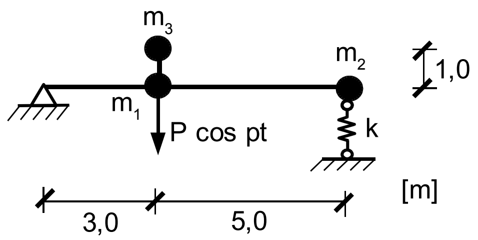
POLITECHNIKA POZNAŃSKA
INSTYTUT KONSTRUKCJI BUDOWLANYCH
ZAKŁAD MECHANIKI BUDOWLI

ĆWICZENIE NR 3

DYNAMIKA – UJĘCIE KLASYCZNE

Agnieszka Sysak
Gr 3

Dla układu



gdzie:

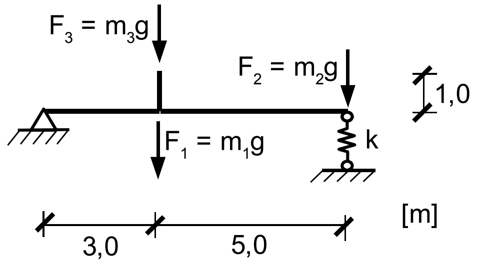
$$m_1 = 300\ kg$$
$$m_2 = 100\ kg$$
$$m_3 = 100\ kg$$
$$k = \frac{1}{4} EJ$$
$$P = 9000\ N$$
$$p = 29\ Hz = 182{,}21\ \frac{rad}{s}$$

oraz

$$J = const$$
$$A = const$$

zaprojektowano przekroje prętów przy statycznym obciążeniu masami, tak aby:

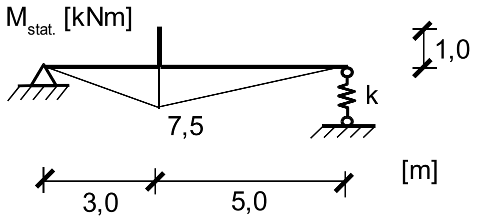
$$\sigma \leqslant \sigma_{dop} = 100\ MPa = 10\ \frac{kN}{cm^2}$$



przyjęto:

$$g = 10\ \frac{m}{s^2}$$

$$F_1 = 300 \cdot 10 = 3000\ N = 3\ kN$$
$$F_2 = 100 \cdot 10 = 1000\ N = 1\ kN$$
$$F_3 = 100 \cdot 10 = 1000\ N = 1\ kN$$



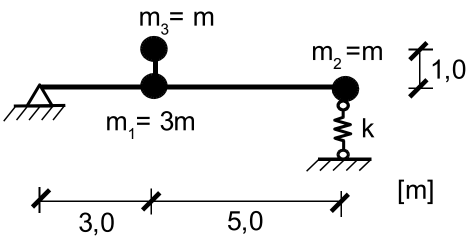
$$M_{max} = 7{,}5\ kNm = 750\ kNcm$$
$$\sigma = \frac{M_{max}}{W} \leqslant \sigma_{max}$$
$$W \geqslant \frac{M_{max}}{\sigma_{max}} = \frac{750}{10} = 75{,}0\ cm^3$$

Przyjęto dwuteownik *I 140* dla którego

$$W = 81{,}9\ cm^3$$
$$\sigma = \frac{750}{81{,}9} = 9{,}16\ \frac{kN}{cm^2} < 10\ \frac{kN}{cm^2}$$

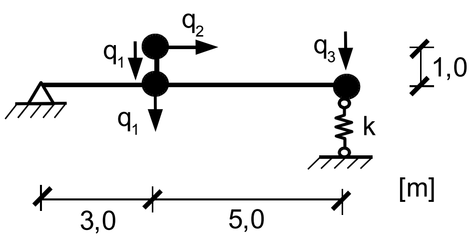
$$A = 14{,}4\ cm^2$$
$$J = 573\ cm^4$$
$$E = 205\ GPa$$

OBLICZENIE CZĘSTOŚCI I POSTACI DRGAŃ WŁASNYCH

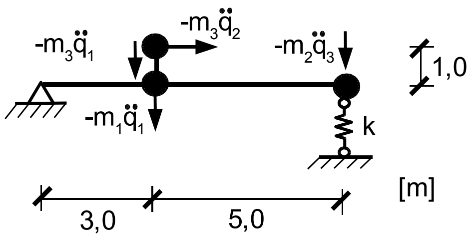


gdzie:

$$m = 100\ kg$$



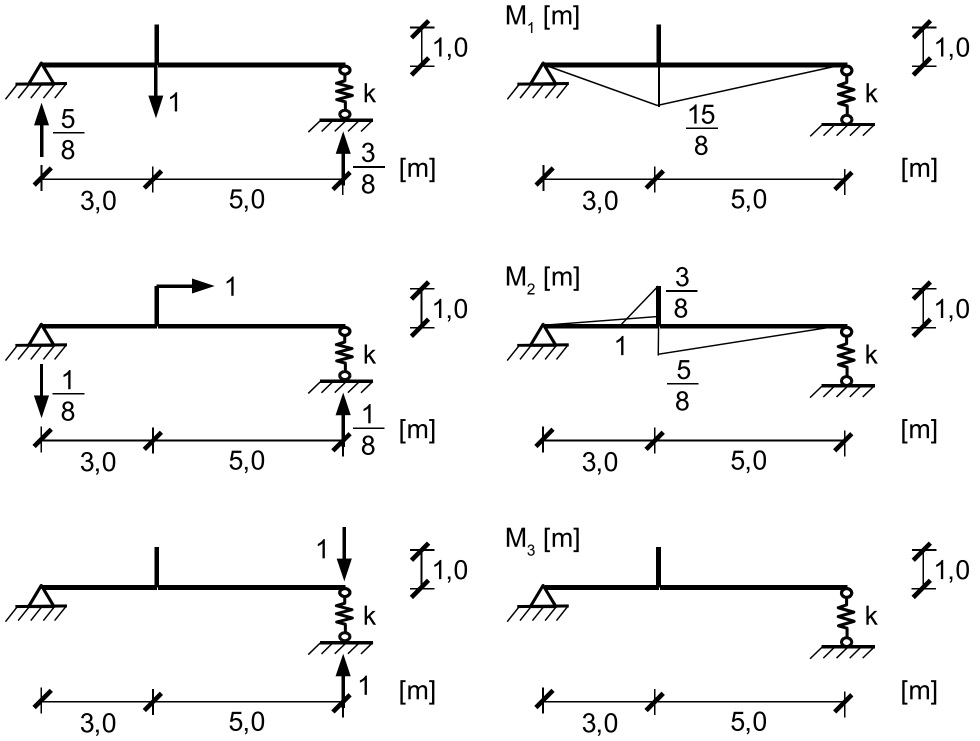
$$SSD = 3$$



$$\begin{cases} q_1 = \delta_{11}\left(-m_1\ddot{q}_1 - m_3\ddot{q}_1\right) + \delta_{12}\left(-m_3\ddot{q}_2\right) + \delta_{13}\left(-m_2\ddot{q}_3\right) \\ q_2 = \delta_{21}\left(-m_1\ddot{q}_1 - m_3\ddot{q}_1\right) + \delta_{22}\left(-m_3\ddot{q}_2\right) + \delta_{23}\left(-m_2\ddot{q}_3\right) \\ q_3 = \delta_{31}\left(-m_1\ddot{q}_1 - m_3\ddot{q}_1\right) + \delta_{32}\left(-m_3\ddot{q}_2\right) + \delta_{33}\left(-m_2\ddot{q}_3\right) \end{cases}$$

gdzie wartości δ_{ik} obliczamy ze wzoru:

$$\delta_{ik}=\sum\int\frac{M_i M_k}{EJ}dx+\sum\frac{R_i R_k}{k}$$



$$\delta_{11}=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{15}{8}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{8}+\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{15}{8}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{8}\right)+\frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}}{\frac{1}{4}EJ}=\frac{9,375}{EJ}+\frac{0,5625}{EJ}=\frac{9,9375}{EJ}$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}\right)+\frac{\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}EJ}=\frac{1,125}{EJ}+\frac{0,0625}{EJ}=\frac{1,1875}{EJ}$$

$$\delta_{33}=0+\frac{1\cdot 1}{\frac{1}{4}EJ}=\frac{4}{EJ}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EJ}\left(-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{15}{8}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{15}{8}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}\right)+\frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}EJ}=\frac{1,25}{EJ}+\frac{0,1875}{EJ}=\frac{1,4375}{EJ}$$

$$\delta_{13}=\delta_{31}=0+\frac{\frac{3}{8}\cdot 1}{\frac{1}{4}EJ}=\frac{1,5}{EJ}$$

$$\delta_{23}=\delta_{32}=0+\frac{\frac{1}{8}\cdot 1}{\frac{1}{4}EJ}=\frac{0,5}{EJ}$$

$$\begin{cases} q_1+\frac{9,9375}{EJ}(3\ m\ddot{q}_1+m\ddot{q}_1)+\frac{1,4375}{EJ}(m\ddot{q}_2)+\frac{1,5}{EJ}(m\ddot{q}_3)=0 \\ q_2+\frac{1,4375}{EJ}(3\ m\ddot{q}_1+m\ddot{q}_1)+\frac{1,1875}{EJ}(m\ddot{q}_2)+\frac{0,5}{EJ}(m\ddot{q}_3)=0 \\ q_3+\frac{1,5}{EJ}(3\ m\ddot{q}_1+m\ddot{q}_1)+\frac{0,5}{EJ}(m\ddot{q}_2)+\frac{4}{EJ}(m\ddot{q}_3)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1+\frac{39,75}{EJ}(m\ddot{q}_1)+\frac{1,4375}{EJ}(m\ddot{q}_2)+\frac{1,5}{EJ}(m\ddot{q}_3)=0 \\ q_2+\frac{5,75}{EJ}(m\ddot{q}_1)+\frac{1,1875}{EJ}(m\ddot{q}_2)+\frac{0,5}{EJ}(m\ddot{q}_3)=0 \\ q_3+\frac{6}{EJ}(m\ddot{q}_1)+\frac{0,5}{EJ}(m\ddot{q}_2)+\frac{4}{EJ}(m\ddot{q}_3)=0 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu równań różniczkowych jest funkcja:

$$q_i=A_i\cos\omega t$$
$$\dot{q}_i=-A_i\omega\sin\omega t$$
$$\ddot{q}_i=-A_i\omega^2\cos\omega t$$

Po podstawieniu do układu równań i podzieleniu przez *cos ωt* otrzymamy:

$$\begin{cases} A_1-39,75\ \frac{m\omega^2}{EJ}A_1-1,4375\ \frac{m\omega^2}{EJ}A_2-1,5\ \frac{m\omega^2}{EJ}A_3=0 \\ A_2-5,75\ \frac{m\omega^2}{EJ}A_1-1,1875\ \frac{m\omega^2}{EJ}A_2-0,5\ \frac{m\omega^2}{EJ}A_3=0 \\ A_3-6\ \frac{m\omega^2}{EJ}A_1-0,5\ \frac{m\omega^2}{EJ}A_2-4\ \frac{m\omega^2}{EJ}A_3=0 \end{cases}$$

podstawiając:

$$\lambda=\frac{m\omega^2}{EJ}$$

otrzymamy:

$$\begin{cases} A_1-39,75\ \lambda A_1-1,4375\ \lambda A_2-1,5\ \lambda A_3=0 \\ A_2-5,75\ \lambda A_1-1,1875\ \lambda A_2-0,5\ \lambda A_3=0 \\ A_3-6\ \lambda A_1-0,5\ \lambda A_2-4\ \lambda A_3=0 \end{cases}$$

a w zapisie macierzowym:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}-\lambda\cdot\begin{bmatrix} 39,75 & 1,4375 & 1,5 \\ 5,75 & 1,1875 & 0,5 \\ 6 & 0,5 & 4 \end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}=0$$

Taki układ równań jednorodnych ma rozwiązanie gdy

$$det\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} - \lambda\cdot\begin{bmatrix}39,75 & 1,4375 & 1,5\\ 5,75 & 1,1875 & 0,5\\ 6 & 0,5 & 4\end{bmatrix}\right)=0$$

Obliczenia wykonano w programie *upw*. Otrzymano następujące wyniki:

$$\begin{cases}\lambda_1=0,02487\\ \lambda_2=0,2650\\ \lambda_3=1,006\end{cases}$$

Wartości drgań własnych obliczamy ze wzoru:

$$\omega_i=\sqrt{\frac{\lambda_i EJ}{m}}$$

gdzie:

$$m=100\ kg$$

$$EJ=205\cdot 10^9\,\frac{N}{m^2}\cdot 573\cdot 10^{-8}\,m^4=1174650\ Nm^2$$

zatem:

$$\omega_1=\sqrt{\frac{0,02487\cdot 1174650}{100}}=17,09\ \frac{rad}{s}$$

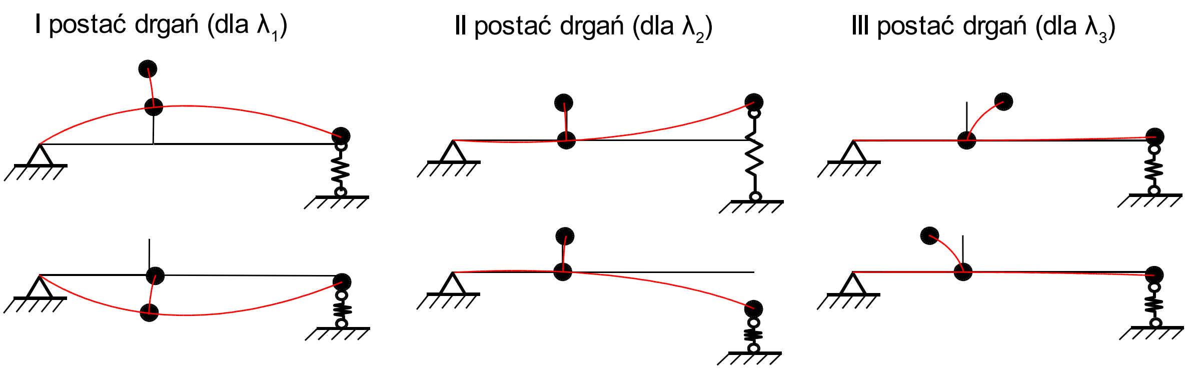
$$\omega_2=\sqrt{\frac{0,2650\cdot 1174650}{100}}=55,79\ \frac{rad}{s}$$

$$\omega_3=\sqrt{\frac{1,006\cdot 1174650}{100}}=108,71\ \frac{rad}{s}$$

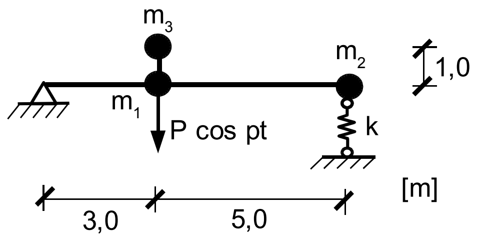
W programie *upw* otrzymano również wartości wektorów własnych, odpowiadających kolejnym wartościom λ_i

$$[q]=\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\end{bmatrix}\quad [q_1]=\begin{bmatrix}-1,000\\ -0,1495\\ -0,1677\end{bmatrix}\quad [q_2]=\begin{bmatrix}0,04630\\ -0,09427\\ -1,0200\end{bmatrix}\quad [q_3]=\begin{bmatrix}-0,03324\\ 1,000\\ -0,09845\end{bmatrix}$$

Postacie drgań własnych



OBLICZENIE AMPLITUD DRGAŃ WYMUSZONYCH PRZEZ ZADANE OBCIĄŻENIE HARMONICZNE, OBLICZENIE SIŁ DYNAMICZNYCH DZIAŁAJĄCYCH NA UKŁAD.



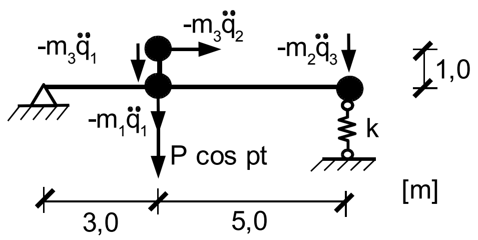
$$p=182{,}21\ \frac{rad}{s}$$

$$\omega_1=17{,}09\ \frac{rad}{s}<182{,}21\ \frac{rad}{s}$$

$$\omega_2=55{,}79\ \frac{rad}{s}<182{,}21\ \frac{rad}{s}$$

$$\omega_3=108{,}71\ \frac{rad}{s}<182{,}21\ \frac{rad}{s}$$

$$\omega_1,\omega_2,\omega_3<p$$



$$\begin{cases} q_1=\delta_{11}\,(P\cos pt-m_1\ddot{q}_1-m_3\,\ddot{q}_1)+\delta_{12}\,(-m_3\,\ddot{q}_2)+\delta_{13}\,(-m_2\,\ddot{q}_3)\\ q_2=\delta_{21}\,(P\cos pt-m_1\ddot{q}_1-m_3\,\ddot{q}_1)+\delta_{22}\,(-m_3\,\ddot{q}_2)+\delta_{23}\,(-m_2\,\ddot{q}_3)\\ q_3=\delta_{31}\,(P\cos pt-m_1\ddot{q}_1-m_3\,\ddot{q}_1)+\delta_{32}\,(-m_3\,\ddot{q}_2)+\delta_{33}\,(-m_2\,\ddot{q}_3)\end{cases}$$

Współczynniki δ_{ik} mają te same wartości jak dla obliczeń drgań własnych, zatem układ równań przyjmuje następującą postać:

$$\begin{cases} q_1+\frac{9{,}9375}{EJ}(3\ m\ddot{q}_1+m\ddot{q}_1)+\frac{1{,}4375}{EJ}(m\ddot{q}_2)+\frac{1{,}5}{EJ}(m\ddot{q}_3)=\frac{9{,}9375}{EJ}P\cos pt\\ q_2+\frac{1{,}4375}{EJ}(3\ m\ddot{q}_1+m\ddot{q}_1)+\frac{1{,}1875}{EJ}(m\ddot{q}_2)+\frac{0{,}5}{EJ}(m\ddot{q}_3)=\frac{1{,}4375}{EJ}P\cos pt\\ q_3+\frac{1{,}5}{EJ}(3\ m\ddot{q}_1+m\ddot{q}_1)+\frac{0{,}5}{EJ}(m\ddot{q}_2)+\frac{4}{EJ}(m\ddot{q}_3)=\frac{1{,}5}{EJ}P\cos pt\end{cases}$$

i ostatecznie:

$$\begin{cases} q_1+\frac{39{,}75}{EJ}(m\ddot{q}_1)+\frac{1{,}4375}{EJ}(m\ddot{q}_2)+\frac{1{,}5}{EJ}(m\ddot{q}_3)=\frac{9{,}9375}{EJ}P\cos pt\\ q_2+\frac{5{,}75}{EJ}(m\ddot{q}_1)+\frac{1{,}1875}{EJ}(m\ddot{q}_2)+\frac{0{,}5}{EJ}(m\ddot{q}_3)=\frac{1{,}4375}{EJ}P\cos pt\\ q_3+\frac{6}{EJ}(m\ddot{q}_1)+\frac{0{,}5}{EJ}(m\ddot{q}_2)+\frac{4}{EJ}(m\ddot{q}_3)=\frac{1{,}5}{EJ}P\cos pt\end{cases}$$

Rozwiązaniem układu równań różniczkowych jest funkcja podobna do opisującej obciążenie harmoniczne:

$$q_i = A_i \cos pt$$
$$\dot{q}_i = -A_i\, p \sin pt$$
$$\ddot{q}_i = -A_i\, p^2 \cos pt$$

Po podstawieniu do układu równań i podzieleniu przez *cos pt* otrzymamy:

$$\begin{cases} A_1 - 39,75\dfrac{m p^2}{EJ}A_1 - 1,4375\dfrac{m p^2}{EJ}A_2 - 1,5\dfrac{m p^2}{EJ}A_3 = \dfrac{9,9375}{EJ}P \\ A_2 - 5,75\dfrac{m p^2}{EJ}A_1 - 1,1875\dfrac{m p^2}{EJ}A_2 - 0,5\dfrac{m p^2}{EJ}A_3 = \dfrac{1,4375}{EJ}P \\ A_3 - 6\dfrac{m p^2}{EJ}A_1 - 0,5\dfrac{m p^2}{EJ}A_2 - 4\dfrac{m p^2}{EJ}A_3 = \dfrac{1,5}{EJ}P \end{cases}$$

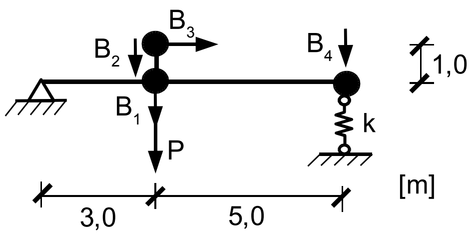
i ostatecznie:

$$\begin{cases} -111,350\,A_1 - 4,063\,A_2 - 4,240\,A_3 = 76,140\cdot 10^{-3} \\ -16,252\,A_1 - 2,356\,A_2 - 1,413\,A_3 = 11,014\cdot 10^{-3} \\ -16,959\,A_1 - 1,413\,A_2 - 10,306\,A_3 = 11,493\cdot 10^{-3} \end{cases}$$

Obliczenia wykonano w programie *Derive*. Otrzymano następujące wartości amplitud:

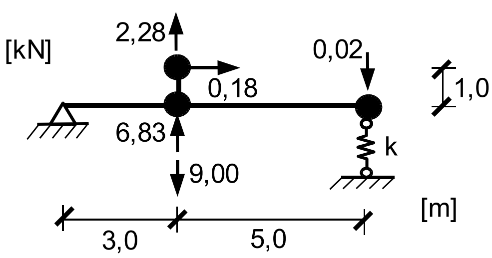
$$\begin{cases} A_1 = -0,0006860\ [m] \\ A_2 = 0,00005328\ [m] \\ A_3 = 0,000006323\ [m] \end{cases}$$

Siły dynamiczne wyznaczamy dla *cos pt = 1*

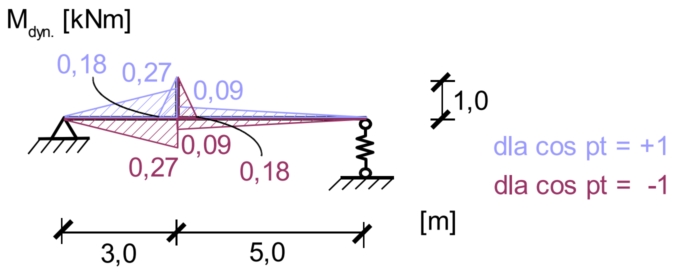


$$B_1 = -m_1\cdot\ddot{q}_1 = -m_1\cdot(-p^2\cdot A_1) = 300\cdot(182,21)^2\cdot(-0,0006860) = -6,83\ kN$$
$$B_2 = -m_3\cdot\ddot{q}_1 = -m_1\cdot(-p^2\cdot A_1) = 100\cdot(182,21)^2\cdot(-0,0006860) = -2,28\ kN$$
$$B_3 = -m_3\cdot\ddot{q}_2 = -m_3\cdot(-p^2\cdot A_2) = 100\cdot(182,21)^2\cdot 0,00005328 = 0,18\ kN$$
$$B_4 = -m_2\cdot\ddot{q}_3 = -m_2\cdot(-p^2\cdot A_3) = 100\cdot(182,21)^2\cdot 0,000006323 = 0,02\ kN$$

Wartości sił dynamicznych



Obwiednia momentów dynamicznych



Sprawdzenie wartości naprężeń

$$\sigma \leqslant \sigma_{dop} = 21,5\ \frac{kN}{cm^2}$$

$$\sigma = \frac{M_{max}}{W}$$

gdzie:

$$M_{max} = \eta_{stat.} \cdot M_{stat.\,max} + \eta_{dyn.} \cdot M_{dyn.\,max}$$

$$M_{stat.\,max} = 7,50\ kNm$$
$$M_{dyn.\,max} = 0,27\ kNm$$
$$\eta_{stat.} = 1,2$$
$$\eta_{dyn.} = 5,0$$

czyli:

$$M_{max} = \eta_{stat.} \cdot M_{stat.\,max} + \eta_{dyn.} \cdot M_{dyn.\,max}$$
$$M_{max} = 1,2 \cdot 7,50 + 5,0 \cdot 0,27 = 10,35\ kNm$$

$$W = 81,9\ cm^3$$

$$\sigma = \frac{M_{max}}{W} = \frac{1035}{81,9} = 12,64\ \frac{kN}{cm^2} > 21,5\ \frac{kN}{cm^2}$$

Ponieważ naprężenia w przekroju nie przekraczają naprężeń dopuszczalnych, można uznać przekrój za dobrze zaprojektowany.