M_g + \delta_{P0}^K = 0 \\ ((\delta_{MP}^W + \delta_{MP}^K) \cdot P_g + (\delta_{MM}^W + \delta_{MM}^K) \cdot M_g + \delta_{M0}^W + \delta_{M0}^K = 0 \end{array} \right\}$$

$$I_F = \frac{b^3 \cdot 1,0}{12} = \frac{2,4^3 \cdot 1,0}{12} = 1,152m^4$$

Współczynniki podatności:

$$\delta_{PP}^L = \frac{r^2 \cdot h_b^2}{C \cdot I_F \cdot r^2 + 4 \cdot E \cdot I_L} = \frac{10^2 \cdot 1,0^2}{150000 \cdot 1,152 \cdot 10^2 + 4 \cdot 25000000 \cdot 0,2} =$$

$$= 0,00000268240$$

$$\delta_{PM}^L = \delta_{MP}^L = \frac{r^2 \cdot h_b}{C \cdot I_F \cdot r^2 + 4 \cdot E \cdot I_L} = \frac{10^2 \cdot 1,0}{150000 \cdot 1,152 \cdot 10^2 + 4 \cdot 25000000 \cdot 0,2} =$$

$$= 0,00000268240$$

$$\delta_{MM}^L = \frac{r^2}{C \cdot I_F \cdot r^2 + 4 \cdot E \cdot I_L} = \frac{10^2}{150000 \cdot 1,152 \cdot 10^2 + 4 \cdot 25000000 \cdot 0,2} =$$

$$= 0,00000268240$$

$$\delta_{P0}^{Wd} = \frac{-r^2 \cdot h \cdot \gamma_c}{E \cdot t_2} = \frac{-10^2 \cdot 7,0 \cdot 8}{25000000 \cdot 0,28} = -0,0008$$

$$\delta_{M0}^{Wd} = \frac{r^2 \cdot \gamma_c}{E \cdot t_2} = \frac{10^2 \cdot 8}{25000000 \cdot 0,28} = 0,000114286$$

Równania kanoniczne i siły nadliczbowe:

$$\begin{cases} (\delta_{PP}^W + \delta_{PP}^L) \cdot P_d + (\delta_{PM}^W + \delta_{PM}^L) \cdot M_d + \delta_{P0}^{Wd} = 0 \\ (\delta_{MP}^W + \delta_{MP}^L) \cdot P_d + (\delta_{MM}^W + \delta_{MM}^L) \cdot M_d + \delta_{M0}^{Wd} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (0,0000223726 + 0,00000268240) \cdot P_d + (-0,0000174507 + 0,00000268240) \cdot M_d + \\ \quad \quad \quad -0,0008 = 0 \\ (-0,0000174507 + 0,00000268240) \cdot P_d + (0,0000272230 + 0,00000268240) \cdot M_d + \\ \quad \quad \quad +0,000114286 = 0 \end{cases}$$

$$P_d = 41,862704kN/m$$

$$M_d = 16,851638kNm/m$$

Obliczenie całkowitych sił wewnętrznych:

Powłoka kulista

Siła normalna południkowa n_φ :

$$n_\varphi = \sqrt{2}P \cdot \sin\alpha \cdot e^{-k_1 \cdot \omega} \cdot \cos\left(k_1 \omega + \frac{\pi}{4}\right) \cdot ctg\varphi - \frac{2 \cdot M \cdot k_1}{a} \cdot e^{-k_1 \cdot \omega} \cdot \sin(k_1 \omega) \cdot ctg\varphi$$

Siła normalna równoleżnikowa n_v :

$$n_g = 2 \cdot P \cdot k_1 \cdot \sin \alpha \cdot e^{-k_1 \cdot \omega} \cdot \cos(k_1 \omega) + \frac{2 \cdot M \cdot k_1^2}{a} \cdot e^{-k_1 \cdot \omega} \cdot [\cos(k_1 \omega) - \sin(k_1 \omega)]$$

Moment zginający południkowy M_φ :

$$M_\varphi = \frac{P \cdot a}{k_1} \cdot \sin \alpha \cdot e^{-k_1 \cdot \omega} \cdot \sin(k_1 \omega) + M \cdot e^{-k_1 \cdot \omega} \cdot [\cos(k_1 \omega) + \sin(k_1 \omega)]$$

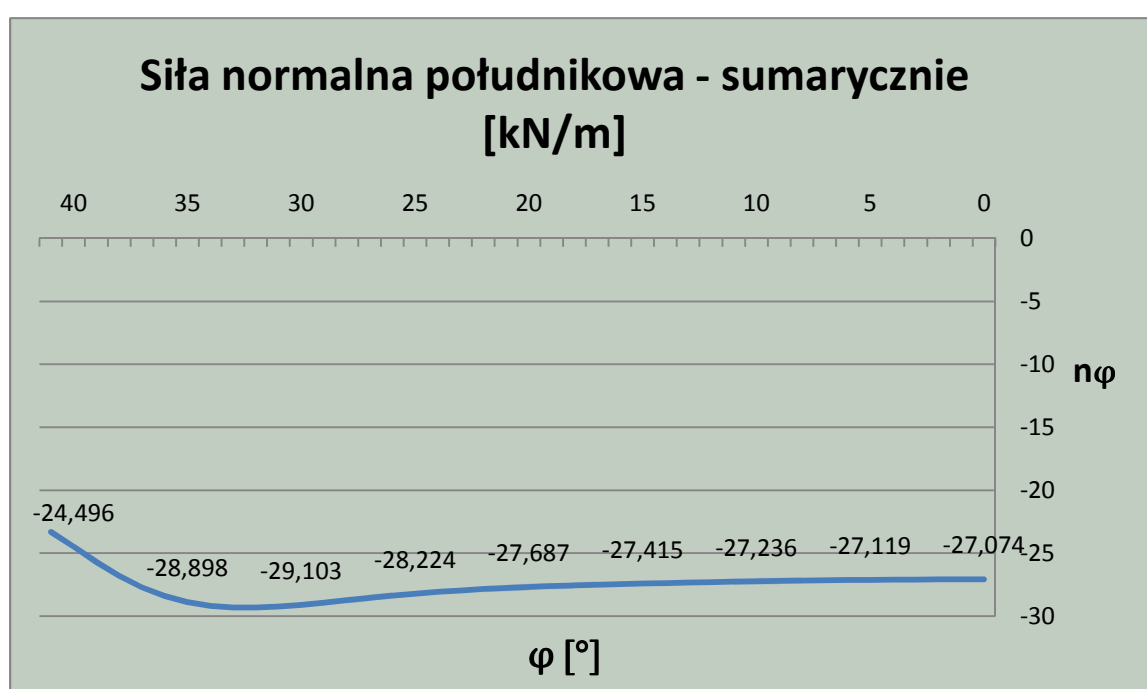
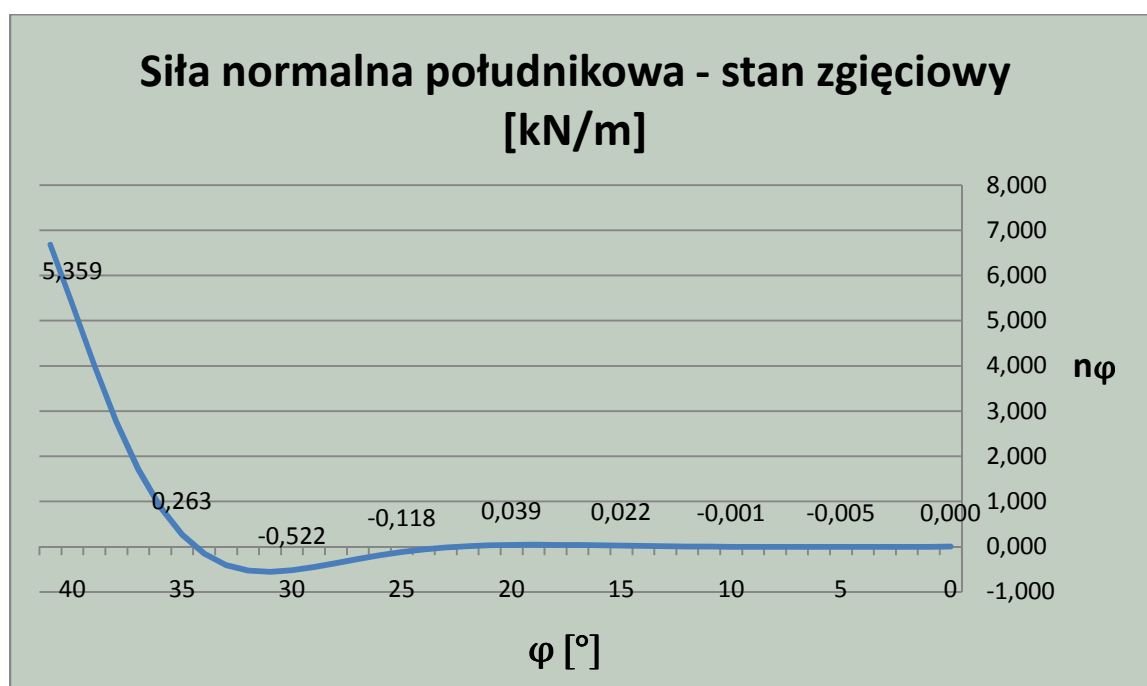
gdzie:

$$P = P_g + H$$

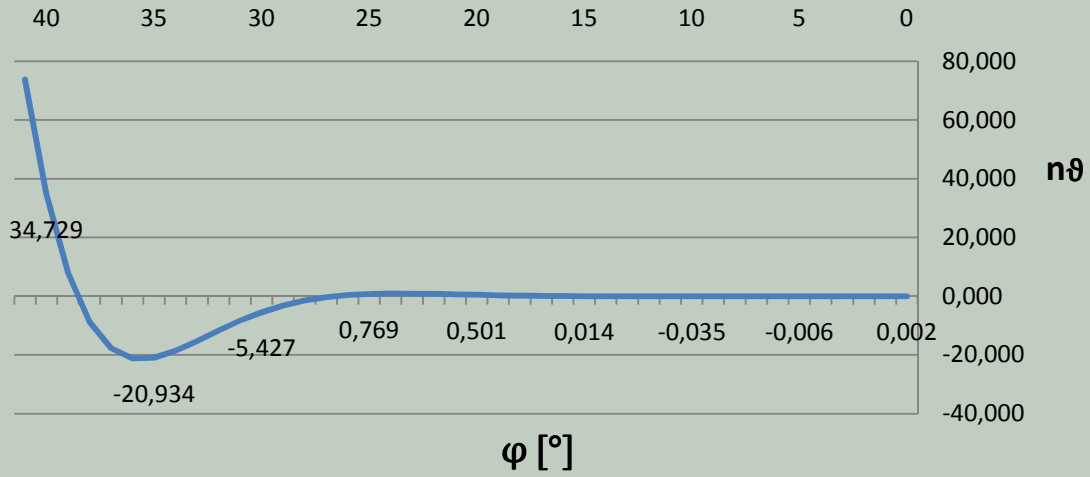
$$M = M_g$$

kąt φ [°]	kąt ω [°]	kąt φ [rad]	kąt ω [rad]	n_φ [kN/m] stan zgięciowy	n_φ [kN/m] sumarycznie	n_g [kN/m] stan zgięciowy	n_g [kN/m] sumarycznie	M_φ [kNm/m]
0	41	0,0000	0,7156	0,000	-27,074	0,002	-27,072	0,000
1	40	0,0175	0,6981	-0,006	-27,081	0,001	-27,061	0,000
2	39	0,0349	0,6807	-0,005	-27,085	0,001	-27,026	0,000
3	38	0,0524	0,6632	-0,005	-27,093	-0,001	-26,969	0,000
4	37	0,0698	0,6458	-0,005	-27,105	-0,003	-26,889	0,000
5	36	0,0873	0,6283	-0,005	-27,119	-0,006	-26,787	0,000
6	35	0,1047	0,6109	-0,005	-27,137	-0,010	-26,663	0,000
7	34	0,1222	0,5934	-0,005	-27,157	-0,015	-26,517	0,001
8	33	0,1396	0,5760	-0,004	-27,181	-0,022	-26,348	0,001
9	32	0,1571	0,5585	-0,003	-27,207	-0,028	-26,157	0,001
10	31	0,1745	0,5411	-0,001	-27,236	-0,035	-25,943	0,001
11	30	0,1920	0,5236	0,002	-27,267	-0,039	-25,704	0,001
12	29	0,2094	0,5061	0,005	-27,3	-0,040	-25,438	0,001
13	28	0,2269	0,4887	0,010	-27,336	-0,033	-25,143	0,000
14	27	0,2443	0,4712	0,016	-27,374	-0,017	-24,815	-0,001
15	26	0,2618	0,4538	0,022	-27,415	0,014	-24,451	-0,002
16	25	0,2793	0,4363	0,029	-27,459	0,063	-24,046	-0,004
17	24	0,2967	0,4189	0,035	-27,507	0,135	-23,595	-0,006
18	23	0,3142	0,4014	0,040	-27,56	0,233	-23,098	-0,009
19	22	0,3316	0,3840	0,042	-27,62	0,356	-22,553	-0,013
20	21	0,3491	0,3665	0,039	-27,687	0,501	-21,965	-0,017
21	20	0,3665	0,3491	0,030	-27,765	0,657	-21,345	-0,020
22	19	0,3840	0,3316	0,011	-27,855	0,802	-20,715	-0,023
23	18	0,4014	0,3142	-0,018	-27,961	0,904	-20,106	-0,022
24	17	0,4189	0,2967	-0,061	-28,083	0,914	-19,569	-0,018
25	16	0,4363	0,2793	-0,118	-28,224	0,769	-19,166	-0,007
26	15	0,4538	0,2618	-0,190	-28,382	0,387	-18,981	0,012
27	14	0,4712	0,2443	-0,273	-28,557	-0,329	-19,109	0,043
28	13	0,4887	0,2269	-0,364	-28,742	-1,478	-19,652	0,087
29	12	0,5061	0,2094	-0,451	-28,929	-3,156	-20,703	0,146
30	11	0,5236	0,1920	-0,522	-29,103	-5,427	-22,328	0,219

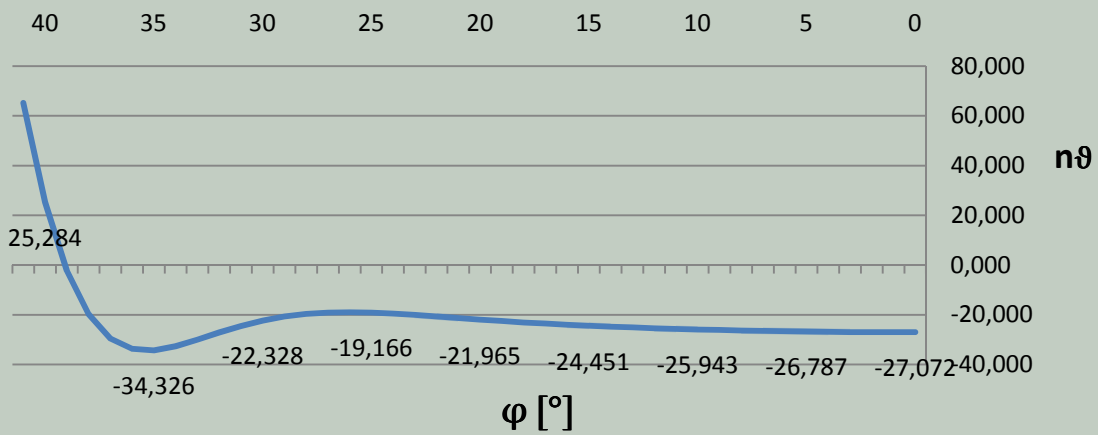
31	10	0,5411	0,1745	-0,556	-29,244	-8,294	-24,529	0,304
32	9	0,5585	0,1571	-0,527	-29,327	-11,655	-27,207	0,393
33	8	0,5760	0,1396	-0,405	-29,321	-15,250	-30,100	0,474
34	7	0,5934	0,1222	-0,154	-29,19	-18,599	-32,729	0,525
35	6	0,6109	0,1047	0,263	-28,898	-20,934	-34,326	0,517
36	5	0,6283	0,0873	0,877	-28,413	-21,139	-33,775	0,412
37	4	0,6458	0,0698	1,710	-27,714	-17,709	-29,572	0,162
38	3	0,6632	0,0524	2,763	-26,799	-8,751	-19,825	-0,291
39	2	0,6807	0,0349	4,005	-25,7	7,945	-2,323	-1,004
40	1	0,6981	0,0175	5,359	-24,496	34,729	25,284	-2,028
41	0	0,7156	0,0000	6,684	-23,324	73,770	65,165	-3,397

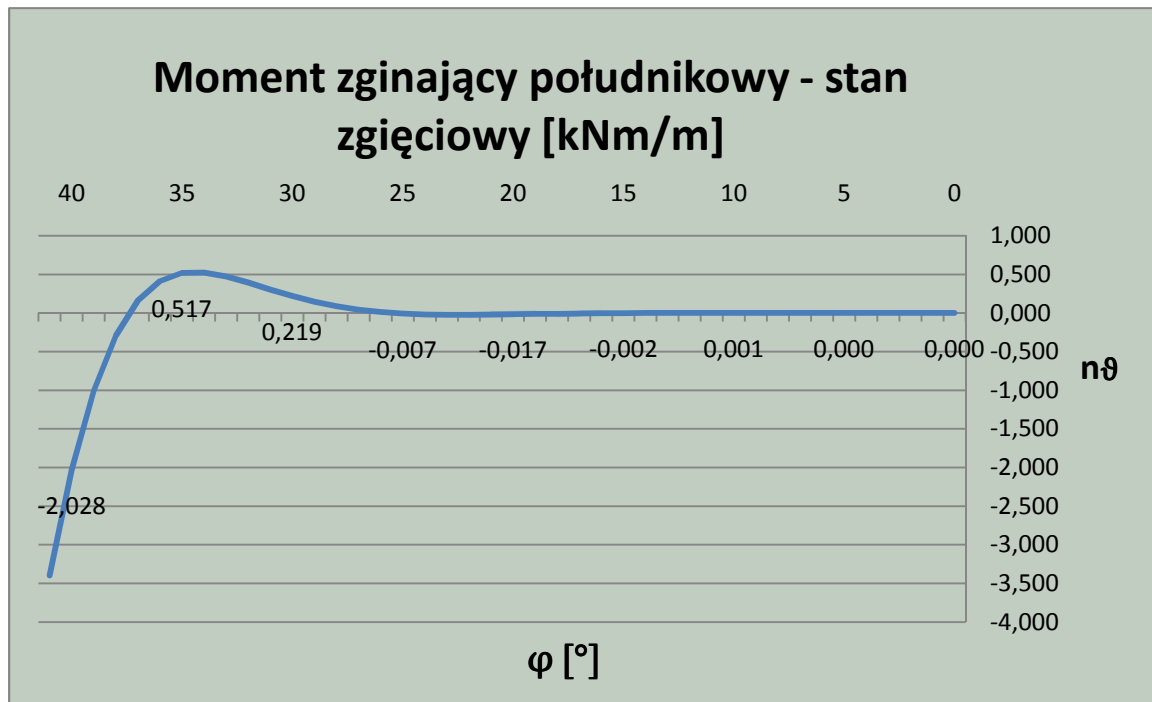


Siła normalna równoleżnikowa - stan zgięciowy [kN/m]



Siła normalna równoleżnikowa- sumarycznie [kN/m]





Powłoka walcowa

Siła normalna obwodowa n_φ :

$$n_\varphi = \frac{-6 \cdot P \cdot (1 - \nu^2)}{r \cdot k_2^3 \cdot t_2^2} \cdot e^{-k_2 \cdot x} \cdot \cos(k_2 \cdot x) + \frac{6 \cdot M \cdot (1 - \nu^2)}{r \cdot k_2^2 \cdot t_2^2} \cdot e^{-k_2 \cdot x} \cdot [\cos(k_2 \cdot x) - \sin(k_2 \cdot x)]$$

Moment zginający południkowy M:

$$M = \frac{-P}{k_2} \cdot e^{-k_2 \cdot x} \cdot \sin(k_2 \cdot x) + M \cdot e^{-k_2 \cdot x} \cdot [\cos(k_2 \cdot x) + \sin(k_2 \cdot x)]$$

gdzie:

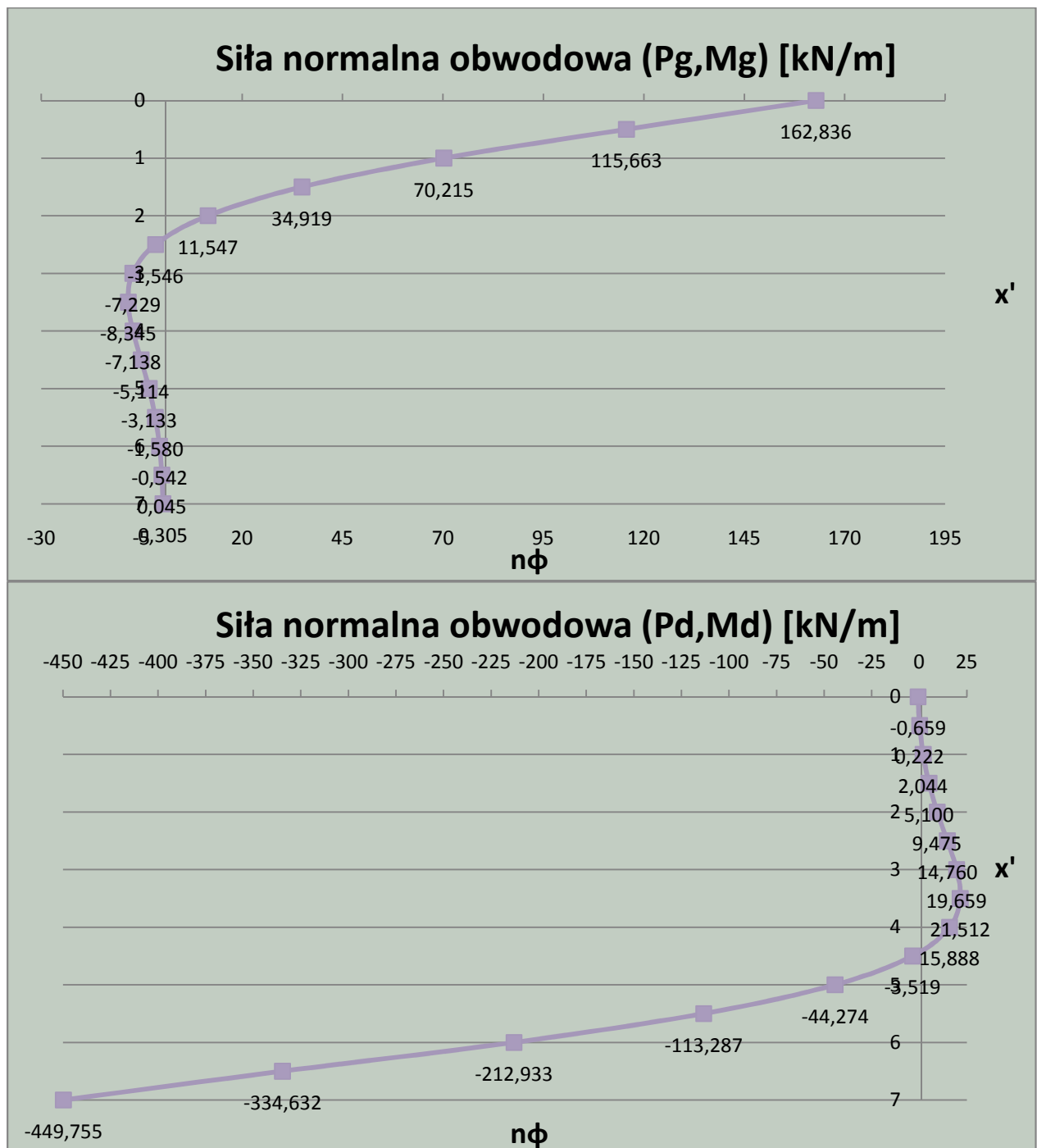
$$P = P_d$$

$$M = M_d$$

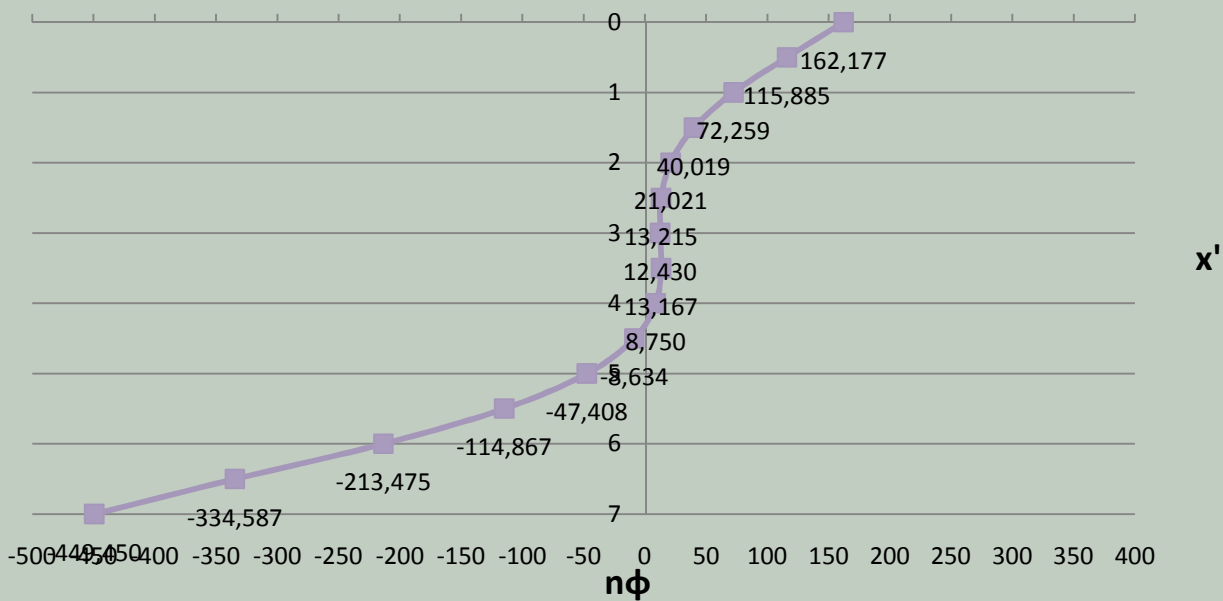
dla $P = P_g$ i $M = M_g$ współrzędna x jest zastępowana przez x'

x [m]	x' [m]	n_φ (P_g, M_g) [kN/m]	n_φ (P_d, M_d) [kN/m]	n_φ (P_g, M_g, P_d, M_d) [kN/m]	n_φ Sumarycznie [kN/m]	M (P_g, M_g) [kNm/m]	M (P_d, M_d) [kNm/m]	M (P_g, M_g, P_d, M_d) [kNm/m]
7,0	0,0	162,836	-449,755	162,177	162,177	-3,397	0,164	-3,233
6,5	0,5	115,663	-334,632	115,885	155,885	1,551	0,254	1,805
6,0	1,0	70,215	-212,933	72,259	152,259	3,499	0,336	3,836
5,5	1,5	34,919	-113,287	40,019	160,019	3,672	0,366	4,037

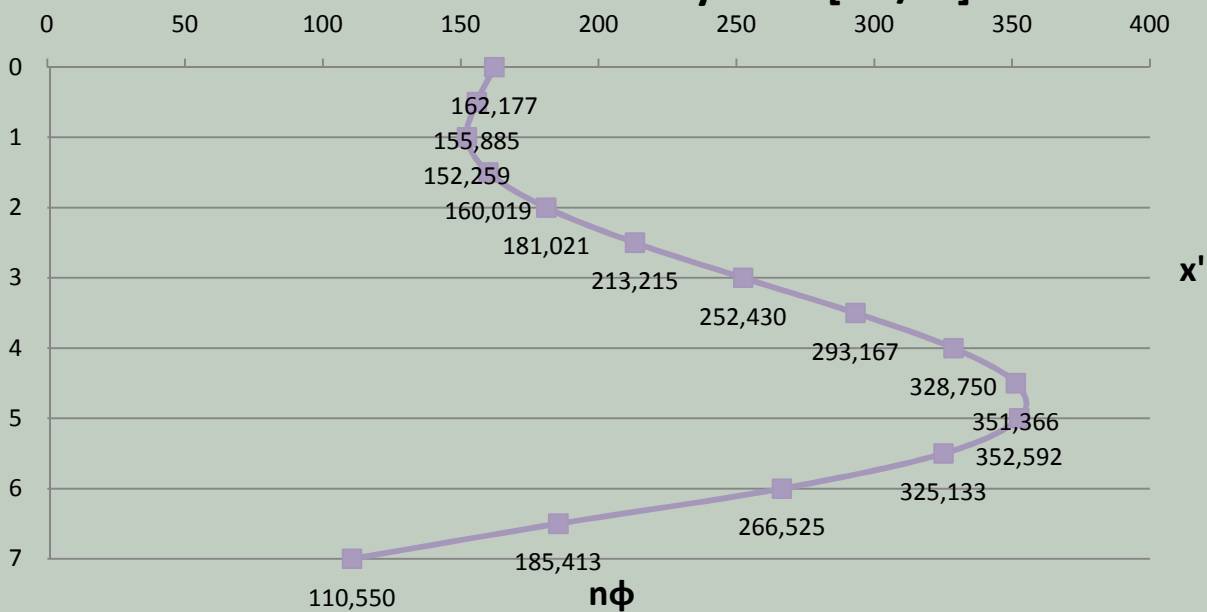
5,0	2,0	11,547	-44,274	21,021	181,021	2,995	0,265	3,260
4,5	2,5	-1,546	-3,519	13,215	213,215	2,067	-0,074	1,994
4,0	3,0	-7,229	15,888	12,430	252,430	1,216	-0,779	0,437
3,5	3,5	-8,345	21,512	13,167	293,167	0,576	-1,968	-1,392
3,0	4,0	-7,138	19,659	8,750	328,750	0,164	-3,677	-3,514
2,5	4,5	-5,114	14,760	-8,634	351,366	-0,059	-5,754	-5,813
2,0	5,0	-3,133	9,475	-47,408	352,592	-0,149	-7,698	-7,847
1,5	5,5	-1,580	5,100	-114,867	325,133	-0,160	-8,481	-8,641
1,0	6,0	-0,542	2,044	-213,475	266,525	-0,131	-6,378	-6,510
0,5	6,5	0,045	0,222	-334,587	185,413	-0,092	1,075	0,984
0,0	7,0	0,305	-0,659	-449,450	110,550	-0,054	16,852	16,797

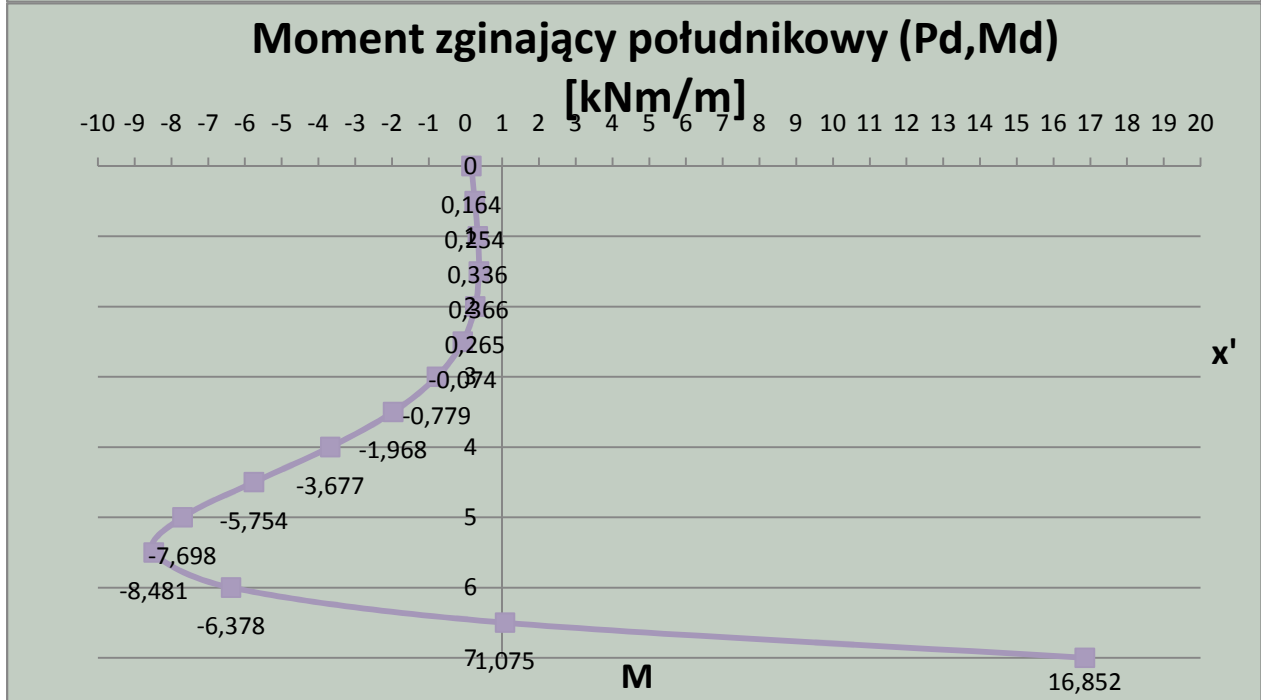
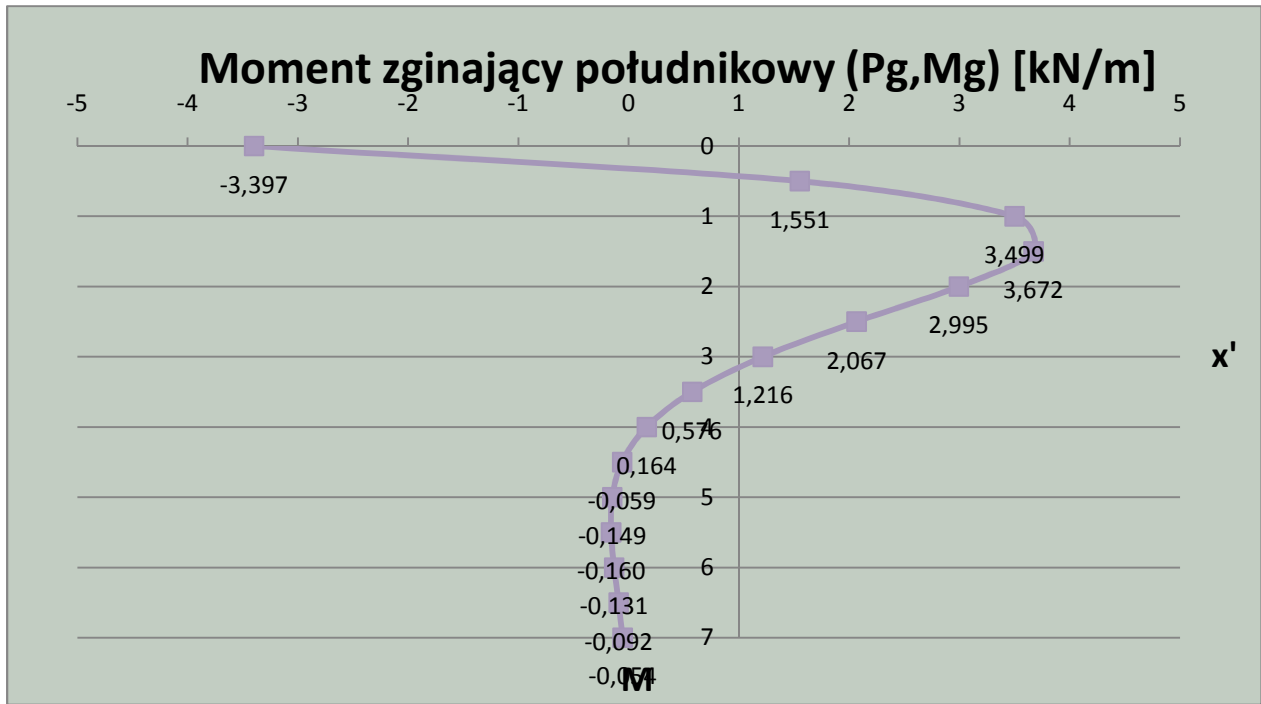


Siła normalna obwodowa (Pg,Mg,Pd,Md) [kN/m]



Siła normalna sumarycznie [kN/m]





Moment zginający południkowy (Pg,Mg,Pd,Md)

[kNm/m]

