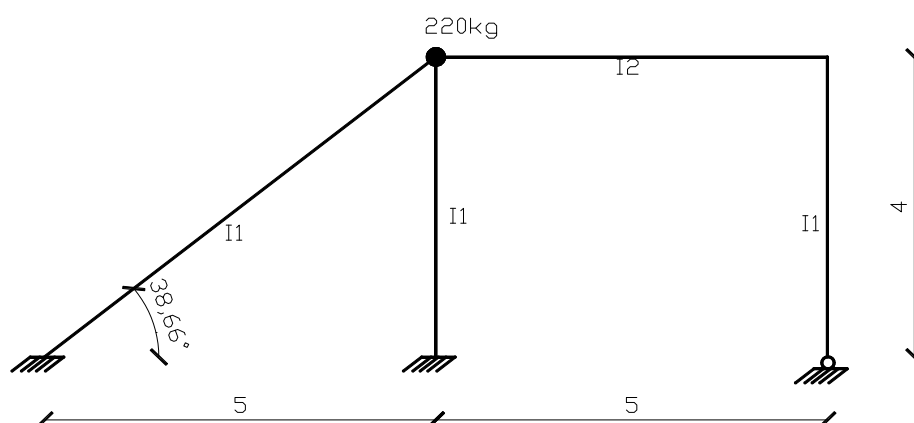




Projekt wykonał: Krzysztof Wójtowicz  
Sprawdził: dr inż. Przemysław Litewka



$I_1=I_{220}$   
 $A=39,6\text{cm}^2=0,00396\text{m}^2$   
 $\mu=31,1\text{ kg/m}$   
 $I=3060\text{cm}^4=0,0000306\text{m}^4$   
 $EI=6273000\text{Nm}^2$   
 $EA=811800000\text{N}$

$I_1=I_{240}$   
 $A=46,1\text{cm}^2=0,00461\text{m}^2$   
 $\mu=36,2\text{ kg/m}$   
 $I=4250\text{cm}^4=0,000042\text{m}^4$   
 $EI=8712500\text{Nm}^2$   
 $EA=945050000\text{N}$

- 1) Obliczyć częstość drgań własnych
- 2) Narysować pierwsze trzy postacie drgań własnych

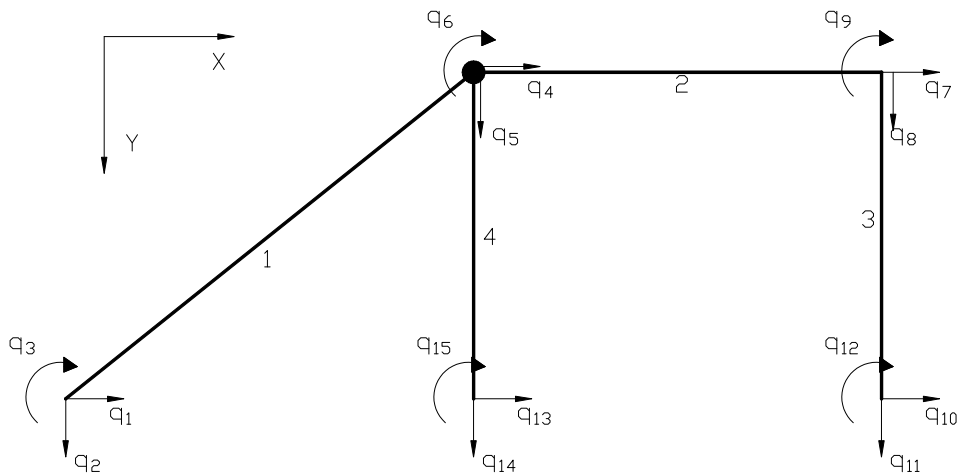
Ogólna postać ruchu przyjmuje postać:

$$\underline{K} \cdot \underline{q} + \underline{C} \cdot \underline{\dot{q}} + \underline{M} \cdot \underline{\ddot{q}} = \underline{P} \quad (1)$$

Ponieważ nie uwzględniamy tłumienia oraz sił wymuszających nasze równanie przyjmuje postać:

$$\underline{K} \cdot \underline{q} + \underline{M} \cdot \underline{\ddot{q}} = 0 \quad (2)$$

Przyjęcie układu globalnego oraz przemieszczeń węzłowych



Przyjęcie układów lokalnych oraz przemieszczeń węzłowych

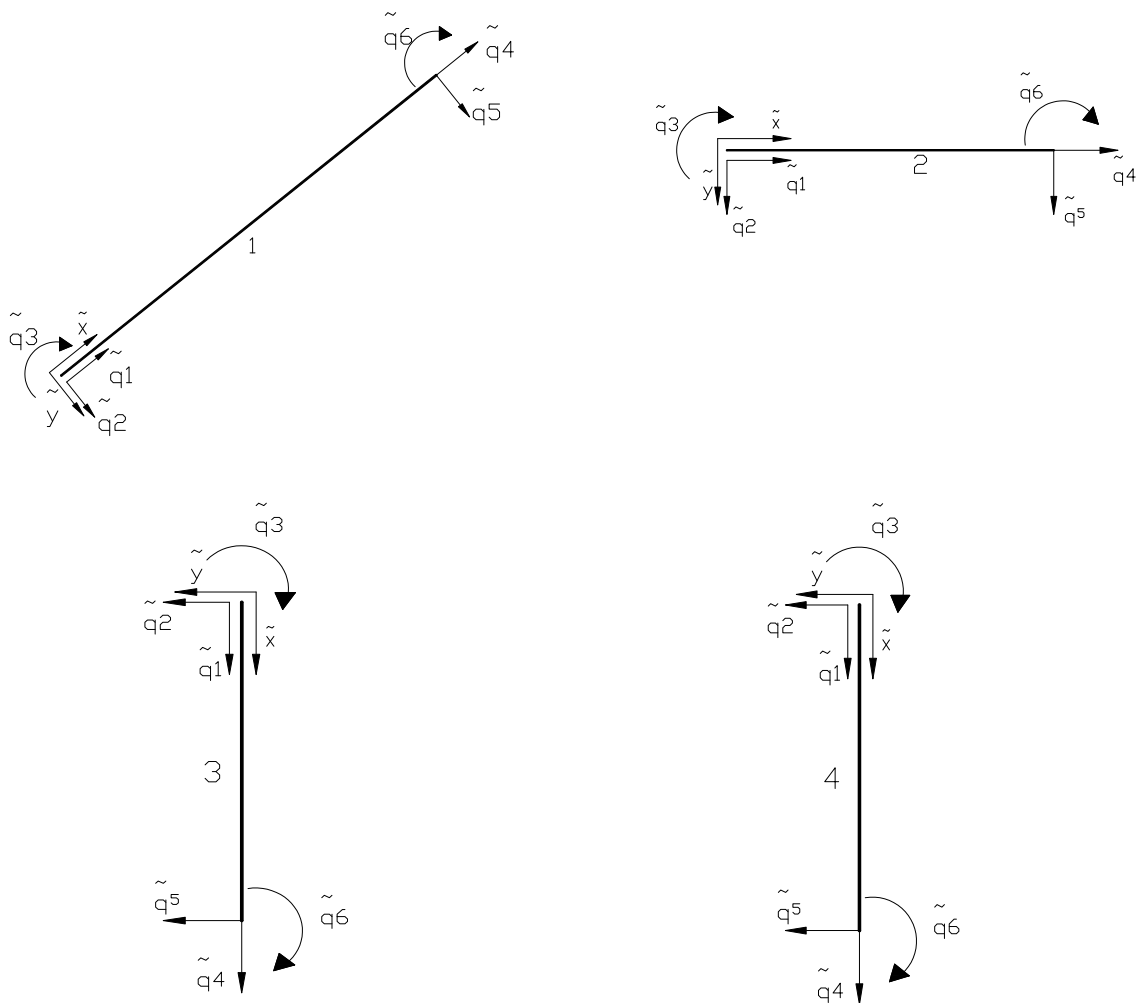


Tabela Powiązań

Nr pręta	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	4	5	6	7	8	9
3	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	13	14	15

### Budowa macierzy sztywności

Dla prętów nr 1,2,4 korzystamy z macierzy sztywności z obustronnym utwierdzeniem

$$\tilde{K}_{(e)} = \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} EAI^2 & 0 & 0 & -EAI^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI & 6EI l & 0 & -12EI & 6EI l \\ 0 & 6EI l & 4EI l^2 & 0 & -6EI l & 2EI l^2 \\ -EAI^2 & 0 & 0 & EAI^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12EI & -6EI l & 0 & 12EI & -6EI l \\ 0 & 6EI l & 2EI l^2 & 0 & -6EI l & 4EI l^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Dla pręta nr 3 korzystamy z macierzy sztywności z przegubem na prawym końcu

$$\tilde{K}_{(e)} = \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} EAI^2 & 0 & 0 & -EAI^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3EI & 3EI l & 0 & -3EI & 0 \\ 0 & 3EI l & 3EI l^2 & 0 & -3EI l & 0 \\ -EAI^2 & 0 & 0 & EAI^2 & 0 & 0 \\ 0 & -3EI & -3EI l & 0 & 3EI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy

$$\tilde{K}_{(1)} = \begin{bmatrix} 126844000 & 0 & 0 & -126844000 & 0 & 0 \\ 0 & 287155 & 918896 & 0 & -287155 & 918896 \\ 0 & 918896 & 3920620 & 0 & -918896 & 1960310 \\ -126844000 & 0 & 0 & 126844000 & 0 & 0 \\ 0 & -287155 & -918896 & 0 & 287155 & -918896 \\ 0 & 918896 & 1960310 & 0 & -918896 & 3920620 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}_{(2)} = \begin{bmatrix} 189010000 & 0 & 0 & -189010000 & 0 & 0 \\ 0 & 836400 & 2091000 & 0 & -836400 & 2091000 \\ 0 & 2091000 & 6970000 & 0 & -2091000 & 3485000 \\ -189010000 & 0 & 0 & 189010000 & 0 & 0 \\ 0 & -836400 & -2091000 & 0 & 836400 & -2091000 \\ 0 & 2091000 & 3485000 & 0 & -2091000 & 6970000 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}_{(3)} = \begin{bmatrix} 202950000 & 0 & 0 & -202950000 & 0 & 0 \\ 0 & 294047 & 1176190 & 0 & -294047 & 0 \\ 0 & 1176190 & 4704750 & 0 & -1176190 & 0 \\ -202950000 & 0 & 0 & 202950000 & 0 & 0 \\ 0 & -294047 & -1176190 & 0 & 294047 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}_{(4)} = \begin{bmatrix} 202950000 & 0 & 0 & -202950000 & 0 & 0 \\ 0 & 1176190 & 2352380 & 0 & -1176190 & 2352380 \\ 0 & 2352380 & 6273000 & 0 & -2352380 & 3136500 \\ -202950000 & 0 & 0 & 202950000 & 0 & 0 \\ 0 & -1176190 & -2352380 & 0 & 1176190 & -2352380 \\ 0 & 2352380 & 3136500 & 0 & -2352380 & 6273000 \end{bmatrix}$$

Następnie transformujemy macierze sztywności z układu lokalnego do globalnego według wzoru

$$K_{(e)} = T^T \tilde{K}_{(e)} T \quad (5)$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Dla pręta nr 1 kąt  $\alpha = -38,66^\circ$ , stąd macierz transformacji przyjmuje postać

$$T = \begin{bmatrix} 0,781 & -0,625 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,625 & 0,781 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,781 & -0,625 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,625 & 0,781 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dla pręta nr 3,4 kąt  $\alpha = 90^\circ$ , stąd macierz transformacji przyjmuje postać

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1,0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz sztywności pręta nr 2 nie ulega zmianie ponieważ kąt  $\alpha = 0^\circ$

Po transformacji macierze przyjmują postać

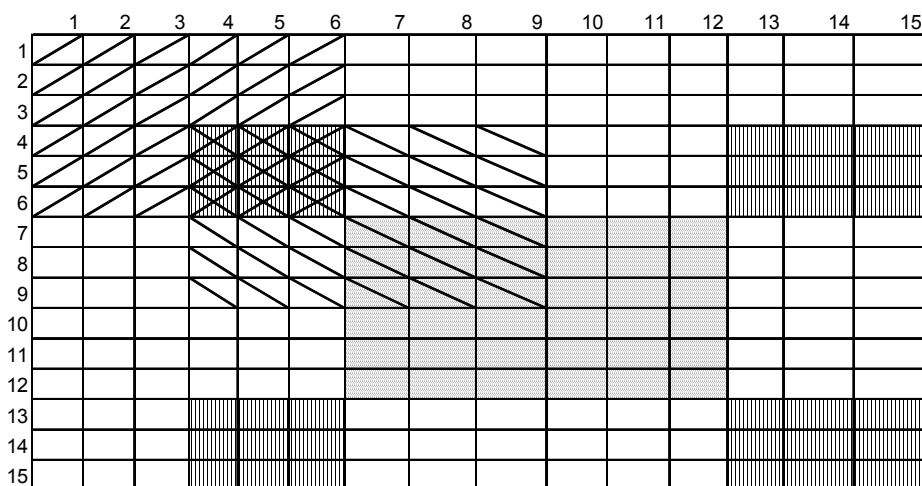
$$K_{(1)} = \begin{bmatrix} 77455400 & -61735000 & 574032 & -77455400 & 61735000 & 574032 \\ -61735000 & 49675500 & 717536 & 61735000 & -49675500 & 717536 \\ 574032 & 717536 & 3920620 & -574032 & -717536 & 1960310 \\ -77455400 & 61735000 & -574032 & 77455400 & -61735000 & -574032 \\ 61735000 & -49675500 & -717536 & -61735000 & 49675500 & -717536 \\ 574032 & 717536 & 1960310 & -574032 & -717536 & 3920620 \end{bmatrix}$$

$$K_{(2)} = \begin{bmatrix} 189010000 & 0 & 0 & -189010000 & 0 & 0 \\ 0 & 836400 & 2091000 & 0 & -836400 & 2091000 \\ 0 & 2091000 & 6970000 & 0 & -2091000 & 3485000 \\ -189010000 & 0 & 0 & 189010000 & 0 & 0 \\ 0 & -836400 & -2091000 & 0 & 836400 & -2091000 \\ 0 & 2091000 & 3485000 & 0 & -2091000 & 6970000 \end{bmatrix}$$

$$K_{(3)} = \begin{bmatrix} 294047 & 0 & -1176190 & -294047 & 0 & 0 \\ 0 & 202950000 & 0 & 0 & -202950000 & 0 \\ -1176190 & 0 & 4704750 & 1176190 & 0 & 0 \\ -294047 & 0 & 1176190 & 294047 & 0 & 0 \\ 0 & -202950000 & 0 & 0 & 202950000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{(4)} = \begin{bmatrix} 1176190 & 0 & -2352370 & -1176190 & 0 & -2352370 \\ 0 & 202950000 & 0 & 0 & -202950000 & 0 \\ -2352370 & 0 & 6273000 & 2352370 & 0 & 3136500 \\ -1176190 & 0 & 2352370 & 1176190 & 0 & 2352370 \\ 0 & -202950000 & 0 & 0 & 202950000 & 0 \\ -2352370 & 0 & 3136500 & 2352370 & 0 & 6273000 \end{bmatrix}$$

**Agragacja macierzy sztywności**



Podczas agregacji macierzy sztywności pola, które się nakładały zostały do siebie dodane. W macierzy sztywności należy uwzględnić warunki podparcia ramy. W tym celu zerujemy kolumny oraz wiersze 1,2,3,10,11,13,14,15 ponieważ przemieszczenia w tych kierunkach wynoszą 0. Ze względu na redukcję statyczną kąta obrotu w pręcie nr 3 zerujemy kolumnę i wiersz 12. Ostatecznie macierz sztywności przyjmuje postać:

$$K = \begin{bmatrix} 267\,641\,590 & -61\,735\,0000 & -2\,926\,402 & -189010000 & 0 & 0 \\ -61\,735\,000 & 253\,461\,900 & 1\,373\,464 & 0 & -836400 & 2091000 \\ -2\,926\,402 & 1\,373\,464 & 17\,163\,620 & 0 & -2091000 & 3485000 \\ -189010000 & 0 & 0 & 189304047 & 0 & -1176190 \\ 0 & -836400 & -2091000 & 0 & 203786400 & -2091000 \\ 0 & 2091000 & 3485000 & -1176190 & -2091000 & 11674750 \end{bmatrix}$$

### Budowa macierzy mas

Dla prętów nr 1,2,4 korzystamy z macierzy sztywności z obustronnym utwierdzeniem

$$\tilde{M}_{(e)} = \frac{\mu l}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 156 & -22l \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Dla pręta nr 3 korzystamy z macierzy sztywności z przegubem na prawym końcu

$$\tilde{M}_{(e)} = \frac{\mu l}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 204 & 36l & 0 & 58,5 & 0 \\ 0 & 36l & 8l^2 & 0 & 16,5l & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 58,5 & 16,5l & 0 & 99 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Po podstawieniu wartości otrzymujemy

$$\tilde{M}_{(1)} = \begin{bmatrix} 66 & 0 & 0 & 33 & 0 & 0 \\ 0 & 74 & 67 & 0 & 26 & -39 \\ 0 & 67 & 78 & 0 & 39 & -58 \\ 33 & 0 & 0 & 66 & 0 & 0 \\ 0 & 26 & 39 & 0 & 74 & -67 \\ 0 & -39 & -58 & 0 & -67 & 78 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{M}_{(2)} = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 67 & 47 & 0 & 23 & -28 \\ 0 & 47 & 43 & 0 & 28 & -32 \\ 30 & 0 & 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 23 & 28 & 0 & 67 & -47 \\ 0 & -28 & -32 & 0 & -47 & 43 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{M}_{(3)} = \begin{bmatrix} 41 & 0 & 0 & 21 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 43 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 43 & 38 & 0 & 20 & 0 \\ 21 & 0 & 0 & 41 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 20 & 0 & 29 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{M}_{(4)} = \begin{bmatrix} 41 & 0 & 0 & 21 & 0 & 0 \\ 0 & 46 & 26 & 0 & 16 & -15 \\ 0 & 26 & 19 & 0 & 15 & -14 \\ 21 & 0 & 0 & 41 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 15 & 0 & 46 & -26 \\ 0 & -15 & -14 & 0 & -26 & 19 \end{bmatrix}$$

Następnie transformujemy macierze sztywności z układu lokalnego do globalnego według wzoru

$$M_{(e)} = T^T \tilde{M}_{(e)} T \quad (9)$$

Macierz transformacji „T” przyjmuje postać (6)

Po transformacji otrzymujemy

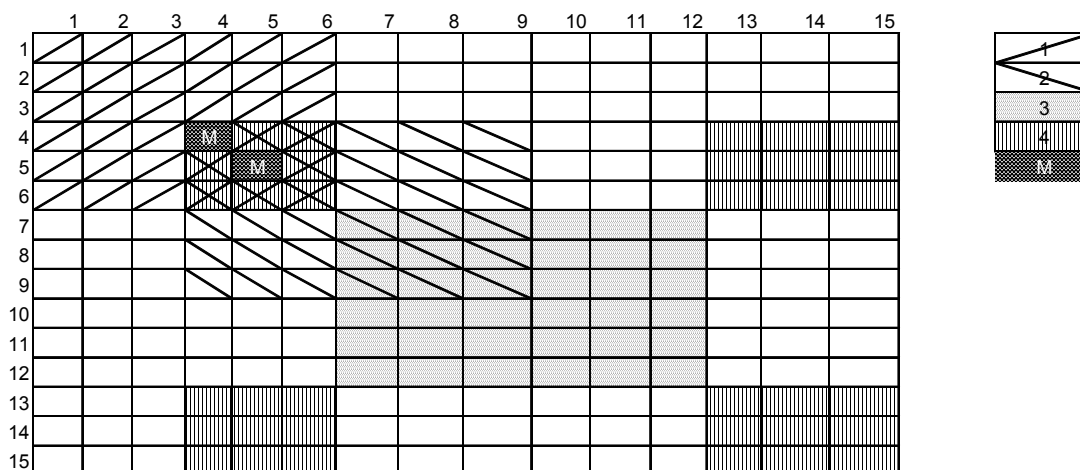
$$M_{(1)} = \begin{bmatrix} 69 & 4 & 42 & 30 & -4 & -25 \\ 4 & 71 & 52 & -4 & 29 & -31 \\ 42 & 52 & 78 & 25 & 31 & -58 \\ 30 & -4 & 25 & 69 & 4 & -42 \\ -4 & 29 & 31 & 4 & 71 & -52 \\ -25 & -31 & -58 & -42 & -52 & 78 \end{bmatrix}$$

$$M_{(2)} = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 67 & 47 & 0 & 23 & -28 \\ 0 & 47 & 43 & 0 & 28 & -32 \\ 30 & 0 & 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 23 & 28 & 0 & 67 & -47 \\ 0 & -28 & -32 & 0 & -47 & 43 \end{bmatrix}$$

$$M_{(3)} = \begin{bmatrix} 60 & 0 & -43 & 17 & 0 & 0 \\ 0 & 41 & 0 & 0 & 21 & 0 \\ -43 & 0 & 38 & -20 & 0 & 0 \\ 17 & 0 & -20 & 29 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 & 0 & 41 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{(4)} = \begin{bmatrix} 46 & 0 & -26 & 16 & 0 & 15 \\ 0 & 41 & 0 & 0 & 21 & 0 \\ -26 & 0 & 19 & -15 & 0 & -14 \\ 16 & 0 & -15 & 46 & 0 & 26 \\ 0 & 21 & 0 & 0 & 41 & 0 \\ 15 & 0 & -14 & 26 & 0 & 19 \end{bmatrix}$$

### Agregacja macierzy mas



Podczas agregacji macierzy mas pola, które się nakładały zostały do siebie dodane. W macierzy mas należy uwzględnić warunki podparcia ramy w tym celu zerujemy kolumny oraz wiersze 1,2,3,10,11,13,14,15 ponieważ przemieszczenia w tych kierunkach wynoszą 0. Ze względu na redukcję statyczną kąta obrotu w pręcie nr 3 zerujemy kolumnę i wiersz 12. Dodatkowo uwzględniliśmy masę skupioną dodając jej wartość w komórkach  $M_{44}$  oraz  $M_{55}$ , ponieważ generuje ona siły bezwładności po kierunku 4 oraz 5. Ostatecznie macierz mas przyjmuje postać:

$$M = \begin{bmatrix} 171 & 45 & 0 & 30 & 0 & 0 \\ 45 & 180 & 37 & 0 & 23 & -28 \\ 0 & 37 & 162 & 0 & 28 & -32 \\ 30 & 0 & 0 & 121 & 0 & -43 \\ 0 & 23 & 28 & 0 & 109 & -47 \\ 0 & -28 & -32 & -43 & -47 & 81 \end{bmatrix}$$

### Obliczenie częstości drgań własnych oraz wektorów przemieszczeń dla poszczególnych postaci drgań

Mając dane wektory sztywności oraz mas możemy rozwiązać równanie (2) przyjmując za rozwiązanie

$$q = q_0 \sin \omega t \quad (10)$$

Po dwukrotnym zróźniczkowaniu otrzymujemy

$$q = -\omega^2 q_0 \sin \omega t \quad (11)$$

Po podstawieniu do równania (2) i przekształceniu otrzymujemy

$$(K - \lambda M)q_0 = 0 \quad (12)$$

$$\lambda = \omega^2 \quad (13)$$

Otrzymaliśmy zagadnienie problemu własnego, które rozwiążemy przy pomocy programu UPW

Wartości własne  $\left[ \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} \right]$ :      Częstości drgań własnych  $\left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ :

$\lambda_1 = 67210$	$\omega_1 = 259$
$\lambda_2 = 156217$	$\omega_2 = 395$
$\lambda_3 = 247803$	$\omega_3 = 498$
$\lambda_4 = 1454170$	$\omega_4 = 1206$
$\lambda_5 = 2618960$	$\omega_5 = 1618$
$\lambda_6 = 5611080$	$\omega_6 = 2369$

Wektory własne

$$\underline{q}_{01} = \begin{bmatrix} -0,131 \\ -0,052 \\ -0,802 \\ -0,145 \\ -0,021 \\ 0,802 \end{bmatrix} \quad \underline{q}_{02} = \begin{bmatrix} -0,837 \\ -0,251 \\ 0,849 \\ -0,967 \\ 0,012 \\ 0,403 \end{bmatrix} \quad \underline{q}_{03} = \begin{bmatrix} -0,346 \\ -0,088 \\ -0,540 \\ -0,356 \\ 0,034 \\ -1,197 \end{bmatrix} \quad \underline{q}_{04} = \begin{bmatrix} 0,010 \\ 1,111 \\ -0,290 \\ -0,604 \\ 0,326 \\ 0,169 \end{bmatrix} \quad \underline{q}_{05} = \begin{bmatrix} -0,201 \\ 0,262 \\ 0,012 \\ -0,042 \\ -1,011 \\ -0,535 \end{bmatrix} \quad \underline{q}_{06} = \begin{bmatrix} 0,705 \\ -0,409 \\ -0,024 \\ -1,000 \\ -0,503 \\ -0,995 \end{bmatrix}$$

### Wyznaczenie pierwszych trzech postaci drgań własnych

#### Pierwsza postać drgań własnych ( $\omega=259\text{rad/s}$ )

Wektor własny dla pierwszej postaci drgań własnych

$$\underline{q}_{01} = \begin{bmatrix} -0,131 \\ -0,052 \\ -0,802 \\ -0,145 \\ -0,021 \\ 0,802 \end{bmatrix}$$

Wektory przemieszczeń (amplitud) węzłowych dla pierwszej postaci w układzie globalnym

$$\underline{q}_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,131 \\ -0,052 \\ -0,802 \end{bmatrix} \quad \underline{q}_{12} = \begin{bmatrix} -0,131 \\ -0,052 \\ -0,802 \\ -0,145 \\ -0,021 \\ 0,802 \end{bmatrix} \quad \underline{q}_{13} = \begin{bmatrix} -0,145 \\ -0,021 \\ 0,802 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{q}_{14} = \begin{bmatrix} -0,131 \\ -0,052 \\ -0,802 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Uwaga!

Dla pręta nr 3 w miejscu wyeliminowanego kąta obrotu przy przegubie wstawiamy wartość 1

Następnie transformujemy wektory przemieszczeń do układów lokalnych według wzoru

$$\tilde{\underline{q}} = T \cdot \underline{q} \tag{14}$$

T- macierz transformacji przyjmuje postać (6)

Po transformacji wektory przemieszczeń przyjmują postać:

$$\underline{\tilde{q}}_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,069 \\ -0,122 \\ -0,802 \end{bmatrix} \quad \underline{\tilde{q}}_{12} = \begin{bmatrix} -0,131 \\ -0,052 \\ -0,802 \\ -0,145 \\ -0,021 \\ 0,802 \end{bmatrix} \quad \underline{\tilde{q}}_{13} = \begin{bmatrix} -0,021 \\ 0,145 \\ 0,802 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\tilde{q}}_{14} = \begin{bmatrix} -0,052 \\ 0,131 \\ -0,802 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Do wyznaczenia przemieszczeń poszczególnych prętów posłużą nam funkcje kształtu, które przyjmują postać.

Pręt obustronnie utwierdzony

$$N_1(\tilde{x}) = 1 - \frac{\tilde{x}}{l}$$

$$N_2(\tilde{x}) = 1 - 3\left(\frac{\tilde{x}}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{\tilde{x}}{l}\right)^3$$

$$N_3(\tilde{x}) = \tilde{x} \left[ 1 - 2\frac{\tilde{x}}{l} + \left(\frac{\tilde{x}}{l}\right)^2 \right]$$

$$N_4(\tilde{x}) = \frac{\tilde{x}}{l}$$

$$N_5(\tilde{x}) = 3\left(\frac{\tilde{x}}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{\tilde{x}}{l}\right)^3$$

$$N_6(\tilde{x}) = \tilde{x} \left[ -\frac{\tilde{x}}{l} + \left(\frac{\tilde{x}}{l}\right)^2 \right]$$

Pręt z przegubem na prawym końcu

$$N_1(\tilde{x}) = 1 - \frac{\tilde{x}}{l}$$

$$N_2(\tilde{x}) = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{\tilde{x}}{l}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{x}}{l}\right)^3$$

$$N_3(\tilde{x}) = \tilde{x} \left[ 1 - \frac{3}{2}\frac{\tilde{x}}{l} + \frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{x}}{l}\right)^2 \right]$$

$$N_4(\tilde{x}) = \frac{\tilde{x}}{l}$$

$$N_5(\tilde{x}) = \frac{3}{2}\left(\frac{\tilde{x}}{l}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{x}}{l}\right)^3$$

Przemieszczenie każdego punktu opisuje zależność

$$\underline{U}_{(2 \times 1)} = \underline{N}_{(2 \times 6)} \cdot \underline{\tilde{q}}_{(6 \times 1)} \quad (15)$$

$$\underline{U}(\tilde{x}, t) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\underline{N}(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} N_1(\tilde{x}) & 0 & 0 & N_4(\tilde{x}) & 0 & 0 \\ 0 & N_2(\tilde{x}) & N_3(\tilde{x}) & 0 & N_5(\tilde{x}) & N_6(\tilde{x}) \end{bmatrix} \quad (17)$$

Po podstawieniu danych macierze funkcji kształtu dla wybranych punktów przyjmują postać

Dla elementu 1

$$\underline{N}^1(1,5) = \begin{bmatrix} 0,7656 & 0 & 0 & 0,2344 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8610 & 0,8793 & 0 & 0,1390 & -0,2692 \end{bmatrix}$$

$$\underline{N}^1(3) = \begin{bmatrix} 0,5313 & 0 & 0 & 0,4688 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5468 & 0,8467 & 0 & 0,4532 & -0,7471 \end{bmatrix}$$

$$\underline{N}^1(4,5) = \begin{bmatrix} 0,2969 & 0 & 0 & 0,7031 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2121 & 0,3966 & 0 & 0,7879 & -0,9393 \end{bmatrix}$$

Dla elementu 2

$$\underline{N}^2(1) = \begin{bmatrix} 0,8000 & 0 & 0 & 0,2000 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8960 & 0,6400 & 0 & 0,1040 & -0,1600 \end{bmatrix}$$

$$\underline{N}^2(2) = \begin{bmatrix} 0,6000 & 0 & 0 & 0,4000 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6480 & 0,7200 & 0 & 0,3520 & -0,4800 \end{bmatrix}$$

$$\underline{N}^2(3,5) = \begin{bmatrix} 0,3000 & 0 & 0 & 0,7000 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2160 & 0,3150 & 0 & 0,7840 & -0,7350 \end{bmatrix}$$

Dla elementu 3

$$\underline{N}^4(1) = \begin{bmatrix} 0,7500 & 0 & 0 & 0,2500 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9141 & 0,6563 & 0 & 0,0859 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{N}^4(2) = \begin{bmatrix} 0,5000 & 0 & 0 & 0,5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6875 & 0,7500 & 0 & 0,3125 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{N}^4(3) = \begin{bmatrix} 0,2500 & 0 & 0 & 0,7500 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3672 & 0,4688 & 0 & 0,6328 & 0 \end{bmatrix}$$

Dla elementu 4

$$\underline{N}^3(1) = \begin{bmatrix} 0,7500 & 0 & 0 & 0,2500 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8438 & 0,5625 & 0 & 0,1563 & -0,1875 \end{bmatrix}$$

$$\underline{N}^3(2) = \begin{bmatrix} 0,5000 & 0 & 0 & 0,5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5000 & 0,5000 & 0 & 0,5000 & -0,5000 \end{bmatrix}$$

$$\underline{N}^3(3) = \begin{bmatrix} 0,2500 & 0 & 0 & 0,7500 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1563 & 0,1875 & 0 & 0,8438 & -0,5625 \end{bmatrix}$$

Po podstawieniu do wzoru (15) otrzymujemy następujące przemieszczenia dla poszczególnych prętów w układzie lokalnym.

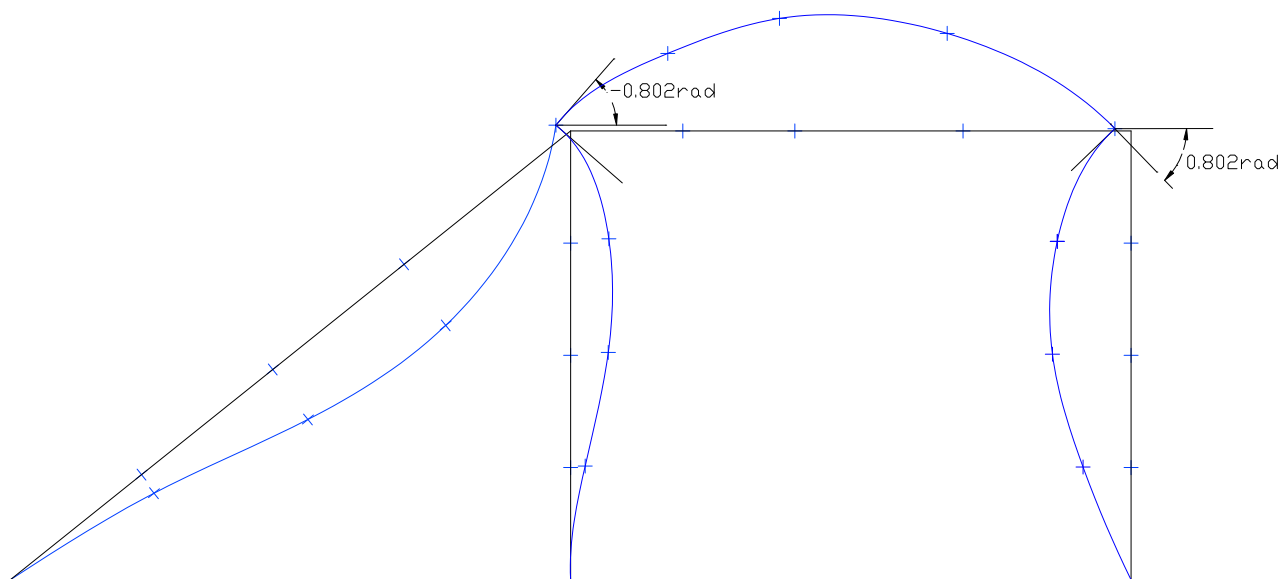
$$\underline{U}^1(1,5) = \begin{bmatrix} -0,016 \\ 0,199 \end{bmatrix} \quad \underline{U}^2(1) = \begin{bmatrix} -0,134 \\ -0,691 \end{bmatrix} \quad \underline{U}^3(1) = \begin{bmatrix} -0,016 \\ 0,659 \end{bmatrix} \quad \underline{U}^4(1) = \begin{bmatrix} -0,039 \\ -0,341 \end{bmatrix}$$

$$\underline{U}^1(3) = \begin{bmatrix} -0,033 \\ 0,544 \end{bmatrix} \quad \underline{U}^2(2) = \begin{bmatrix} -0,137 \\ -1,004 \end{bmatrix} \quad \underline{U}^3(2) = \begin{bmatrix} -0,011 \\ 0,702 \end{bmatrix} \quad \underline{U}^4(2) = \begin{bmatrix} -0,026 \\ -0,336 \end{bmatrix}$$

$$\underline{U}^1(4,5) = \begin{bmatrix} -0,049 \\ 0,657 \end{bmatrix} \quad \underline{U}^2(3,5) = \begin{bmatrix} -0,141 \\ -0,870 \end{bmatrix} \quad \underline{U}^3(3) = \begin{bmatrix} -0,005 \\ 0,429 \end{bmatrix} \quad \underline{U}^4(3) = \begin{bmatrix} -0,013 \\ -0,130 \end{bmatrix}$$

Po naniesieniu przemieszczeń otrzymujemy pierwszą postać drgań własnych

Pierwsza postać drgań własnych



**Druga postać drgań własnych ( $\omega=395\text{rad/s}$ )**

Wektor własny dla drugiej postaci drgań własnych

$$\underline{q}_{02} = \begin{bmatrix} -0,837 \\ -0,251 \\ 0,849 \\ -0,967 \\ 0,012 \\ 0,403 \end{bmatrix}$$

Wektory przemieszczeń (amplitud) węzłowych dla drugiej postaci w układzie globalnym

$$\underline{q}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,837 \\ -0,251 \\ 0,849 \end{bmatrix} \quad \underline{q}_{22} = \begin{bmatrix} -0,837 \\ -0,251 \\ 0,849 \\ -0,967 \\ 0,012 \\ 0,403 \end{bmatrix} \quad \underline{q}_{23} = \begin{bmatrix} -0,967 \\ 0,012 \\ 0,403 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{q}_{24} = \begin{bmatrix} -0,837 \\ -0,251 \\ 0,849 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Uwaga!

Dla pręta nr 3 w miejscu wyeliminowanego kąta obrotu przy przegubie wstawiamy wartość 1

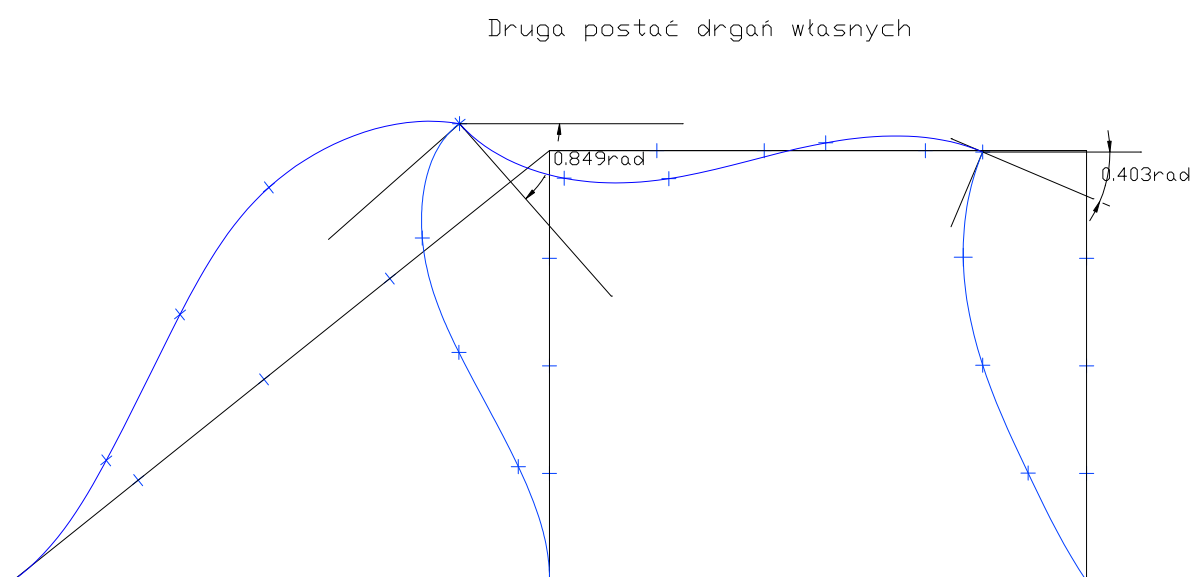
Następnie transformujemy wektory przemieszczeń do układów lokalnych według wzoru (14)

$$\tilde{\underline{q}}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,497 \\ -0,719 \\ 0,849 \end{bmatrix} \quad \tilde{\underline{q}}_{22} = \begin{bmatrix} -0,837 \\ -0,251 \\ 0,849 \\ -0,967 \\ 0,012 \\ 0,403 \end{bmatrix} \quad \tilde{\underline{q}}_{23} = \begin{bmatrix} 0,012 \\ 0,967 \\ 0,403 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\underline{q}}_{24} = \begin{bmatrix} -0,251 \\ 0,837 \\ 0,849 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Korzystając z zależności (15) obliczamy przemieszczenia

$$\begin{aligned} \underline{U}^1(1,5) &= \begin{bmatrix} -0,117 \\ -0,329 \end{bmatrix} & \underline{U}^2(1) &= \begin{bmatrix} -0,863 \\ 0,256 \end{bmatrix} & \underline{U}^3(1) &= \begin{bmatrix} 0,009 \\ 1,148 \end{bmatrix} & \underline{U}^4(1) &= \begin{bmatrix} -0,188 \\ 1,184 \end{bmatrix} \\ \underline{U}^1(3) &= \begin{bmatrix} -0,233 \\ -0,960 \end{bmatrix} & \underline{U}^2(2) &= \begin{bmatrix} -0,889 \\ 0,260 \end{bmatrix} & \underline{U}^3(2) &= \begin{bmatrix} 0,006 \\ 0,967 \end{bmatrix} & \underline{U}^4(2) &= \begin{bmatrix} -0,125 \\ 0,843 \end{bmatrix} \\ \underline{U}^1(4,5) &= \begin{bmatrix} -0,350 \\ -1,365 \end{bmatrix} & \underline{U}^2(3,5) &= \begin{bmatrix} -0,928 \\ -0,073 \end{bmatrix} & \underline{U}^3(3) &= \begin{bmatrix} 0,003 \\ 0,544 \end{bmatrix} & \underline{U}^4(3) &= \begin{bmatrix} -0,063 \\ 0,290 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Po naniesieniu przemieszczeń otrzymujemy drugą postać drgań własnych



### Trzecia postać drgań własnych ( $\omega=498\text{rad/s}$ )

Wektor własny dla trzeciej postaci drgań własnych

$$\underline{q}_{03} = \begin{bmatrix} -0,346 \\ -0,088 \\ -0,540 \\ -0,356 \\ 0,034 \\ -1,197 \end{bmatrix}$$

Wektory przemieszczeń (amplitud) węzłowych dla trzeciej postaci w układzie globalnym

$$\underline{q}_{31} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,346 \\ -0,088 \\ -0,540 \end{bmatrix} \quad \underline{q}_{32} = \begin{bmatrix} -0,346 \\ -0,088 \\ -0,540 \\ -0,356 \\ 0,034 \\ -1,197 \end{bmatrix} \quad \underline{q}_{33} = \begin{bmatrix} -0,356 \\ 0,034 \\ -1,197 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{q}_{34} = \begin{bmatrix} -0,346 \\ -0,088 \\ -0,540 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Uwaga!

Dla pręta nr 3 w miejscu wyeliminowanego kąta obrotu przy przegubie wstawiamy wartość 1

Następnie transformujemy wektory przemieszczeń do układów lokalnych według wzoru (14)

$$\tilde{\underline{q}}_{31} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,215 \\ -0,285 \\ -0,540 \end{bmatrix} \quad \tilde{\underline{q}}_{32} = \begin{bmatrix} -0,346 \\ -0,088 \\ -0,540 \\ -0,356 \\ 0,034 \\ -1,197 \end{bmatrix} \quad \tilde{\underline{q}}_{33} = \begin{bmatrix} 0,034 \\ 0,356 \\ -1,197 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\underline{q}}_{34} = \begin{bmatrix} -0,088 \\ 0,346 \\ -0,540 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Korzystając z zależności (15) obliczamy przemieszczenia

$$\begin{aligned} \underline{U}^1(1,5) &= \begin{bmatrix} -0,050 \\ 0,106 \end{bmatrix} & \underline{U}^2(1) &= \begin{bmatrix} -0,348 \\ -0,229 \end{bmatrix} & \underline{U}^3(1) &= \begin{bmatrix} 0,026 \\ -0,460 \end{bmatrix} & \underline{U}^4(1) &= \begin{bmatrix} -0,066 \\ -0,012 \end{bmatrix} \\ \underline{U}^1(3) &= \begin{bmatrix} -0,101 \\ 0,274 \end{bmatrix} & \underline{U}^2(2) &= \begin{bmatrix} -0,350 \\ 0,141 \end{bmatrix} & \underline{U}^3(2) &= \begin{bmatrix} 0,017 \\ -0,653 \end{bmatrix} & \underline{U}^4(2) &= \begin{bmatrix} -0,044 \\ -0,097 \end{bmatrix} \\ \underline{U}^1(4,5) &= \begin{bmatrix} -0,151 \\ 0,283 \end{bmatrix} & \underline{U}^2(3,5) &= \begin{bmatrix} -0,353 \\ 0,717 \end{bmatrix} & \underline{U}^3(3) &= \begin{bmatrix} 0,034 \\ -0,430 \end{bmatrix} & \underline{U}^4(3) &= \begin{bmatrix} -0,022 \\ -0,047 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Po naniesieniu przemieszczeń otrzymujemy trzecią postać drgań własnych

