

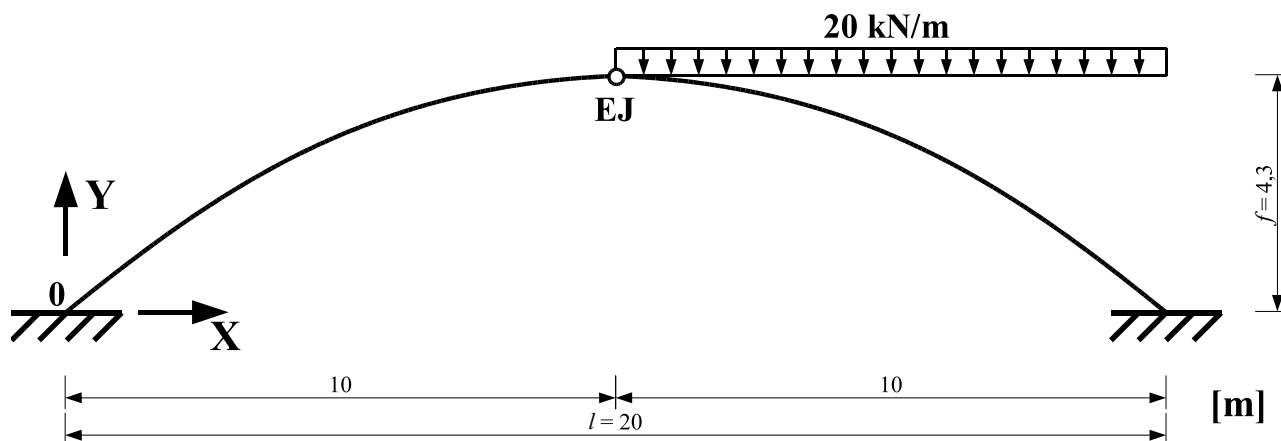


## 3.

## Obliczanie Łuków Statycznie Niewyznaczalnych Metodą Sił

Dla łuku parabolicznego o schemacie jak poniżej (Rys. 3.1) należy:

- obliczyć i wykonać wykresy sił wewnętrznych powstałych od zadanego obciążenia;
- w trakcie obliczeń wykonać sprawdzenie statyczne oraz kinematyczne;



Rys. 3.1 Rozpatrywany łuk paraboliczny

Przed przystąpieniem do właściwej części zadania, najpierw wyznaczmy równanie krzywej łuku paraboli korzystając z następującego wzoru:

$$y(x) = \frac{4f(lx - x^2)}{l^2} \quad (3.1)$$

W naszym przypadku (Rys. 3.1):  $f = 4,3 \text{ m}$  a  $l = 20 \text{ m}$  stąd równanie (3.1) przyjmie postać:

$$y(x) = \frac{4 \cdot 4,3(20x - x^2)}{20^2} = 0,86x - 0,043x^2 \quad (3.2)$$

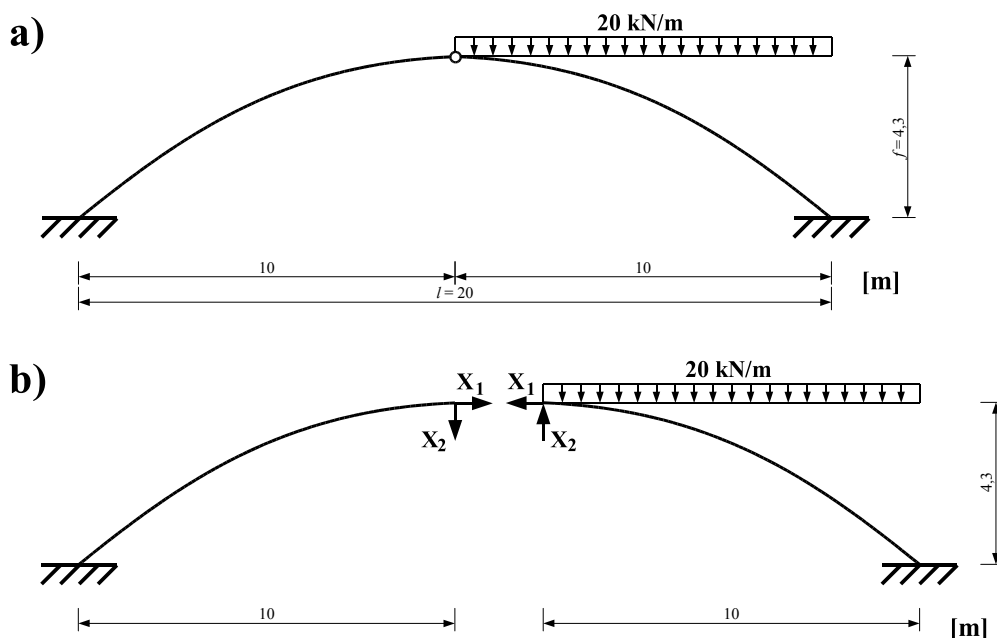
Do dalszych obliczeń przydatny również będzie tangens kąta nachylenia stycznej do krzywej łuku paraboli (pochodna), który w naszym przypadku wyniesie (3.3):

$$\operatorname{tg} \alpha = y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{4f(l - 2x)}{l^2} = \frac{4 \cdot 4,3(20 - 2x)}{20^2} = 0,86 - 0,086x \quad (3.3)$$

Po tych wstępnych obliczeniach przechodzimy do właściwej części zadania.

### 3.1 Obliczenia niewiadomych metody sił

Zgodnie ze sposobem rozwiązywania układów statycznie niewyznaczalnych (hiperstatycznych) metodą sił, zamieniamy rozpatrywany, dwukrotnie statycznie niewyznaczalny układ (Rys. 3.1.1 a)), na tzw. układ podstawowy (układ zastępczy), tak samo obciążony i geometrycznie identyczny z rozpatrywanym ale statycznie wyznaczalny (Rys. 3.1.1 b)).



Rys. 3.1.1 Dany układ: a) rzeczywisty dwukrotnie statycznie niewyznaczalny; b) układ podstawowy (zastępczy), statycznie wyznaczalny, z niewiadomymi siłami:  $X_1$  oraz  $X_2$

Powyższy układ podstawowy (Rys. 3.1.1 b)) dla dowolnych  $X_i$  nie spełnia warunku identyczności kinematycznej z rzeczywistym układem, ponieważ dozna on przemieszczeń w miejscu odrzuconych podpór. Aby spełnić ten warunek, do układu podstawowego wprowadzamy dodatkowe warunki na  $X_i$ , w postaci równań liniowych (tzw. równań kanonicznych), wyrażających zgodność przemieszczeń układu rzeczywistego i podstawowego a konkretniej rzecz ujmując przez liczenie przemieszczeń w układzie statycznie wyznaczalnym, takich punktów, których w układzie statycznie niewyznaczalnym znamy konkretne wartości. Ogólnie, dla obciążenia zewnętrznego równania kanoniczne przyjmą następującą postać (3.1.1):

$$\sum_{k=1}^n \delta_{ik} \cdot X_k + \Delta_{ip} = 0 \quad (3.1.1)$$

a w naszym przypadku dla układu dwukrotnie statycznie niewyznaczalnego, przyjmą one postać następującego układu równań (3.1.2):

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases} \quad (3.1.2)$$

gdzie  $\delta_{ik}$ ,  $\delta_{ki}$  i  $\Delta_{ip}$  to odpowiednie przemieszczenia. Jako że rozpatrywany układ jest łukiem wyniosłym (3.1.3):

$$f \geq \frac{l}{5} \rightarrow 4,3 > \frac{20}{5} \quad (3.1.3)$$

oraz ciekim, w obliczeniach przemieszczeń pomijamy wpływ sił normalnych i tnących, stąd współczynniki

$\delta_{ik}$ ,  $\delta_{ki}$  i  $\Delta_{ip}$  wyrażone będą następującymi wzorami (3.1.4 i 3.1.5):

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} = \int_s \frac{M_i M_k}{EJ} ds \quad \left[ \frac{m \cdot m}{(kN/m^2) \cdot m^4} \cdot m = \frac{m}{kN} \right] \quad (3.1.4)$$

$$\Delta_{ip} = \int_s \frac{M_i M_p^o}{EJ} ds \quad \left[ \frac{m \cdot kN \cdot m}{(kN/m^2) \cdot m^4} \cdot m = m \right] \quad (3.1.5)$$

Warto zaznaczyć, że w celu obliczenia powyższych (3.1.4 i 3.1.5) współczynników (przemieszczeń), nie możemy skorzystać z twierdzenia Mohra-Wiereszczagina, z tytułu nieprostoliniowości całkowanych wykresów (obydwa są krzywoliniowe). Powyższe całkowanie możemy więc wykonać w sposób tradycyjny przy wykorzystaniu odpowiednich matematycznych zależności lub skorzystać z innych sposobów ułatwiających to całkowanie. W projekcie skorzystano z metod numerycznych. W takim przypadku dokonano następujących modyfikacji wzorów na współczynniki równania kanonicznego (3.1.6):

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha \quad \rightarrow \quad ds = \frac{dx}{\cos \alpha} \quad \text{stad:}$$

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} = \frac{1}{EJ} \int_s \frac{M_i M_k}{\cos \alpha} dx = \frac{\Omega_{ik}}{EJ} \quad \left[ \frac{m \cdot m}{(kN/m^2) \cdot m^4} \cdot m = \frac{m}{kN} \right] \quad (3.1.6)$$

$$\Delta_{ip} = \frac{1}{EJ} \int_s \frac{M_i M_p}{\cos \alpha} dx = \frac{\Omega_{ip}}{EJ} \quad \left[ \frac{m \cdot kN \cdot m}{(kN/m^2) \cdot m^4} \cdot m = m \right]$$

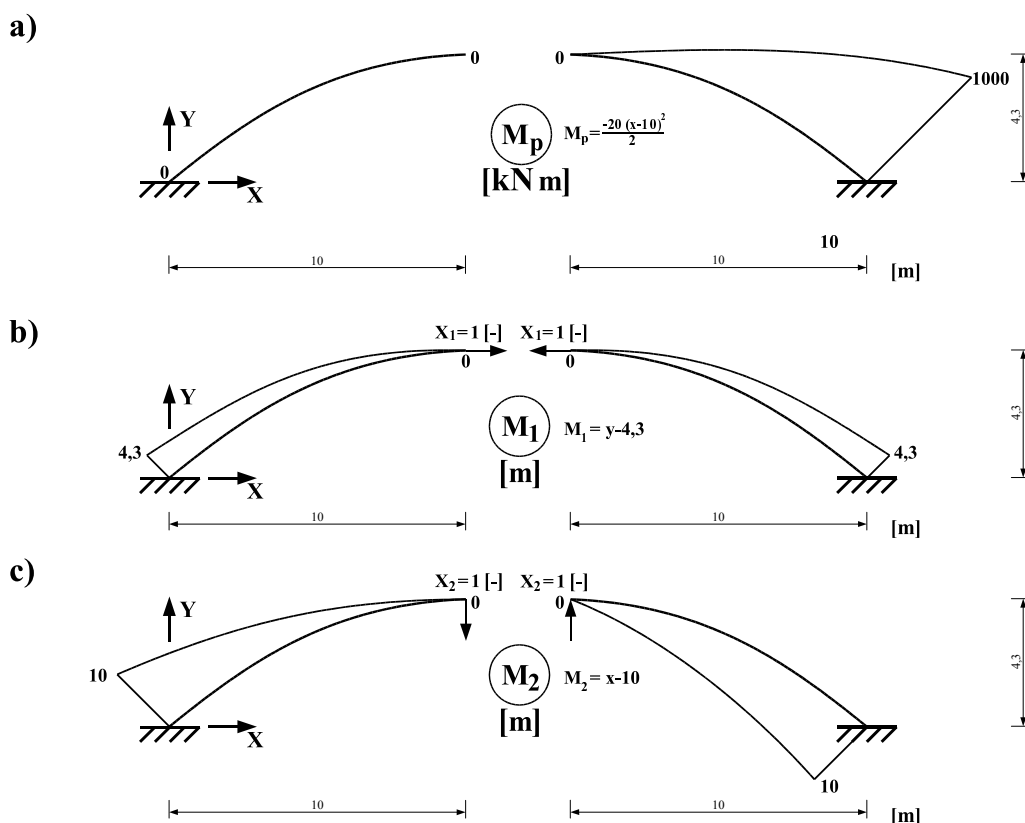
gdzie: „ $\Omega$ ” to pole wykresu pod rozpatrywaną krzywą. W projekcie pole to wyliczono stosując metodę parabol (Simpsona) (3.1.7) oraz w celu porównania wyników, metodę prostokątów (3.1.8).

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \Omega_i = \frac{a}{3} \cdot (q_0 + 4q_1 + 2q_2 + 4q_3 + \dots + 2q_{n-2} + 4q_{n-1} + q_n) \quad (3.1.7)$$

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \Omega_i = a \cdot \left( \frac{1}{2} q_0 + q_1 + \dots + q_{n-1} + \frac{1}{2} q_n \right) \quad (3.1.8)$$

gdzie: „ $q_i$ ” to odpowiednia rzędna pod rozpatrywaną krzywą.

W celu skorzystania z powyższych zależności musimy wyznaczyć odpowiednie wykresy sił wewnętrznych (Rys. 3.1.2).



Rys. 3.1.2 Wykresy momentów zginających w układzie podstawowym pochodzące kolejno od: a) obciążenia zewnętrznego; b) siły jedynkowej przyłożonej w miejsce niewiadomej  $X_1$ ; c) siły jedynkowej przyłożonej w miejsce niewiadomej  $X_2$

Po uwzględnieniu powyższych wykresów (Rys. 3.1.2) w wzorach sumacyjnych całkowania numerycznego (3.1.7 i 3.1.8) a następnie po podstawieniu uzyskanych w ten sposób wartości (Tab. 3.1.1) do odpowiednich wzorów na współczynniki (3.1.4 i 3.1.5), uzyskano następujące wielkości:

Metoda Parabol (Simpsona)	Metoda Prostokątów	
$\delta_{11} = \frac{91,31628}{EJ} [m^3]$	$\delta_{11} = \frac{93,10073}{EJ} [m^3]$	
$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{0}{EJ} = 0 [m^3]$	$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{0}{EJ} = 0 [m^3]$	
$\delta_{22} = \frac{799,18332}{EJ} [m^3]$	$\delta_{22} = \frac{804,50758}{EJ} [m^3]$	(3.1.9)
$\Delta_{1p} = \frac{10618,17271}{EJ} [kN \cdot m^3]$	$\Delta_{1p} = \frac{10825,66615}{EJ} [kN \cdot m^3]$	
$\Delta_{2p} = \frac{-30494,20417}{EJ} [kN \cdot m^3]$	$\Delta_{2p} = \frac{-30869,65865}{EJ} [kN \cdot m^3]$	

Tab. 3.1.1 Dane potrzebne do wyznaczenia współczynników równań kanonicznych

$x$ [m]	$y$ [m]	$\frac{l}{\cos \alpha_i}$ [-]	$M_1$ [m]	$M_2$ [m]	$M_p$ [kNm]	$\frac{M_1^2}{\cos \alpha_i}$ [m <sup>2</sup> ]	$\frac{M_1 \cdot M_2}{\cos \alpha_i}$ [m <sup>2</sup> ]	$\frac{M_2^2}{\cos \alpha_i}$ [m <sup>2</sup> ]	$\frac{M_1 \cdot M_p}{\cos \alpha_i}$ [kN m <sup>2</sup> ]	$\frac{M_2 \cdot M_p}{\cos \alpha_i}$ [kN m <sup>2</sup> ]
0	0	1,31894	-4,300	-10	0	24,38718	56,71438	131,89390	0	0
1	0,817	1,26455	-3,483	-9	0	15,34057	39,63972	102,42821	0	0
2	1,548	1,21381	-2,752	-8	0	9,19282	26,72332	77,68408	0	0
3	2,193	1,16722	-2,107	-7	0	5,18182	17,21534	57,19381	0	0
4	2,752	1,12528	-1,548	-6	0	2,69651	10,45160	40,51009	0	0
5	3,225	1,08853	-1,075	-5	0	1,25793	5,85085	27,21328	0	0
6	3,612	1,05751	-0,688	-4	0	0,50057	2,91028	16,92022	0	0
7	3,913	1,03275	-0,387	-3	0	0,15467	1,19902	9,29471	0	0
8	4,128	1,01468	-0,172	-2	0	0,03002	0,34905	4,05874	0	0
9	4,257	1,00369	-0,043	-1	0	0,00186	0,04316	1,00369	0	0
10	4,300	1	0	0	0	0	0	0	0	0
11	4,257	1,00369	-0,043	1	-10	0,00186	-0,04316	1,00369	0,43159	-10,03691
12	4,128	1,01468	-0,172	2	-40	0,03002	-0,34905	4,05874	6,98103	-81,17473
13	3,913	1,03275	-0,387	3	-90	0,15467	-1,19902	9,29471	35,97054	-278,84138
14	3,612	1,05751	-0,668	4	-160	0,50057	-2,91028	16,92022	116,41115	-676,80900
15	3,225	1,08853	-1,075	5	-250	1,25793	-5,85085	27,21328	292,54274	-1360,66390
16	2,752	1,12528	-1,548	6	-360	2,69651	-10,45160	40,51009	627,09627	-2430,60568
17	2,193	1,16722	-2,107	7	-490	5,18182	-17,21534	57,19381	1205,07359	-4003,56676
18	1,548	1,21381	-2,752	8	-640	9,19282	-26,72332	77,68408	2137,86601	-6214,72678
19	0,817	1,26455	-3,483	9	-810	15,34057	-39,63972	102,42821	3567,57446	-9218,53865
20	0	1,31894	-4,300	10	-1000	24,38718	-56,71438	131,89390	5671,43756	-13189,38968
<b>Całkowanie Metodami Numerycznymi</b>										
$\int_s \frac{M_i M_k}{\cos \alpha} dx$ , $\int_s \frac{M_i M_p}{\cos \alpha} dx$						$\Omega = \sum_{i=1}^n \Omega_i$				
<b>Sumowanie Metodą Parabol (Simpsona)</b>						<b>91,31628</b>	<b>0</b>	<b>799,18332</b>	<b>10618,17271</b>	<b>-30494,20417</b>
<b>Sumowanie Metodą Prostokątów</b>						<b>93,10073</b>	<b>0</b>	<b>804,50758</b>	<b>10825,66615</b>	<b>-30869,65865</b>

Po podstawieniu otrzymanych w ten sposób współczynników (3.1.9) do układu równań kanonicznych (3.1.2), przyjmie on następującą postać (3.1.10):

$$\begin{array}{cc}
 \text{Metoda Parabol (Simpsona)} & \text{Metoda Prostokątów} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \frac{91,31628}{EJ} \cdot X_1 + \frac{10618,17271}{EJ} = 0 \\ \frac{799,18332}{EJ} \cdot X_2 - \frac{30494,20417}{EJ} = 0 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \frac{93,10073}{EJ} \cdot X_1 + \frac{10825,66615}{EJ} = 0 \\ \frac{804,50758}{EJ} \cdot X_2 - \frac{30869,65865}{EJ} = 0 \end{array} \right. \quad (3.1.10)
 \end{array}$$

a po jego rozwiązaniu otrzymamy poszukiwane niewiadome (3.1.11):

Metoda Parabol (Simpsona)

Metoda Prostokątów

$$\begin{cases} X_1 = -116,2791 \\ X_2 = 38,1567 \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = -116,2791 \\ X_2 = 38,3709 \end{cases} \quad \left[ \frac{m}{m/kN} = kN \right] \quad (3.1.11)$$

Jak widzimy z powyższych wyników (3.1.11) różnica między dwiema użytymi metodami całkowania numerycznego jest niewielka. Do dalszych obliczeń przyjęto jednak wyniki obliczone metodą parabol (Simpsona) gdyż jest ona metodą dokładniejszą.

### 3.2 Obliczenia sił wewnętrznych

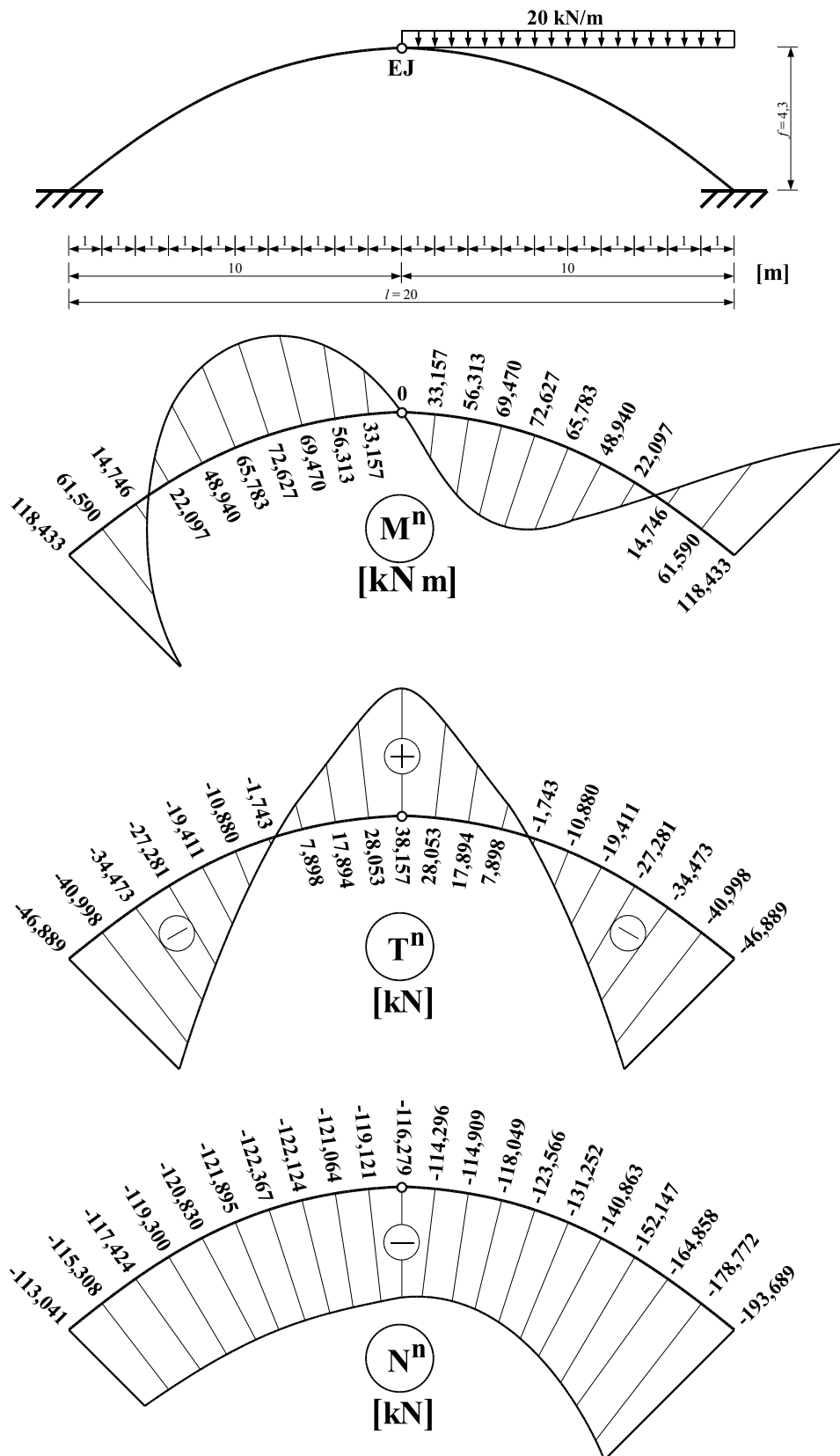
Po obliczeniu poszukiwanych niewiadomych metody sił przystępujemy do wyliczenia sił wewnętrznych. W projekcie momenty zginające znaleziono (Rys. 3.2.1 i Tab. 3.2.1) przez geometryczne sumowanie (tzn. stosując zasadę superpozycji skutków), zgodnie ze wzorem (3.2.1):

$$M^n = M_p + \sum_{i=1}^k X_i \cdot M_i \quad \text{dla } k=2 \quad M^n = M_p + X_1 \cdot M_1 + X_2 \cdot M_2 \quad (3.2.1)$$

zaś siły tnące (poprzeczne) i normalne (Rys. 3.2.1 i Tab. 3.2.1) przez ponowne rozwiązanie układu podstawowego, ale już z konkretnymi wyliczonymi przez nas danymi, podstawionymi za odpowiednie niewiadome.

Tab. 3.1.1 Obliczenia sił wewnętrznych

$x$ [m]	$y$ [m]	$\operatorname{tg} \alpha_i$ [-]	$\sin \alpha_i$ [-]	$\cos \alpha_i$ [-]	$M^n$ [kNm]	$T^n$ [kN]	$N^n$ [kN]
0	0	0,8600	0,6520	0,7582	118,433	-46,889	-113,041
1	0,817	0,7740	0,6121	0,7908	61,590	-40,998	-115,308
2	1,548	0,6880	0,5668	0,8238	14,746	-34,473	-117,424
3	2,193	0,6020	0,5158	0,8567	-22,097	-27,281	-119,300
4	2,752	0,5160	0,4586	0,8887	-48,940	-19,411	-120,830
5	3,225	0,4300	0,3950	0,9187	-65,783	-10,880	-121,895
6	3,612	0,3440	0,3253	0,9456	-72,627	-1,743	-122,367
7	3,913	0,2580	0,2498	0,9683	-69,470	7,898	-122,124
8	4,128	0,1720	0,1695	0,9855	-56,313	17,894	-121,064
9	4,257	0,0860	0,0857	0,9963	-33,157	28,053	-119,121
10	4,300	0	0	1	0	38,157	-116,279
11	4,257	0,0860	0,0857	0,9963	33,157	28,053	-114,296
12	4,128	0,1720	0,1695	0,9855	56,313	17,894	-114,909
13	3,913	0,2580	0,2498	0,9683	69,470	7,898	-118,049
14	3,612	0,3440	0,3253	0,9456	72,627	-1,743	-123,566
15	3,225	0,4300	0,3950	0,9187	65,783	-10,880	-131,252
16	2,752	0,5160	0,4586	0,8887	48,940	-19,411	-140,863
17	2,193	0,6020	0,5158	0,8567	22,097	-27,281	-152,147
18	1,548	0,6880	0,5668	0,8238	-14,746	-34,473	-164,858
19	0,817	0,7740	0,6121	0,7908	-61,590	-40,998	-178,772
20	0	0,8600	0,6520	0,7582	-118,433	-46,889	-193,689



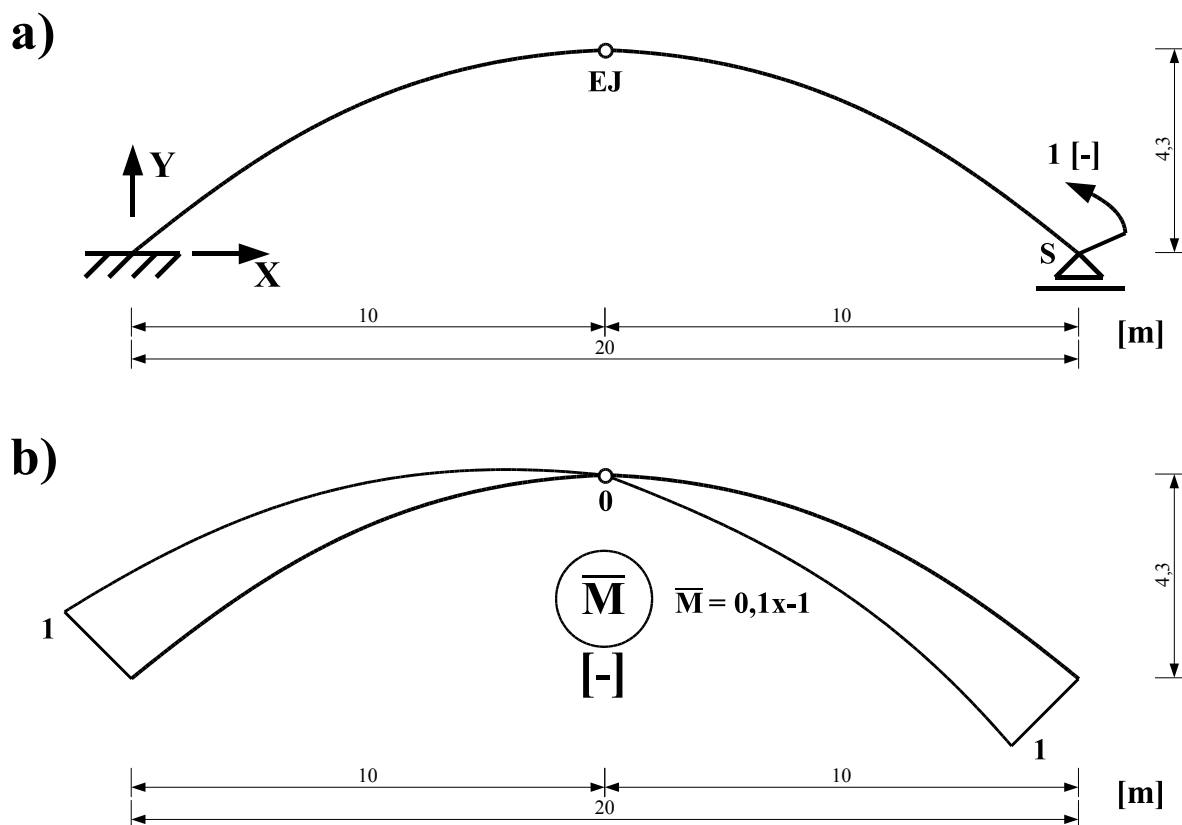
Rys. 3.2.1 Zestawienie wyników (wykresów sił wewnętrznych powstałych od obciążenia zewnętrznego) dla rozpatrywanego łuku statycznie niewyznaczalnego

### 3.3 Kontrola kinematyczna uzyskanych wyników

Metoda ta polega na wykazaniu, że dla wybranych punktów (na ogół punktów, które nie doznają przemieszczeń w układzie statycznie niewyznaczalnym) przemieszczenia są równe wartości rzeczywistym tam występującym. Przemieszczenia wyliczymy korzystając z równania pracy wirtualnej oraz z twierdzeń redukcyjnych, z których wynika, że licząc przemieszczenia w układzie statycznie niewyznaczalnym, jeden ze stanów (rzeczywisty lub wirtualny), możemy wyliczyć dla dowolnego układu podstawowego (3.3.1).

$$\Delta = \int_s \frac{M^n \bar{M}^n}{EJ} ds = \int_s \frac{M_o \bar{M}^n}{EJ} ds = \int_s \frac{M^n \bar{M}_o}{EJ} ds \quad \left[ \frac{kN \cdot m \cdot m}{(kN/m^2) \cdot m^4} \cdot m = m \right] \quad (3.3.1)$$

Wybieramy nowy (inny niż poprzednio) układ podstawowy (Rys. 3.3.1a). Warto zaznaczyć, że jeżeli wybierzemy ten sam układ podstawowy co przy liczeniu współczynników, pomimo spełnienia kontroli kinematycznej wyniki mogą być nieprawidłowe, ponieważ efektem tego sprawdzenia będzie wykazanie poprawności równania kanonicznego a nie konkretnych wartości  $X_i$ . (Moglibyśmy np. dwukrotnie skorzystać ze źle obliczonych wykresów  $M_i$ .)



Rys. 3.3.1 Nowy układ podstawowy wykorzystany w kontroli kinematycznej: a) obciążony jednostkową siłą wirtualną; b) wykres momentów zginających od rozpatrywanego obciążenia

Obliczając (Tab. 3.3.1) kąt obrotu przekroju w punkcie „S” (Rys. 3.3.1 a), skorzystamy analogicznie jak

wcześniej z metod numerycznych a konkretniej rzecz ujmując stosując metodę parabol (3.1.7). W tym celu posłużymy się wykresami sił wewnętrznych dla rozpatrywanego układu statycznie niewyznaczalnego (Rys. 3.2.1), oraz wykresem sił wewnętrznych dla układu podstawowego obciążonego siłą wirtualną (Rys. 3.3.1 b)).

Tab. 3.3.1 Obliczenia kąta obrotu przekroju w punkcie „S”

$x$ [m]	$y$ [m]	$\frac{I}{\cos \alpha_i}$ [-]	$M^n$ [kN m]	$\bar{M}$ [-]	$\frac{M^n \cdot \bar{M}}{\cos \alpha_i}$ [kN m]
0	0	1,31894	118,433	-1,0	-156,20607
1	0,817	1,26455	61,590	-0,9	-70,09481
2	1,548	1,21381	14,746	-0,8	-14,31959
3	2,193	1,16722	-22,097	-0,7	18,05432
4	2,752	1,12528	-48,940	-0,6	33,04284
5	3,225	1,08853	-65,783	-0,5	35,80368
6	3,612	1,05751	-72,627	-0,4	30,72154
7	3,913	1,03275	-69,470	-0,3	21,52348
8	4,128	1,01468	-56,313	-0,2	11,42806
9	4,257	1,00369	-33,157	-0,1	3,32791
10	4,300	1	0	0	0
11	4,257	1,00369	33,157	0,1	3,32791
12	4,128	1,01468	56,313	0,2	11,42806
13	3,913	1,03275	69,470	0,3	21,52349
14	3,612	1,05751	72,627	0,4	30,72155
15	3,225	1,08853	65,783	0,5	35,80371
16	2,752	1,12528	48,940	0,6	33,04290
17	2,193	1,16722	22,097	0,7	18,05442
18	1,548	1,21381	-14,746	0,8	-14,31943
19	0,817	1,26455	-61,590	0,9	-70,09457
20	0	1,31894	-118,433	1,0	-156,20573
<b>Całkowanie Metodą Parabol (Simpsona)</b>					<b>-0,0006</b>

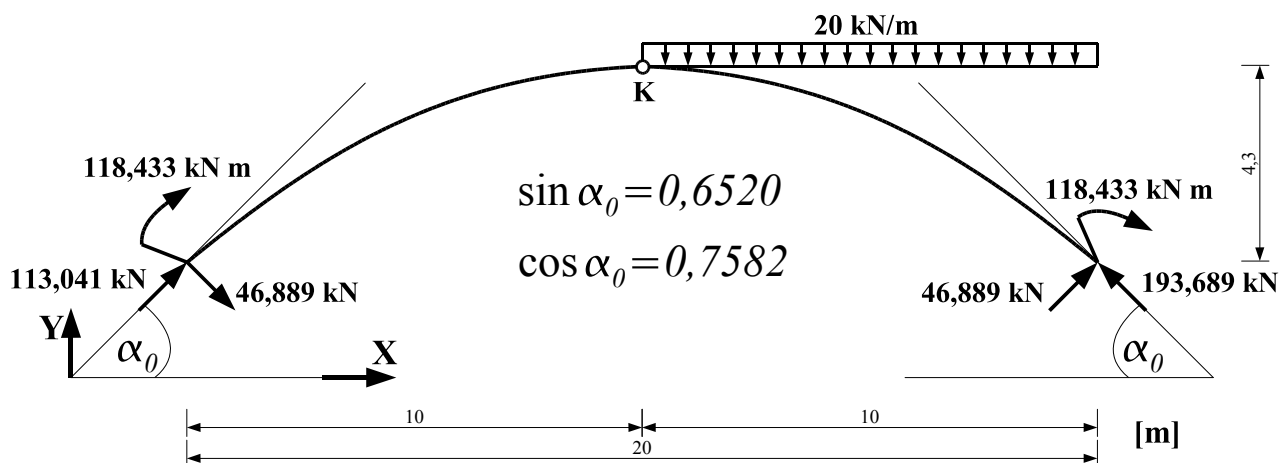
$$\varphi_S = -\frac{0,0006}{EJ} \approx 0 \text{ [rad]} \quad (3.3.2)$$

Jak wynika z powyższego (3.3.2) sprawdzenie kinematyczne zostało spełnione.

### 3.4 Kontrola statyczna uzyskanych wyników

Sprawdzenie to polega na wykazaniu, że przy wyznaczonych siłach wewnętrznych, spełnione są warunki statycznej równowagi ( $\Sigma X = 0$ ,  $\Sigma Y = 0$ ,  $\Sigma M = 0$ ), sprawdza więc poprawność wykonania wykresów sił wewnętrznych, przy danych wartościach niewiadomych (niekoniecznie prawidłowych). Nie bada więc poprawności samych obliczeń niewiadomych.

W tym celu rozpatrywany przez nas układ „zawieszony” na wewnętrznych siłach przypodporowych (Rys. 3.4.1).



Rys. 3.4.1 Rozpatrywany układ „zawieszony” na wewnętrznych siłach przypodporowych

$$\sum X = 0$$

$$113,041 \cdot \cos \alpha_0 + 46,889 \cdot \sin \alpha_0 - 193,689 \cdot \cos \alpha_0 + 46,889 \cdot \sin \alpha_0 = -0,004 \approx 0,00$$

$$\sum Y = 0$$

$$113,041 \cdot \sin \alpha_0 - 46,889 \cdot \cos \alpha_0 + 193,689 \cdot \sin \alpha_0 + 46,889 \cdot \cos \alpha_0 - 20 \cdot 10 = -0,012 \approx 0,0$$

$$\sum M_K = 0$$

$$\begin{aligned} &118,433 + 113,041 \cdot 10 \cdot \sin \alpha_0 - 113,041 \cdot 4,3 \cdot \cos \alpha_0 - 46,889 \cdot 10 \cdot \cos \alpha_0 - \\ &- 46,889 \cdot 4,3 \cdot \sin \alpha_0 + 20 \cdot 10 \cdot 5 - 193,689 \cdot 10 \cdot \sin \alpha_0 + 193,689 \cdot 4,3 \cdot \cos \alpha_0 - \\ &- 46,889 \cdot 10 \cdot \cos \alpha_0 - 46,889 \cdot 4,3 \cdot \sin \alpha_0 + 118,433 = 0,0337 \approx 0,0 \end{aligned}$$

(3.4.1)

Jak wynika z powyższego (3.4.1) sprawdzenie statyczne zostało spełnione.