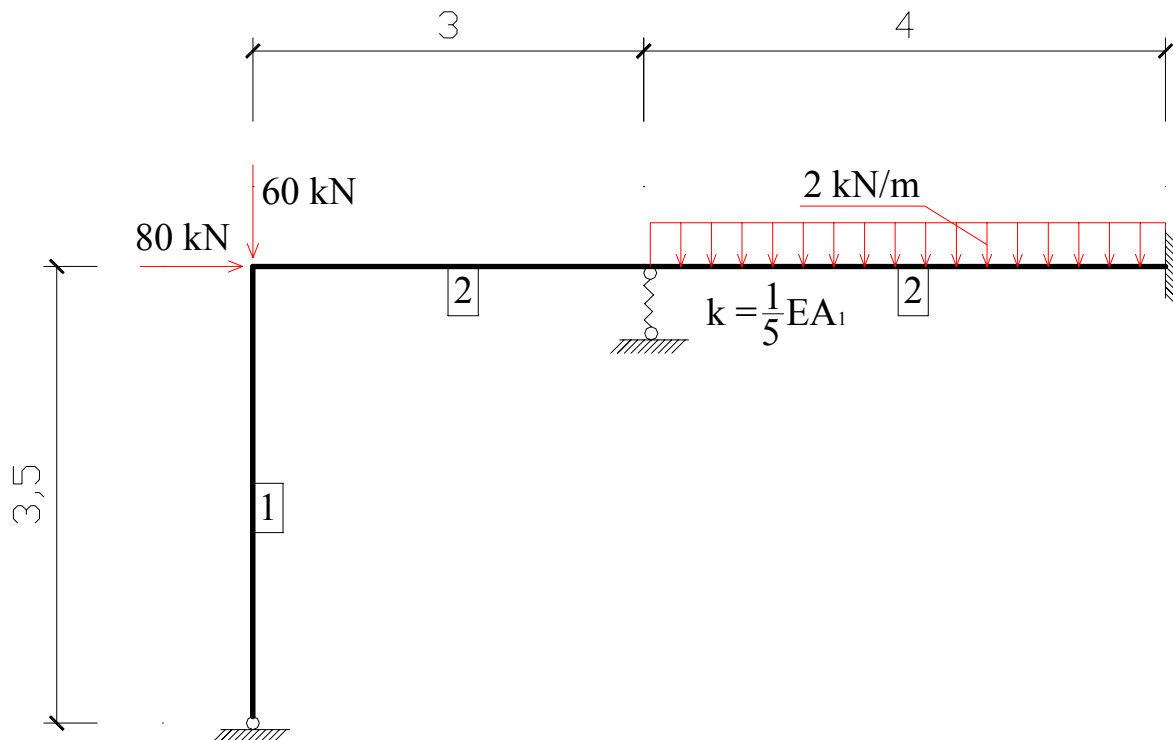




Stateczność ram – wersja komputerowa

Dla układu przedstawionego poniżej należy:

- dowolną metodą znaleźć rozkład sił normalnych w prętach od zadanego obciążenia jednoparametrowego
- zbudować globalne macierze: sztywności i geometryczną przez agregacje macierzy elementowych
- obliczyć wartości obciążenia krytycznego i narysować postać utraty stateczności
- obliczyć przemieszczenia i siły przekrojowe uwzględniając siły osiowe dla obciążenia odpowiadającego połowie obciążenia krytycznego (wykonać jedną iterację)



Charakterystyki przekrojów

(1) I 180

$$\begin{aligned} Jx_1 &= 1450 [cm^4] = 0,0000145 [m^4] \\ A_1 &= 27,9 [cm^2] = 0,00279 [m^2] \\ EJx_1 &= 2972500 [Nm^2] \\ EA_1 &= 571950000 [N] \end{aligned}$$

(2) I 220

$$\begin{aligned} Jx_2 &= 3060 [cm^4] = 0,0000306 [m^4] \\ A_2 &= 39,6 [cm^2] = 0,00396 [m^2] \\ EJx_2 &= 627300 [Nm^2] \\ EA_2 &= 811800000 [N] \end{aligned}$$



Stan równowagi dla elementu prętowego opisuje równanie:

$$(\tilde{\underline{K}} + \tilde{\underline{K}}_g) \cdot \tilde{\underline{q}} = \tilde{\underline{R}} - \tilde{\underline{R}}_0$$

gdzie:

- $\tilde{\underline{K}} \rightarrow$ macierz sztywności elementu
- $\tilde{\underline{K}}_g \rightarrow$ macierz geometryczna elementu
- $\tilde{\underline{q}} \rightarrow$ wektor przemieszczeń węzłowych
- $\tilde{\underline{R}} \rightarrow$ wektor sił przywęzłowych
- $\tilde{\underline{R}}_0 \rightarrow$ wektor sił przywęzłowych od obciążenia przęsłowego

Różnicę wektorów sił przywęzłowych możemy zapisać: $\tilde{\underline{R}} - \tilde{\underline{R}}_0 = \lambda(\tilde{\underline{R}} - \tilde{\underline{R}}_0)^\times = \tilde{\underline{R}}^\times$

W ten sam sposób od parametru λ możemy uzależnić:

$$\begin{aligned} N_i &= \lambda N_i^\times \\ \tilde{\underline{q}} &= \lambda \tilde{\underline{q}}^\times \\ \tilde{\underline{K}}_g &= \lambda \tilde{\underline{K}}_g^\times \end{aligned}$$

Zatem zadanie sprowadza się do znalezienia $\lambda_{\min} = \lambda_{kr}$, a następnie $\underline{R}_{kr} = \lambda_{kr} \cdot \underline{R}^\times$

Z utratą stateczności związany jest punkt bifurkacji w którym przy ustalonym obciążeniu \underline{R}^\times odpowiadają dwa różne rozwiązania \underline{q}_1 i \underline{q}_2 spełniające równania:

$$(\underline{K} + \lambda \underline{K}_g^\times) \cdot \underline{q}_1 = \underline{R}^\times \text{ oraz } (\underline{K} + \lambda \underline{K}_g^\times) \cdot \underline{q}_2 = \underline{R}^\times$$

Po odjęciu tych równań stronami otrzymujemy:

$$(\underline{K} - \bar{\lambda} \underline{K}_g^\times) \cdot \underline{v} = \underline{0}$$

gdzie:

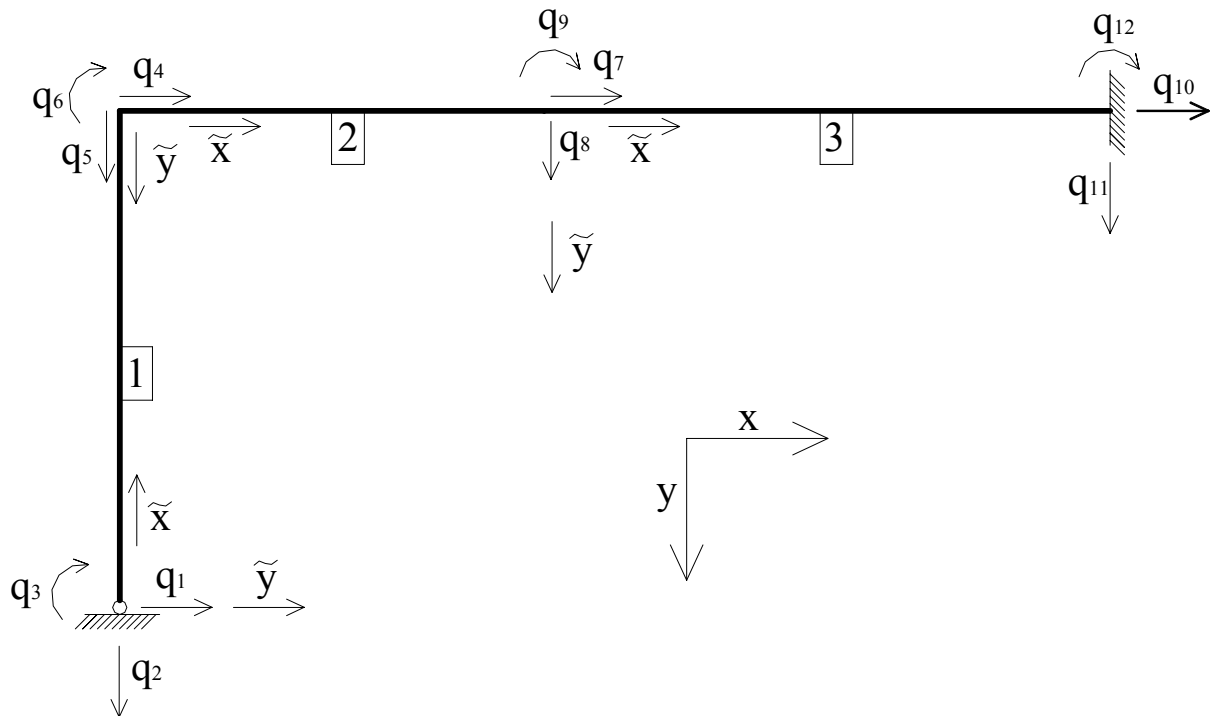
$$\begin{aligned} \underline{v} &= \underline{q}_2 - \underline{q}_1 \\ \bar{\lambda} &= -\lambda \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu tego problemu własnego otrzymujemy zestaw par złożonych z wartości i wektorów własnych $(\lambda_i, \underline{v}_i)$, z których $\lambda_{\min} = \lambda_{kr}$, a wektor \underline{v}_i określa z dokładnością do stałego czynnika przemieszczenia węzłowe w globalnym układzie współrzędnych, czyli postać utraty stateczności układu.

Dla uproszczenia obliczeń przyjęto że jeden element odpowiada jednemu prętowi.



Przyjęcie układu globalnego, układów lokalnych i przemieszczeń węzłowych..



Dla tak przyjętych układów transformacje wektora przemieszczeń, macierzy geometrycznej i sztywności z układu lokalnego do globalnego dla pręta 1 należy przeprowadzać dla kąta $\alpha = -90^\circ$, natomiast dla elementów 2 i 3 wartości z układu lokalnego pokrywają się z wartościami dla układu globalnego.

Tabela powiązań

nr pręta	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	4	5	6	7	8	9
3	7	8	9	10	11	12

Budowa macierzy sztywności

Dla elementu 1 korzystam z macierzy sztywności elementu z przegubem na lewym końcu.

$$\tilde{K}_{(e)} = \frac{1}{l^3} \begin{Bmatrix} EAl^2 & 0 & 0 & -EAl^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3EJ & 0 & 0 & -3EJ & 3EJ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EAl^2 & 0 & 0 & EAl^2 & 0 & 0 \\ 0 & -3EJ & 0 & 0 & 3EJ & -3EJ \\ 0 & 3EJ & 0 & 0 & -3EJ & 3EJ^2 \end{Bmatrix}$$



Dla elementów 2 i 3 korzystam z macierzy sztywności elementu obustronnie utwierdzonego.

$$\tilde{K}_{(e)} = \frac{1}{l^3} \begin{pmatrix} EA l^2 & 0 & 0 & -EA l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12EJ & 6EJl & 0 & -12EJ & 6EJl \\ 0 & 6EJl & 4EJl^2 & 0 & -6EJl & 2EJl^2 \\ -EA l^2 & 0 & 0 & EA l^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12EJ & -6EJl & 0 & 12EJ & -6EJl \\ 0 & 6EJl & 2EJl^2 & 0 & -6EJl & 4EJl^2 \end{pmatrix}$$

Po podstawieniu danych i wyliczeniu otrzymuje:

$$\tilde{K}_{(1)} = \begin{pmatrix} 163414285,7 & 0 & 0 & -163414285,7 & 0 & 0 \\ 0 & 207988,3382 & 0 & 0 & -207988,338 & 727959,1837 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -163414285,7 & 0 & 0 & 163414285,7 & 0 & 0 \\ 0 & -207988,338 & 0 & 0 & 207988,3382 & -727959,187 \\ 0 & 727959,1837 & 0 & 0 & -727959,183 & 2547857,143 \end{pmatrix}$$

$$K_{(2)} = \begin{pmatrix} 270600000 & 0 & 0 & -270600000 & 0 & 0 \\ 0 & 2788000 & 4182000 & 0 & -2788000 & 4182000 \\ 0 & 4182000 & 8364000 & 0 & -4182000 & 4182000 \\ -270600000 & 0 & 0 & 270600000 & 0 & 0 \\ 0 & -2788000 & -4182000 & 0 & 2788000 & -4182000 \\ 0 & 4182000 & 4182000 & 0 & -4182000 & 8364000 \end{pmatrix}$$

$$K_{(3)} = \begin{pmatrix} 202950000 & 0 & 0 & -202950000 & 0 & 0 \\ 0 & 1176187,5 & 2352375 & 0 & -1176187,5 & 2352375 \\ 0 & 2352375 & 6273000 & 0 & -2352375 & 3136500 \\ -202950000 & 0 & 0 & 202950000 & 0 & 0 \\ 0 & -1176187,5 & -2352375 & 0 & 1176187,5 & -2352375 \\ 0 & 2352375 & 3136500 & 0 & -2352375 & 6273000 \end{pmatrix}$$

Transformacja macierzy sztywności dla pręta 1 do układu globalnego.

Macierz transformacji dla $\alpha = -90^\circ$

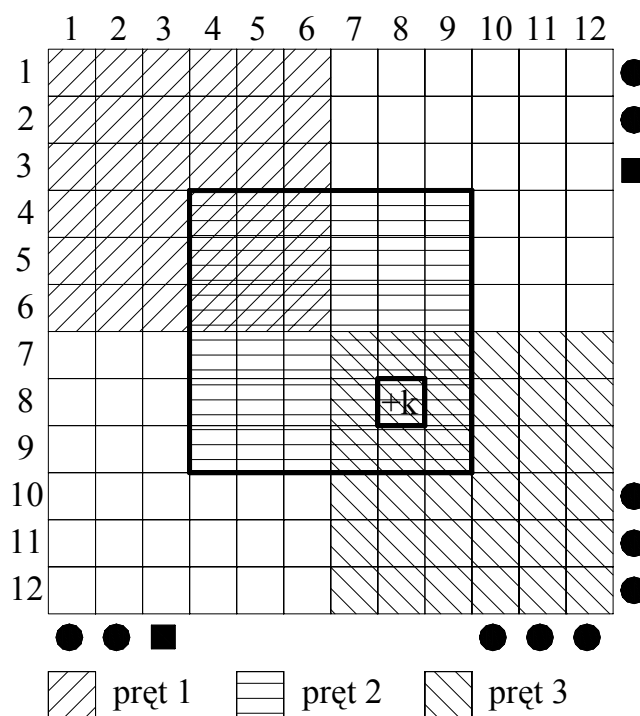
$$T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$K_{(e)} = T^T \tilde{K}_{(e)} T$$

$$K_{(1)} = \begin{pmatrix} 207988,338 & 0 & 0 & -207988,38 & 0 & 727959,184 \\ 0 & 163414285,71 & 0 & 0 & -163414285,71 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -207988,33 & 0 & 0 & 207988,338 & 0 & -727959,184 \\ 0 & -163414285,7 & 0 & 0 & 163414285,714 & 0 \\ 727959,184 & 0 & 0 & -727959,18 & 0 & 2547857,143 \end{pmatrix}$$

Agregacja macierzy sztywności



Elementy w polach nakładających się zostały dodane; w komórce 8x8 uwzględniono sprężynę (dającą dodatkową siłę sprężystą po kierunku 8 przemieszczenia) dodając jej

$$\text{sztywność } k = \frac{1}{5} EA_1 = 114390000 \left[\frac{1}{m} N = \frac{N}{m} \right]$$

Po wykonaniu powyższych działań wykreśliłam 1,2,10,11,12-ty rząd i kolumnę (oznaczone kropką na rysunku powyżej), ponieważ warunki podparcia eliminują możliwość przemieszczenia. Redukuje również 3 wiersz i kolumnę (oznaczoną kwadratem), gdyż do obliczeń macierzy sztywności elementu 1 wykorzystałam fakt istnienia przegubu na lewym jego końcu.

W rezultacie otrzymuje macierz wielkości 6x6 (zaznaczona wytłuszczoną linią na rysunku powyżej)



$$K = \begin{pmatrix} 270807988 & 0 & -727959 & -270600000 & 0 & 0 \\ 0 & 166202286 & 4182000 & 0 & -2788000 & 4182000 \\ -727959 & 4182000 & 10911857 & 0 & -4182000 & 4182000 \\ -270600000 & 0 & 0 & 473550000 & 0 & 0 \\ 0 & -2788000 & -4182000 & 0 & 118354187,5 & -1829625 \\ 0 & 4182000 & 4182000 & 0 & -1829625 & 14637000 \end{pmatrix}$$

Budowa macierzy geometrycznej

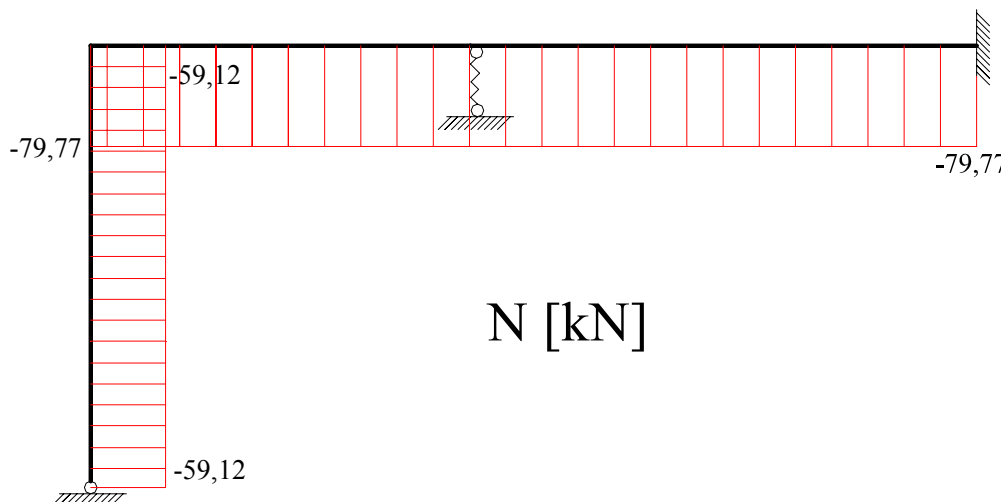
Dla elementu 1 korzystam z macierzy geometrycznej dla elementu z przegubem na lewym końcu.

$$\tilde{K}_{g(e)} = \frac{N}{30l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 & 0 & -36 & 6l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 0 & 0 & 36 & -6l \\ 0 & 6l & 0 & 0 & -6l & 6l^2 \end{pmatrix}$$

Dla elementów 2 i 3 korzystam z macierzy geometrycznej dla elementu obustronnie utwierdzonego.

$$\tilde{K}_{g(e)} = \frac{N}{30l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3l & 0 & -36 & 3l \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & -3l & -l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3l & 0 & 36 & -3l \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & -3l & 4l^2 \end{pmatrix}$$

Siły normalne w poszczególnych elementach układu ramowego





zatem:

$$N_{(1)} = -59120[N]$$

$$N_{(2)} = -79770[N]$$

$$N_{(3)} = -79770[N]$$

Po podstawieniu danych i wyliczeniu otrzymuje:

$$\tilde{K}_{g(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20269,714 & 0 & 0 & 20269,714 & -11824,000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20269,714 & 0 & 0 & -20269,714 & 11824,000 \\ 0 & -11824,000 & 0 & 0 & 11824,000 & -41384,000 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{K}_{g(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -31908 & -7977 & 0 & 31908 & -7977 \\ 0 & -7977 & -31908 & 0 & 7977 & 7977 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 31908 & 7977 & 0 & -31908 & 7977 \\ 0 & -7977 & 7977 & 0 & 7977 & -31908 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{K}_{g(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -23931 & -7977 & 0 & 23931 & -7977 \\ 0 & -7977 & -42544 & 0 & 7977 & 10636 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 23931 & 7977 & 0 & -23931 & 7977 \\ 0 & -7977 & 10636 & 0 & 7977 & -42544 \end{pmatrix}$$

Transformacja macierzy geometrycznej dla elementu 1 do układu globalnego.

Macierz transformacji dla $\alpha = -90^\circ$

$$T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_{g(e)} = T^T \tilde{K}_{g(e)} T$$



$$K_g = \begin{pmatrix} -20269,7 & 0 & 11824,0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -31908,0 & -7977,0 & 0 & 31908,0 & -7977,0 \\ 11824,0 & -7977,0 & -73292,0 & 0 & 7977,0 & 7977,0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 31908,0 & 7977,0 & 0 & -55839,0 & 0 \\ 0 & -7977,0 & 7977,0 & 0 & 0 & -74452,0 \end{pmatrix}$$

Można zauważyć że macierz powyżej ma na głównej przekątnej w komórce 4x4 (7x7 w układzie globalnym) wartość zerową, ponieważ przemieszczenie po kierunku 7 układu globalnego nie powoduje, przy działaniu sił normalnych, powstania dodatkowego momentu. Następnym tego jest brak możliwości rozwiązania problemu własnego:

$$(\underline{K} - \bar{\lambda} \underline{K}_g) \cdot \underline{v} = \underline{0}$$

w tak skonstruowanej macierzy geometrycznej.

Przekształcam powyższe równanie (dzieląc obustronne przez $\bar{\lambda}$) do postaci:

$$\left(\frac{\underline{K}_g}{\bar{\lambda}} - \frac{1}{\bar{\lambda}} \underline{K} \right) \cdot \underline{v} = \underline{0}$$

Tak przekształcony problem własny rozwiązuję korzystając z programu UPW.

Otrzymane wyniki

$$\bar{\lambda} = \begin{Bmatrix} -0,236907E-13 \\ -0,610725E-04 \\ -0,157440E-03 \\ -0,582350E-03 \\ -0,386811E-02 \\ -0,992845E-02 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_{ma} = \frac{1}{\lambda_{kr}} = 100,72$$

$$v_1 = \underline{q}_0 = \begin{Bmatrix} -0,004005616 \\ -0,00646364 \\ 1 \\ -0,00231781 \\ 0,018787 \\ -0,690549 \end{Bmatrix}$$

Do problemu związanego z rozwiązaniem problemu własnego można podejść w inny sposób. Można zauważyć, że przemieszczenie po kierunku 7 nie ma istotnego wpływu na utratę stateczności układu, umożliwia to zatem redukcję macierzy poprzez wykreślenie 4 wiersza i kolumny oraz przyjęcia przemieszczenie po kierunku 7 równego zero; otrzymuje następujące zredukowane macierze: sztywności i geometryczną:

$$K^r = \begin{pmatrix} 270807988 & 0 & -727959 & 0 & 0 \\ 0 & 166202286 & 4182000 & -2788000 & 4182000 \\ -727959 & 4182000 & 10911857 & -4182000 & 4182000 \\ 0 & -2788000 & -4182000 & 118354187,5 & -1829625 \\ 0 & 4182000 & 4182000 & -1829625 & 14637000 \end{pmatrix}$$



$$K_g^r = \begin{pmatrix} -20269,7 & 0 & 11824,0 & 0 & 0 \\ 0 & -31908,0 & -7977,0 & 31908,0 & -7977,0 \\ 11824,0 & -7977,0 & -73292,0 & 7977,0 & 7977,0 \\ 0 & 31908,0 & 7977,0 & -55839,0 & 0 \\ 0 & -7977,0 & 7977,0 & 0 & -74452,0 \end{pmatrix}$$

Zatem rozwiązuję problem własny (korzystając z programu upw):

$$(\underline{K}^r - \bar{\lambda} \underline{K}_g^r) \cdot \underline{v}^r = \underline{0}$$

Otrzymane wyniki

$$\lambda_{\min} = \lambda_{kr} = 100,73$$

$$\underline{v}_1^r = \begin{pmatrix} 0,00055937 \\ 0,00209795 \\ -0,324662 \\ -0,00609885 \\ 0,224220 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{v}_1 = \underline{q}_0 = \begin{pmatrix} 0,00055937 \\ 0,00209795 \\ -0,324662 \\ 0 \\ -0,00609885 \\ 0,224220 \end{pmatrix}$$

Na pierwszy rzut oka można zauważyć, że siła krytyczna jest prawie taka sama, natomiast przemieszczenia węzłowe (postać wybożenia) różne. Jest to spowodowane założeniem nieskracalności elementu 3 (poprzez wykreślenie 7 wiersza i kolumny w globalnych macierzach sztywności i geometrycznej).

Jednak po głębszej analizie wyników można dostrzec że pozornie różne przemieszczenia w rezultacie dają prawie tę samą postać wybożenia, ponieważ relacje między największymi wartościami (obroty węzłowe) pozostają bardzo zbliżone mimo redukcji macierzy.

Układ z redukcją:

$$\frac{q_6}{q_3} = \frac{-0,324662}{0,224220} = -0,69063$$

Układ bez redukcji:

$$\frac{q_6}{q_3} = \frac{-0,69055}{1} = -0,69055$$

Zależną tą możemy uogólnić i stwierdzić, że jeżeli mamy do czynienia z układem w którym pole przemieszczeń wywołane jest przede wszystkim poprzez obroty węzłowe, to znaczy sztywność elementów na działanie sił wzdłuż ich osi jest zdecydowanie większa od sztywności elementu na działanie momentów węzłowych oraz warunki podparcia układu eliminują możliwość znaczących przesuwów węzłów, które mogłyby wpłynąć na jego stateczność to redukcja wyrazów w macierzy geometrycznej, a co za tym idzie macierzy sztywności niezwiązanych z kątami obrotów nie spowoduje znaczącego błędu w wyznaczeniu siły krytycznej.



Wyżej opisany problem przedstawiam poniżej w formie tabelarycznej.

Redukcja przemieszczenia (kierunek w układzie globalnym)	Liczba niewiadomych (liczba elementów w macierzy)	λ_{kr}	$\lambda_{kr}^{red} - \lambda_{kr}$	$\lambda_{kr}^{red} - \lambda_{kr}$ [%]	Przemieszczenia węzłowe	$\frac{q_6}{q_3}$	$\frac{q_6^{red}}{q_3^{red}} - \frac{q_6}{q_3}$	$\frac{q_6^{red}}{q_3^{red}} - \frac{q_6}{q_3}$ [%]
Bez redukcji	6 (36)	100,721	0,0000	0,0000	-0,004005616 -0,00646364 1 -0,00231781 0,018787 -0,690549	-0,69055	0,000	0,00000
7	5 (25)	100,730	0,0090	0,0089	-0,00055937 -0,00209795 0,324662 0 0,00609885 -0,224220	-0,69 063	0,00008	0,01158
7,4	4 (16)	100,736	0,0150	0,0149	0 -0,00385829 0,597193 0 0,0112176 -0,412470	-0,69068	0,00013	0,01900
7,4,5	3 (9)	100,793	0,0720	0,0715	0 0 1 0 0,0186984 -0,694231	-0,69423	0,00368	0,53291
7,4,5,8	2 (4)	101,117	0,3960	0,3932	0 0 -1 0 0 0,701767	-0,70177	0,01122	1,62479

Podsumowując, jeżeli chcemy w sposób przybliżony określić wartość siły krytycznej układu spełniającego warunki wcześniej podane, należy zbudować zredukowane macierze: sztywności i geometryczną w następujący sposób.



Zredukowana macierz sztywności:

$$\underline{K}^r = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2m} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \cdots & k_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n2} & \cdots & k_{nm} \end{bmatrix}$$

gdzie:

- n i m określają numery węzłów

Elementy macierzy \underline{K}^r obliczamy ze wzorów:

$$k_{nm} = \sum_{i=1}^j \left(\frac{4 \cdot (EJ)_i}{l_i} \right) \text{ dla } n = m$$

gdzie:

$(EJ)_i \rightarrow$ sztywność na zginanie prętów zbiegających się w węzle n ;

$(EJ)_i = 0$ jeżeli pręt jest połączony z węzłem przegubowo

$(EJ)_i = \frac{4}{3}(EJ)$ jeżeli pręt jest połączony z jakimkolwiek węzłem przegubowo

$l_i \rightarrow$ długość prętów zbiegających się w węzle n

$j \rightarrow$ ilość prętów zbiegających się w węzle n

$$k_{nm} = \frac{2 \cdot (EJ)_i}{l_i^2} \text{ dla } n \neq m$$

gdzie:

$(EJ)_i \rightarrow$ sztywność na zginanie prętów łączących węzły n i m ;

$(EJ)_i = 0$ jeżeli pręt jest połączony z jakimkolwiek węzłem przegubowo

$l_i \rightarrow$ długość prętów łączących węzły n i m

Zredukowana macierz geometryczna:

$$\underline{K}_g^r = \begin{bmatrix} k_{g11} & k_{g12} & k_{g13} & \cdots & k_{g1m} \\ k_{g21} & k_{g22} & k_{g23} & \cdots & k_{g2m} \\ k_{g31} & k_{g32} & k_{g33} & \cdots & k_{g3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{gn1} & k_{gn2} & k_{gn2} & \cdots & k_{gnm} \end{bmatrix}$$

gdzie:

- n i m określają numery węzłów

Elementy macierzy \underline{K}_g^r obliczamy ze wzorów:

$$k_{gnm} = \sum_{i=1}^j \left(\frac{4 \cdot N_i \cdot l_i}{30} \right) \text{ dla } n = m$$



gdzie:

$N_i \rightarrow$ siła normalna w prętach zbiegających się w węzle n

$l_i \rightarrow$ długość prętów zbiegających się w węzle n ;

$l_i = 0$ jeżeli pręt jest połączony z węzłem przegubowo

$l_i = \frac{3}{2}l_i$ jeżeli pręt jest połączony z jakimkolwiek węzłem przegubowo

$j \rightarrow$ ilość prętów zbiegających się w węzle n

$$k_{g_{nm}} = -\frac{N_i \cdot l_i}{30} \text{ dla } n \neq m$$

gdzie:

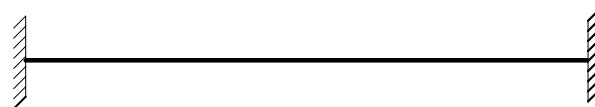
$N_i \rightarrow$ siła normalna w prętach łączących węzły n i m

$l_i \rightarrow$ długość prętów łączących węzły n i m ;

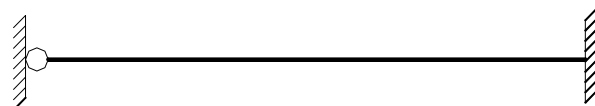
$l_i = 0$ jeżeli pręt jest połączony z jakimkolwiek węzłem przegubowo

Macierze \underline{K}^r oraz \underline{K}_g^r możemy również uzyskać poprzez agregacje zredukowanych elementowych macierzy w następującej postaci.

$$\underline{\tilde{K}}^r_{utwierdzenie} = \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} 4EJl^2 & 2EJl \\ 2EJl & 4EJl^2 \end{bmatrix}$$



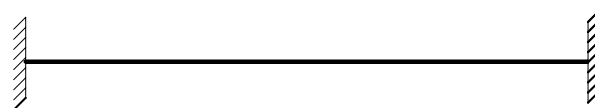
$$\underline{\tilde{K}}^r_{przegub-lewa} = \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3EJl^2 \end{bmatrix}$$



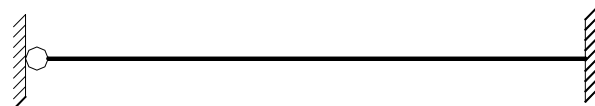
$$\underline{\tilde{K}}^r_{przegub-prawa} = \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} 3EJl^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



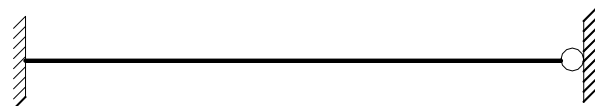
$$\underline{\tilde{K}}^r_{utwierdzenie} = \frac{N}{30l} \begin{bmatrix} 4l^2 & -l^2 \\ -l^2 & 4l^2 \end{bmatrix}$$



$$\underline{\tilde{K}}^r_{przegub-lewa} = \frac{N}{30l} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6l^2 \end{bmatrix}$$



$$\underline{\tilde{K}}^r_{przegub-prawa} = \frac{N}{30l} \begin{bmatrix} 6l^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Należy jednak pamiętać, że w tym wypadku jedynymi przemieszczeniami są kąty obrotu węzłów, więc wymiar macierzy po agregacji nie powinien przekraczać $[n \times n]$, gdzie n jest liczbą węzłów. Dużym udogodnieniem jest fakt, że dzięki tak skonstruowanym



macierzom elementowym możemy przeprowadzić agregację bez transformowania ich do układu globalnego, gdyż są one niezależne od przyjętego układu.

Ostatecznie rozwiązując problem własny zapisany w następujący sposób:

$$\left(\underline{K}^r - \bar{\lambda} \underline{K}_g^r\right) \cdot \underline{v}^r = \underline{0}$$

otrzymujemy przybliżone wartości $\bar{\lambda}$ oraz \underline{v}^r

Do dalszych rozważań przyjmuję przemieszczenia węzłowe uzyskane z pierwszego sposobu, gdyż jest on, mimo wszystko, najdokładniejszy.



Wyznaczenie postaci utraty stateczności

Wektor własny:

$$\underline{q}_0 = \begin{pmatrix} -0,004056165 \\ -0,00646364 \\ 1 \\ -0,00231781 \\ 0,018787 \\ -0,690549 \end{pmatrix}$$

Wektory przemieszczeń węzłowych dla poszczególnych elementów:

$$\underline{q}_{01} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0,004056165 \\ -0,00646364 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{q}_{02} = \begin{pmatrix} -0,004056165 \\ -0,00646364 \\ 1 \\ -0,00231781 \\ 0,018787 \\ -0,690549 \end{pmatrix} \quad \underline{q}_{03} = \begin{pmatrix} -0,00231781 \\ 0,018787 \\ -0,690549 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Uwaga: dla pręta pierwszego, w miejsce niepotrzebnego, wyeliminowanego kąta obrotu przy przegubie wstawiam wartość 1.

Transformacja wektora \underline{q}_{01} do układu lokalnego o kąt $\alpha = -90^\circ$ zgodnie z wzorem

$$\tilde{q}_{01} = T \cdot \underline{q}_{01}$$

gdzie T jest macierzą transformacji dla $\alpha = -90^\circ$

$$\tilde{q}_{01} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0,00646364 \\ -0,004056165 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zatem wektory przemieszczeń węzłowych w układzie lokalnym mają postać

$$\tilde{q}_{01} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0,00646364 \\ -0,004056165 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{q}_{02} = \begin{pmatrix} -0,004056165 \\ -0,00646364 \\ 1 \\ -0,00231781 \\ 0,018787 \\ -0,690549 \end{pmatrix} \quad \tilde{q}_{03} = \begin{pmatrix} -0,00231781 \\ 0,018787 \\ -0,690549 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Aby znaleźć przemieszczenia oraz kształt układu po wyboczeniu obliczam przemieszczenia w punktach w $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ oraz $\frac{2}{3}$ długości poszczególnych prętów korzystając z funkcji kształtu w następującej postaci.

Pręt obustronnie utwierdzony	Pręt z przegubem na lewym końcu
$N_1(\tilde{x}) = 1 - \frac{\tilde{x}}{l}$	$N_1(\tilde{x}) = 1 - \frac{\tilde{x}}{l}$
$N_2(\tilde{x}) = 1 - 3 \cdot \left(\frac{\tilde{x}}{l}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{\tilde{x}}{l}\right)^3$	$N_2(\tilde{x}) = 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{\tilde{x}}{l} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\tilde{x}}{l}\right)^3$
$N_3(\tilde{x}) = \tilde{x} \left[1 - 2 \cdot \frac{\tilde{x}}{l} + \left(\frac{\tilde{x}}{l}\right)^2 \right]$	$N_3(\tilde{x}) = 0$
$N_4(\tilde{x}) = \frac{\tilde{x}}{l}$	$N_4(\tilde{x}) = \frac{\tilde{x}}{l}$
$N_5(\tilde{x}) = 3 \cdot \left(\frac{\tilde{x}}{l}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{\tilde{x}}{l}\right)^3$	$N_5(\tilde{x}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\tilde{x}}{l} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\tilde{x}}{l}\right)^3$
$N_6(\tilde{x}) = \tilde{x} \left[-\frac{\tilde{x}}{l} + \left(\frac{\tilde{x}}{l}\right)^2 \right]$	$N_6(\tilde{x}) = \tilde{x} \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{x}}{l}\right)^2 \right]$

Położenie każdego punktu opisane jest wektorem $\underline{U}(\tilde{x}, t) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ równym

$$\underline{U}_{[2 \times 1]} = \underline{N}_{[2 \times 6]} \cdot \underline{\tilde{q}}_{[6 \times 1]}$$

gdzie macierz \underline{N}

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N_1(\tilde{x}) & 0 & 0 & N_4(\tilde{x}) & 0 & 0 \\ 0 & N_2(\tilde{x}) & N_3(\tilde{x}) & 0 & N_5(\tilde{x}) & N_6(\tilde{x}) \end{bmatrix}$$

a wektor $\underline{\tilde{q}}$ jest wektorem przemieszczeń lokalnych danego pręta



Po podstawieniu danych otrzymuję następujące macierze funkcji kształtu

Dla elementu pierwszego

$$\underline{N}^{(1)}\left(\tilde{x} = \frac{l}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0,6667 & 0,0000 & 0,0000 & 0,3333 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,5185 & 0,0000 & 0,0000 & 0,4815 & -0,5185 \end{pmatrix}$$

$$\underline{N}^{(1)}\left(\tilde{x} = \frac{l}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0,5000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,5000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,3125 & 0,0000 & 0,0000 & 0,6875 & -0,6563 \end{pmatrix}$$

$$\underline{N}^{(1)}\left(\tilde{x} = \frac{2}{3} \cdot l\right) = \begin{pmatrix} 0,3333 & 0,0000 & 0,0000 & 0,6667 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,1481 & 0,0000 & 0,0000 & 0,8519 & -0,6481 \end{pmatrix}$$

Dla elementu drugiego

$$\underline{N}^{(2)}\left(\tilde{x} = \frac{l}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0,6667 & 0,0000 & 0,0000 & 0,3333 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,7407 & 0,4444 & 0,0000 & 0,2593 & -0,2222 \end{pmatrix}$$

$$\underline{N}^{(2)}\left(\tilde{x} = \frac{l}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0,5000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,5000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,5000 & 0,3750 & 0,0000 & 0,5000 & -0,3750 \end{pmatrix}$$

$$\underline{N}^{(2)}\left(\tilde{x} = \frac{2}{3} \cdot l\right) = \begin{pmatrix} 0,3333 & 0,0000 & 0,0000 & 0,6667 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,2593 & 0,2222 & 0,0000 & 0,7407 & -0,4444 \end{pmatrix}$$

Dla elementu trzeciego

$$\underline{N}^{(3)}\left(\tilde{x} = \frac{l}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0,6667 & 0,0000 & 0,0000 & 0,3333 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,7407 & 0,5926 & 0,0000 & 0,2593 & -0,2963 \end{pmatrix}$$

$$\underline{N}^{(3)}\left(\tilde{x} = \frac{l}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0,5000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,5000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,5000 & 0,5000 & 0,0000 & 0,5000 & -0,5000 \end{pmatrix}$$

$$\underline{N}^{(3)}\left(\tilde{x} = \frac{2}{3} \cdot l\right) = \begin{pmatrix} 0,3333 & 0,0000 & 0,0000 & 0,6667 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,2593 & 0,2963 & 0,0000 & 0,7407 & -0,5926 \end{pmatrix}$$



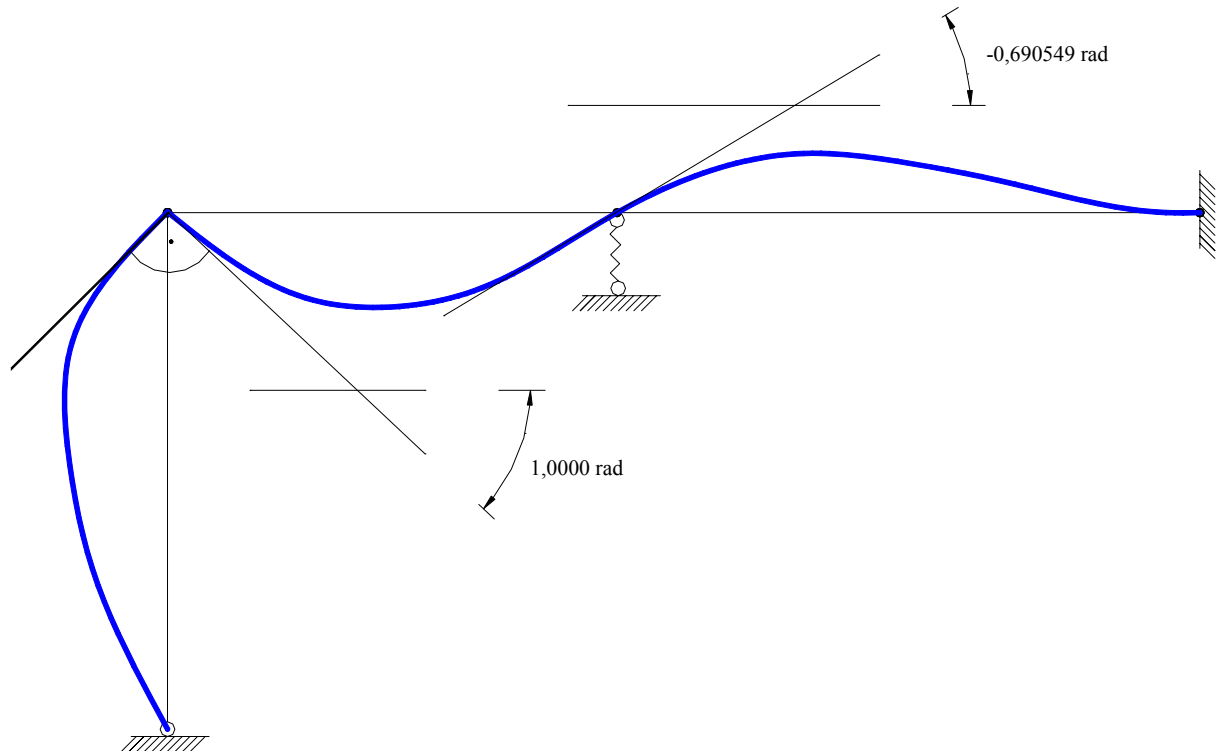
Ze wzoru $\underline{U} = \underline{N} \cdot \tilde{q}$ otrzymuję następujące wektory przemieszczeń punktów na poszczególnych prętach w układzie lokalnym

$$\underline{U}^{(1)}\left(\tilde{x} = \frac{l}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0,002 \\ -0,520 \end{pmatrix} \quad \underline{U}^{(1)}\left(\tilde{x} = \frac{l}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0,003 \\ -0,659 \end{pmatrix} \quad \underline{U}^{(1)}\left(\tilde{x} = \frac{2l}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0,004 \\ -0,652 \end{pmatrix}$$

$$\underline{U}^{(2)}\left(\tilde{x} = \frac{l}{3}\right) = \begin{pmatrix} -0,003 \\ 0,598 \end{pmatrix} \quad \underline{U}^{(2)}\left(\tilde{x} = \frac{l}{2}\right) = \begin{pmatrix} -0,003 \\ 0,640 \end{pmatrix} \quad \underline{U}^{(2)}\left(\tilde{x} = \frac{2l}{3}\right) = \begin{pmatrix} -0,003 \\ 0,541 \end{pmatrix}$$

$$\underline{U}^{(3)}\left(\tilde{x} = \frac{l}{3}\right) = \begin{pmatrix} -0,002 \\ -0,395 \end{pmatrix} \quad \underline{U}^{(3)}\left(\tilde{x} = \frac{l}{2}\right) = \begin{pmatrix} -0,001 \\ -0,336 \end{pmatrix} \quad \underline{U}^{(3)}\left(\tilde{x} = \frac{2l}{3}\right) = \begin{pmatrix} -0,001 \\ -0,200 \end{pmatrix}$$

Przemieszczenia poszczególnych punktów dają następującą postać utraty stateczności układu. Punkty zostały naniesione bez skalowania więc kąty obrotu nie są zniekształcone.

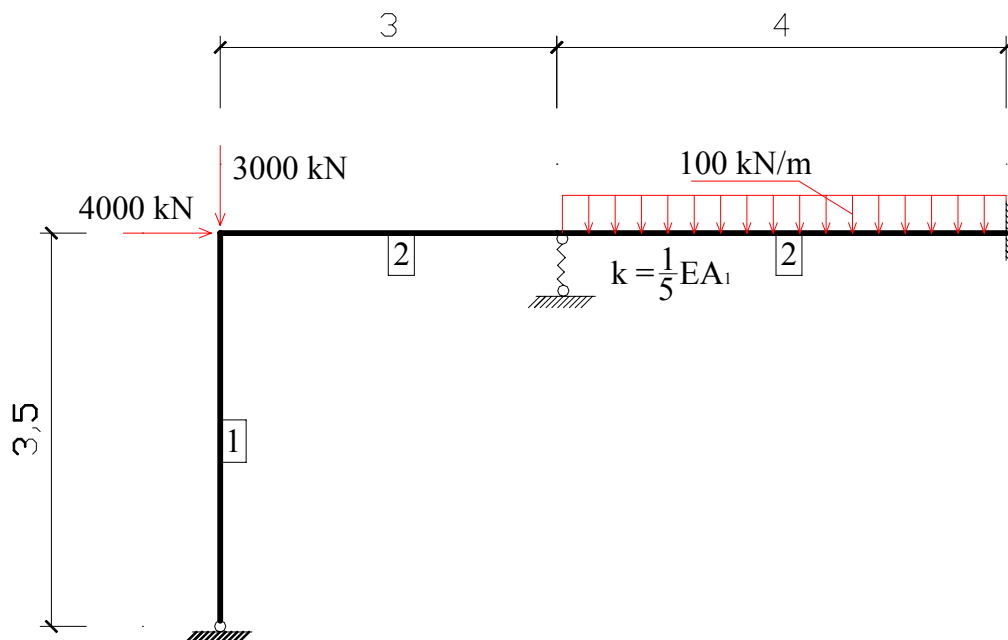




Obliczenie przemieszczeń wywołanych obciążeniem równym połowie obciążenia krytycznego z uwzględnieniem dodatkowego momentu od sił normalnych

Obciążenie krytyczne występuje dla mnożnika $\lambda_{kr} = 100,73$ zatem $0,5 \cdot \lambda_{kr} \approx 50$

Schemat obciążenia ramy siłami równymi $F^{0,5\lambda_{kr}} = 0,5 \cdot \lambda_{kr} \cdot F$:



Aby znaleźć przemieszczenie prętów układu należy najpierw znaleźć przemieszczenia węzłowe spełniające równanie:

$$(\underline{K} + \underline{K}_g) \cdot \underline{q} = \underline{R} - \underline{R}_0$$

gdzie:

- $\underline{K} \rightarrow$ macierz sztywności elementu
- $\underline{K}_g \rightarrow$ macierz geometryczna elementu
- $\underline{q} \rightarrow$ wektor przemieszczeń węzłowych
- $\underline{R} \rightarrow$ wektor sił węzłowych
- $\underline{R}_0 \rightarrow$ wektor reakcji węzłowych od obciążenia przeszłego

Macierz \underline{K} oraz macierze $\tilde{\underline{K}}_{(i)}$ nie są zależne od sił normalnych zatem są takie same jak zostały wyliczona przy okazji obliczania siły krytycznej.

Macierze geometryczne zarówno lokalne jak i globalną należy ponownie wyznaczyć z powodu jej zależności od sił normalnych w prętach układu.



Budowa macierzy geometrycznej

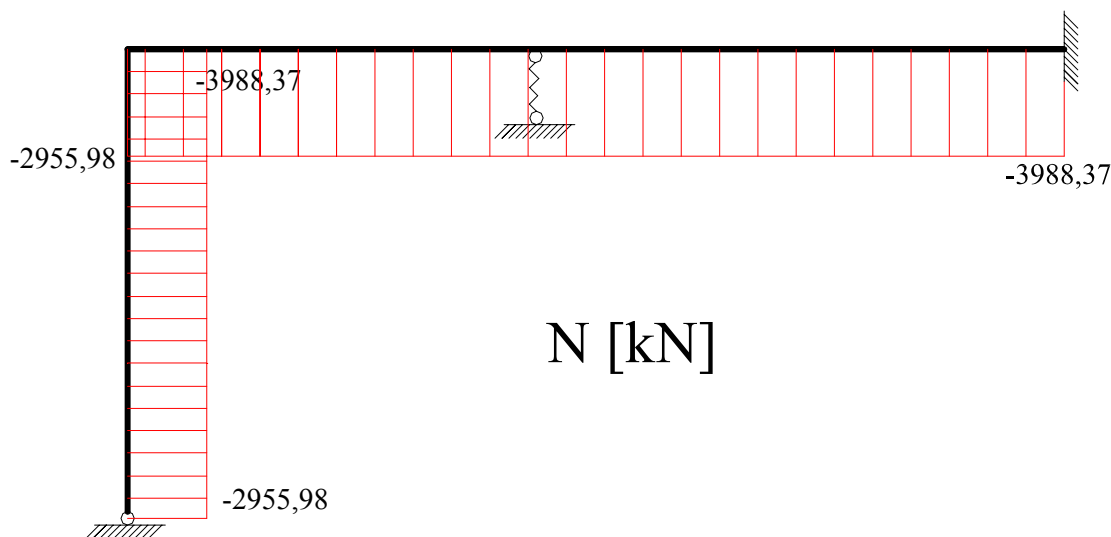
Dla elementu 1 korzystam z macierzy geometrycznej dla elementu z przegubem na lewym końcu.

$$\tilde{K}_{g(e)} = \frac{N}{30l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 & 0 & -36 & 6l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 0 & 0 & 36 & -6l \\ 0 & 6l & 0 & 0 & -6l & 6l^2 \end{pmatrix}$$

Dla elementów 2 i 3 korzystam z macierzy geometrycznej dla elementu obustronnie utwierdzonego.

$$\tilde{K}_{g(e)} = \frac{N}{30l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3l & 0 & -36 & 3l \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & -3l & -l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3l & 0 & 36 & -3l \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & -3l & 4l^2 \end{pmatrix}$$

Wykres sił osiowych dla obciążenia równego $F^{0,5\lambda_{kr}} = 0,5 \cdot \lambda_{kr} \cdot F$



zatem:

$$N_{(1)} = -2955980[N]$$

$$N_{(2)} = -3988370[N]$$

$$N_{(3)} = -3988370[N]$$



Po podstawieniu danych i wyliczeniu otrzymuję:

$$\tilde{K}_{g(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1013478 & 0 & 0 & 1013478 & -591196 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1013478 & 0 & 0 & -1013478 & 591196 \\ 0 & -591196 & 0 & 0 & 591196 & -2069186 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{K}_{g(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1595348 & -398837 & 0 & 1595348 & -398837 \\ 0 & -398837 & -1595348 & 0 & 398837 & 398837 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1595348 & 398837 & 0 & -1595348 & 398837 \\ 0 & -398837 & 398837 & 0 & 398837 & -1595348 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{K}_{g(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1196511 & -398837 & 0 & 1196511 & -398837 \\ 0 & -398837 & -2127130 & 0 & 398837 & 531782,6667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1196511 & 398837 & 0 & -1196511 & 398837 \\ 0 & -398837 & 531782,6667 & 0 & 398837 & -2127130 \end{pmatrix}$$

Transformacja macierzy geometrycznej dla elementu 1 do układu globalnego.
 Macierz transformacji dla $\alpha = -90^\circ$

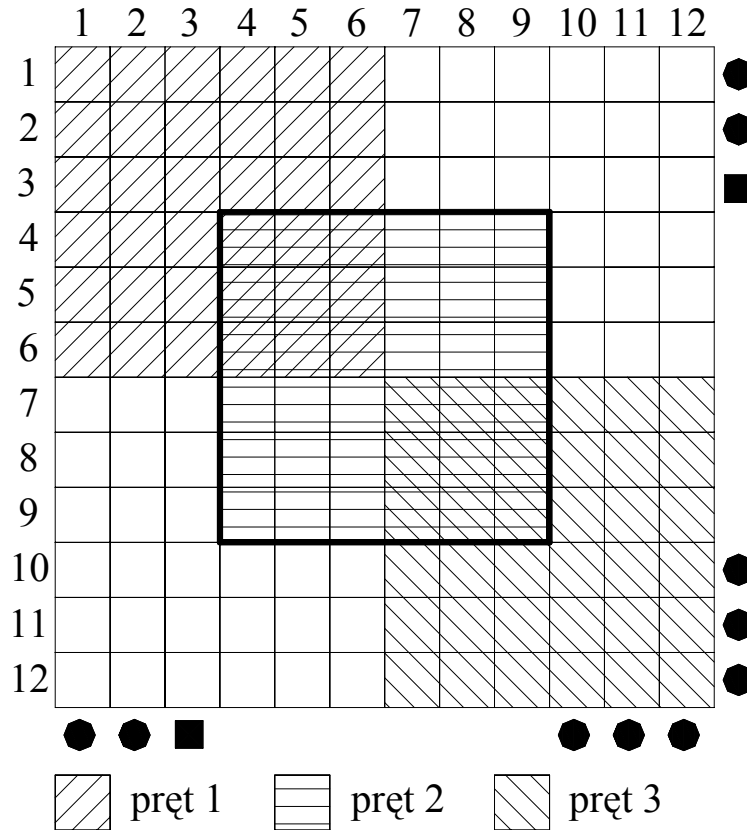
$$T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_{g(e)} = T^T \tilde{K}_{g(e)} T$$

$$K_{g(1)} = \begin{pmatrix} -1013479 & 0 & 0 & 1013479 & 0 & -591196 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1013479 & 0 & 0 & -1013479 & 0 & 591196 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -591196 & 0 & 0 & 591196 & 0 & -2069186 \end{pmatrix}$$



Agregacja macierzy geometrycznej



Wartości z pól nakładających się zostały dodane.

Po wykonaniu powyższych działań wykreślam 1,2,10,11,12-ty rząd i kolumnę (oznaczone kropką na rysunku powyżej), ponieważ z warunki podparcia eliminują możliwość przemieszczeń. Redukuje również 3 wiersz i kolumnę (oznaczoną kwadratem), gdyż do obliczeń macierzy geometrycznej elementu 1 wykorzystałem fakt istnienia przegubu na lewym jego końcu.

W rezultacie otrzymuje macierz wielkości 6x6 (zaznaczona wytłuszczoną linią na rysunku powyżej)

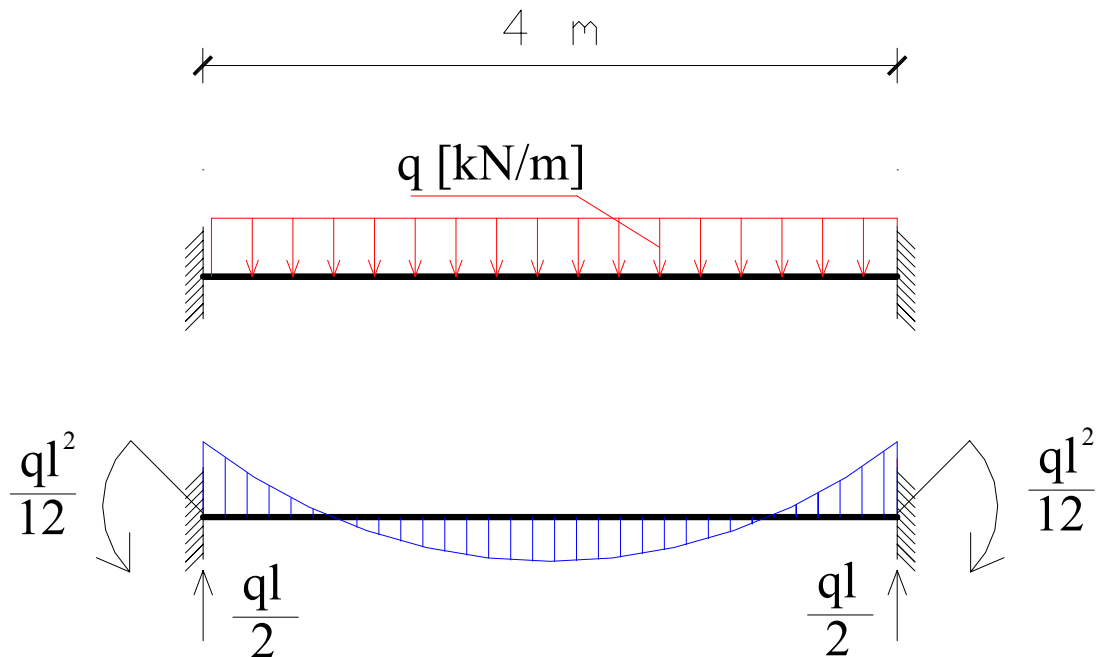
$$K_g = \begin{pmatrix} -1013478 & 0 & 591196 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1595348 & -398837 & 0 & 1595348 & -398837 \\ 591196 & -398837 & -3664534 & 0 & 398837 & 398837 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1595348 & 398837 & 0 & -2791859 & 0 \\ 0 & -398837 & 398837 & 0 & 0 & -3722478 \end{pmatrix}$$

Budowa wektora reakcji węzłowych R_0 wywołanych obciążeniem przeszłowym

Układ obciążony jest tylko jednym obciążeniem przeszłowym (element 3) więc sąsiednie węzły będą jedynymi, gdzie powstaną reakcje.



Aby wyznaczyć reakcje węzłowe w 3 elemencie wycinam go myślowo, traktuję jako obustronnie utwierdzony, obciążony zadaniem obciążeniem.



$$M_i = -\frac{100000 \cdot 4,0}{12} = -133333 [Nm] \rightarrow \text{znak “-” ponieważ kierunek reakcji jest przeciwny do założonego}$$

$$M_k = \frac{100000 \cdot 4,0}{12} = 133333 [Nm]$$

$$T_i = -\frac{100000 \cdot 4,0}{2} = -200000 [N]$$

$$T_k = -\frac{100000 \cdot 4,0}{2} = -200000 [N]$$

Wektory reakcji węzłowych w lokalnych układach współrzędnych

$$\underline{\tilde{R}}_{01} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\tilde{R}}_{02} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\tilde{R}}_{03} = \begin{pmatrix} 0 \\ -200000 \\ -133333 \\ 0 \\ -200000 \\ 133333 \end{pmatrix}$$

Wektory reakcji węzłowych od obciążenia przeszłowego w układzie lokalnym mają identyczną postać co w układzie globalnym, gdyż wektor

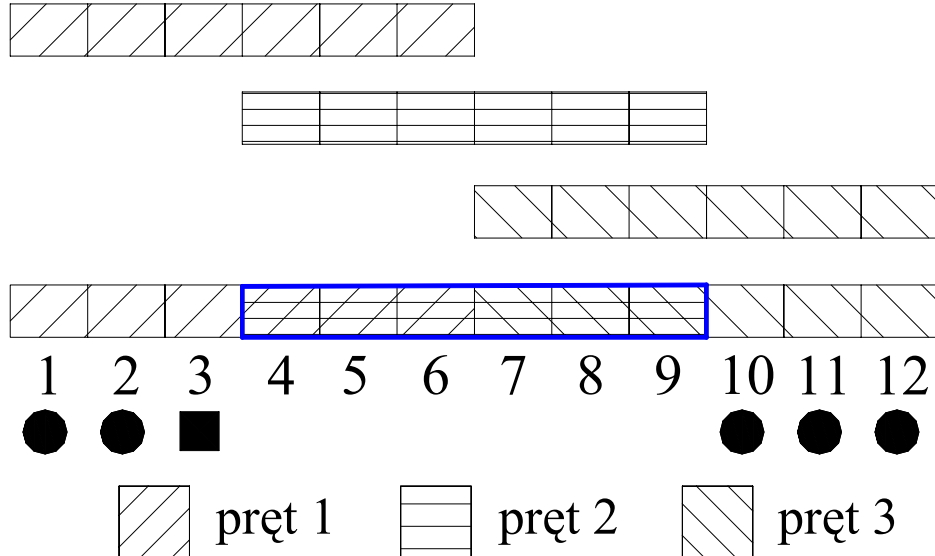
$$\underline{\tilde{R}}_{01} = \underline{R}_{01} = \underline{0}$$

a wektory $\underline{\tilde{R}}_{02}$ i $\underline{\tilde{R}}_{03}$ odpowiadają elementom, których osie układu lokalnego pokrywają się z układem globalnym.



Agregacja wektorów reakcji węzłowych od obciążenia przęsłowego

Agregację przeprowadzam zgodnie ze schematem poniżej.



Wartości z pól nakładających się zostały dodane.

Po wykonaniu powyższych działań wykreśliłem 1,2,10,11,12-tą kolumnę (oznaczone kropką na rysunku powyżej), ponieważ z warunki podparcia eliminują możliwość przemieszczeń. Redukuje również 3 wiersz i kolumnę (oznaczoną kwadratem), gdyż do obliczeń macierzy geometrycznej elementu 1 wykorzystałem fakt istnienia przegubu na lewym jego końcu.

W rezultacie otrzymuje wektor wielkości 6x1 (zaznaczona wytłuszczoną linią na rysunku powyżej)

$$\underline{R}_0^T = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & -200000 & -133333 \end{array} \right]$$

Budowa wektora sił węzłowych \underline{P}

Zgodnie ze wzorem:

$$\underline{P} = \underline{R} - \underline{R}_0$$

Układ obciążony jest tylko w jednym węźle siłami działającymi zgodnie z 4 i 5-tym kierunkiem przemieszczenia w układzie globalny, zatem:



$$\underline{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4000000 \\ 3000000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \underline{R}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -200000 \\ -133333 \\ 0 \\ -200000 \\ 133333 \end{pmatrix} = \underline{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4000000 \\ 3000000 \\ 0 \\ 0 \\ 200000 \\ 133333 \\ 0 \\ 200000 \\ -133333 \end{pmatrix}$$

Wszystkie wartości podane są w [N] oraz [Nm]

Po przeprowadzeniu redukcji w sposób analogiczny jak dla wektorów reakcji węzłowych wywołanych obciążeniem przeszłowym otrzymuję wektor:

$$\underline{R}^T = \begin{bmatrix} 4000000 & 3000000 & 0 & 0 & 200000 & 133333 \end{bmatrix}$$

Obliczenie wartości przemieszczeń wywołanych siłami $F_i^{0,5\lambda_{kr}} = 0,5 \cdot \lambda_{kr} \cdot F_i$

Po przekształceniu wzoru:

$$(\underline{K} + \underline{K}_g) \cdot \underline{q} = \underline{R} - \underline{R}_0$$

Otrzymuje równanie z którego bezpośrednio wyliczam przemieszczenia węzłowe

$$\underline{K}^* \cdot \underline{q} = \underline{P} \Leftrightarrow \underline{q} = (\underline{K}^*)^{-1} \cdot \underline{P}$$

gdzie:

$$\underline{K}^* = \begin{pmatrix} -1013478 & 0 & 591196 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1595348 & -398837 & 0 & 1595348 & -398837 \\ 591196 & -398837 & -3664534 & 0 & 398837 & 398837 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1595348 & 398837 & 0 & -2791859 & 0 \\ 0 & -398837 & 398837 & 0 & 0 & -3722478 \end{pmatrix}$$

jest sumą $\underline{K} + \underline{K}_g$

Równanie rozwiązuję korzystając z programu URL



Otrzymane przemieszczenia w układzie globalnym:

$$\underline{q} = \begin{pmatrix} 0,0347132 \\ 0,0183127 \\ -0,0162664 \\ 0,0198361 \\ 0,00159238 \\ 0,0129626 \end{pmatrix}$$

Wektory przemieszczeń węzłowych dla poszczególnych prętów

$$\underline{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0,0347132 \\ 0,0183127 \\ -0,0162664 \end{pmatrix} \quad \underline{q}_2 = \begin{pmatrix} 0,0347132 \\ 0,0183127 \\ -0,0162664 \\ 0,0198361 \\ 0,00159238 \\ 0,0129626 \end{pmatrix} \quad \underline{q}_3 = \begin{pmatrix} 0,0198361 \\ 0,00159238 \\ 0,0129626 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Uwaga: dla pręta pierwszego, w miejsce niepotrzebnego, wyeliminowanego kąta obrotu przy przegubie wstawiam wartość 1.

Transformacja wektora \underline{q}_1 do układu lokalnego o kąt $\alpha = -90^\circ$ zgodnie z wzorem

$$\tilde{\underline{q}}_1 = T \cdot \underline{q}_1$$

gdzie T jest macierzą transformacji dla $\alpha = -90^\circ$

$$\tilde{\underline{q}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0,0183127 \\ 0,0347132 \\ -0,0162664 \end{pmatrix}$$

Zatem wektory przemieszczeń węzłowych w układzie lokalnym mają postać

$$\tilde{\underline{q}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0,0183127 \\ 0,0347132 \\ -0,0162664 \end{pmatrix} \quad \tilde{\underline{q}}_2 = \begin{pmatrix} 0,0347132 \\ 0,0183127 \\ -0,0162664 \\ 0,0198361 \\ 0,00159238 \\ 0,0129626 \end{pmatrix} \quad \tilde{\underline{q}}_3 = \begin{pmatrix} 0,0198361 \\ 0,00159238 \\ 0,0129626 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Aby znaleźć przemieszczenia oraz kształt układu pod zadaniem obciążeniem obliczam przemieszczenia w punktach w $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ oraz $\frac{2}{3}$ długości poszczególnych prętów korzystając z funkcji kształtu w następującej postaci.

Pręt obustronnie utwierdzony	Pręt z przegubem na lewym końcu
$N_1(\tilde{x}) = 1 - \frac{\tilde{x}}{l}$	$N_1(\tilde{x}) = 1 - \frac{\tilde{x}}{l}$
$N_2(\tilde{x}) = 1 - 3 \cdot \left(\frac{\tilde{x}}{l}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{\tilde{x}}{l}\right)^3$	$N_2(\tilde{x}) = 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{\tilde{x}}{l} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\tilde{x}}{l}\right)^3$
$N_3(\tilde{x}) = \tilde{x} \left[1 - 2 \cdot \frac{\tilde{x}}{l} + \left(\frac{\tilde{x}}{l}\right)^2 \right]$	$N_3(\tilde{x}) = 0$
$N_4(\tilde{x}) = \frac{\tilde{x}}{l}$	$N_4(\tilde{x}) = \frac{\tilde{x}}{l}$
$N_5(\tilde{x}) = 3 \cdot \left(\frac{\tilde{x}}{l}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{\tilde{x}}{l}\right)^3$	$N_5(\tilde{x}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\tilde{x}}{l} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\tilde{x}}{l}\right)^3$
$N_6(\tilde{x}) = \tilde{x} \left[-\frac{\tilde{x}}{l} + \left(\frac{\tilde{x}}{l}\right)^2 \right]$	$N_6(\tilde{x}) = \tilde{x} \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{x}}{l}\right)^2 \right]$

Położenie każdego punktu opisane jest wektorem $\underline{U}(\tilde{x}, t) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ równym

$$\underline{U}_{[2 \times 1]} = \underline{N}_{[2 \times 6]} \cdot \tilde{\underline{q}}_{[6 \times 1]}$$

gdzie macierz \underline{N}

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N_1(\tilde{x}) & 0 & 0 & N_4(\tilde{x}) & 0 & 0 \\ 0 & N_2(\tilde{x}) & N_3(\tilde{x}) & 0 & N_5(\tilde{x}) & N_6(\tilde{x}) \end{bmatrix}$$

a wektor $\tilde{\underline{q}}$ jest wektorem przemieszczeń lokalnych danego pręta



Po podstawieniu danych otrzymuję następujące macierze funkcji kształtu

Dla elementu pierwszego

$$\underline{N}^{(1)}\left(\tilde{x} = \frac{l}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0,6667 & 0,0000 & 0,0000 & 0,3333 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,5185 & 0,0000 & 0,0000 & 0,4815 & -0,5185 \end{pmatrix}$$

$$\underline{N}^{(1)}\left(\tilde{x} = \frac{l}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0,5000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,5000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,3125 & 0,0000 & 0,0000 & 0,6875 & -0,6563 \end{pmatrix}$$

$$\underline{N}^{(1)}\left(\tilde{x} = \frac{2}{3} \cdot l\right) = \begin{pmatrix} 0,3333 & 0,0000 & 0,0000 & 0,6667 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,1481 & 0,0000 & 0,0000 & 0,8519 & -0,6481 \end{pmatrix}$$

Dla elementu drugiego

$$\underline{N}^{(2)}\left(\tilde{x} = \frac{l}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0,6667 & 0,0000 & 0,0000 & 0,3333 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,7407 & 0,4444 & 0,0000 & 0,2593 & -0,2222 \end{pmatrix}$$

$$\underline{N}^{(2)}\left(\tilde{x} = \frac{l}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0,5000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,5000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,5000 & 0,3750 & 0,0000 & 0,5000 & -0,3750 \end{pmatrix}$$

$$\underline{N}^{(2)}\left(\tilde{x} = \frac{2}{3} \cdot l\right) = \begin{pmatrix} 0,3333 & 0,0000 & 0,0000 & 0,6667 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,2593 & 0,2222 & 0,0000 & 0,7407 & -0,4444 \end{pmatrix}$$

Dla elementu trzeciego

$$\underline{N}^{(3)}\left(\tilde{x} = \frac{l}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0,6667 & 0,0000 & 0,0000 & 0,3333 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,7407 & 0,5926 & 0,0000 & 0,2593 & -0,2963 \end{pmatrix}$$

$$\underline{N}^{(3)}\left(\tilde{x} = \frac{l}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0,5000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,5000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,5000 & 0,5000 & 0,0000 & 0,5000 & -0,5000 \end{pmatrix}$$

$$\underline{N}^{(3)}\left(\tilde{x} = \frac{2}{3} \cdot l\right) = \begin{pmatrix} 0,3333 & 0,0000 & 0,0000 & 0,6667 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,2593 & 0,2963 & 0,0000 & 0,7407 & -0,5926 \end{pmatrix}$$



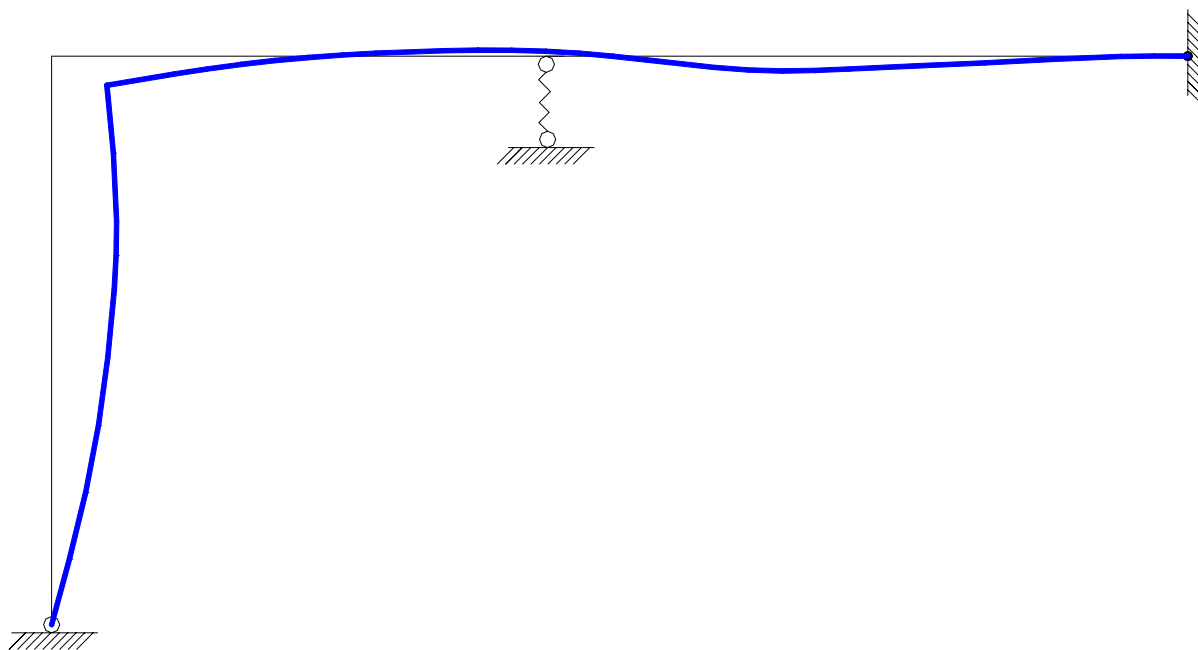
Ze wzoru $\underline{U} = \underline{N} \cdot \tilde{\underline{q}}$ otrzymuję następujące wektory przemieszczeń punktów na poszczególnych prętach w układzie lokalnym

$$\underline{U}^{(1)}\left(\tilde{x} = \frac{l}{3}\right) = \begin{pmatrix} -0,006 \\ 0,025 \end{pmatrix} \quad \underline{U}^{(1)}\left(\tilde{x} = \frac{l}{2}\right) = \begin{pmatrix} -0,009 \\ 0,035 \end{pmatrix} \quad \underline{U}^{(1)}\left(\tilde{x} = \frac{2l}{3}\right) = \begin{pmatrix} -0,012 \\ 0,040 \end{pmatrix}$$

$$\underline{U}^{(2)}\left(\tilde{x} = \frac{l}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0,030 \\ 0,004 \end{pmatrix} \quad \underline{U}^{(2)}\left(\tilde{x} = \frac{l}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0,027 \\ -0,001 \end{pmatrix} \quad \underline{U}^{(2)}\left(\tilde{x} = \frac{2l}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0,025 \\ -0,003 \end{pmatrix}$$

$$\underline{U}^{(3)}\left(\tilde{x} = \frac{l}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0,013 \\ 0,009 \end{pmatrix} \quad \underline{U}^{(3)}\left(\tilde{x} = \frac{l}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0,010 \\ 0,007 \end{pmatrix} \quad \underline{U}^{(3)}\left(\tilde{x} = \frac{2l}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0,007 \\ 0,004 \end{pmatrix}$$

Przemieszczenia poszczególnych punktów dają następującą postać przemieszczenia układu. Punkty zostały naniesione przez skalowanie więc kąty obrotu są zniekształcone.





Obliczenie sił przekrojowych wywołanych obciążeniem $F_i^{0,5\lambda_{kr}} = 0,5 \cdot \lambda_{kr} \cdot F_i$

Siły przekrojowe przywęzłowe obliczam zgodnie ze wzorem:

$$\underline{\tilde{R}}^{(i)} = \left(\underline{\tilde{K}}^{(i)} + \underline{\tilde{K}}_g^{(i)} \right) \cdot \underline{\tilde{q}}^{(i)} + \underline{\tilde{R}}_0^{(i)}$$

$$\underline{\tilde{R}}^{(i)} = \underline{\tilde{K}}^{*(i)} \cdot \underline{\tilde{q}}^{(i)} + \underline{\tilde{R}}_0^{(i)}$$

Obliczenie macierzy $\underline{\tilde{K}}^{*(i)} = \underline{\tilde{K}}^{(i)} + \underline{\tilde{K}}_g^{(i)}$

Po zsumowaniu elementowych macierzy sztywności i elementowych macierzy geometrycznych otrzymuję:

$$\underline{\tilde{K}}^{*(1)} = \begin{pmatrix} 163414285 & 0 & 0 & -163414285 & 0 & 0 \\ 0 & -805490,51 & 0 & 0 & 805490,519 & 136763,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -163414285 & 0 & 0 & 163414285,7 & 0 & 0 \\ 0 & 805490,51 & 0 & 0 & -805490,519 & -136763 \\ 0 & 136763,18 & 0 & 0 & -136763,1837 & 478671,1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\tilde{K}}^{*(2)} = \begin{pmatrix} 270600000 & 0 & 0 & -270600000 & 0 & 0 \\ 0 & 1192652 & 3783163 & 0 & -1192652 & 3783163 \\ 0 & 3783163 & 6768652 & 0 & -3783163 & 4580837 \\ -270600000 & 0 & 0 & 270600000 & 0 & 0 \\ 0 & -1192652 & -3783163 & 0 & 1192652 & -3783163 \\ 0 & 3783163 & 4580837 & 0 & -3783163 & 6768652 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\tilde{K}}^{*(3)} = \begin{pmatrix} 202950000 & 0 & 0 & -202950000 & 0 & 0 \\ 0 & -20323,5 & 1953538 & 0 & 20323,5 & 1953538 \\ 0 & 1953538 & 4145869,333 & 0 & -1953538 & 3668283 \\ -202950000 & 0 & 0 & 202950000 & 0 & 0 \\ 0 & 20323,5 & -1953538 & 0 & -20323,5 & -1953538 \\ 0 & 1953538 & 3668282,667 & 0 & -1953538 & 4145869 \end{pmatrix}$$

Po przemnożeniu powyższych macierzy z wektorami lokalnych przemieszczeń węzłowych oraz dodaniu reakcji węzłowych od obciążenia przeszłego, zgodnie ze wzorem:

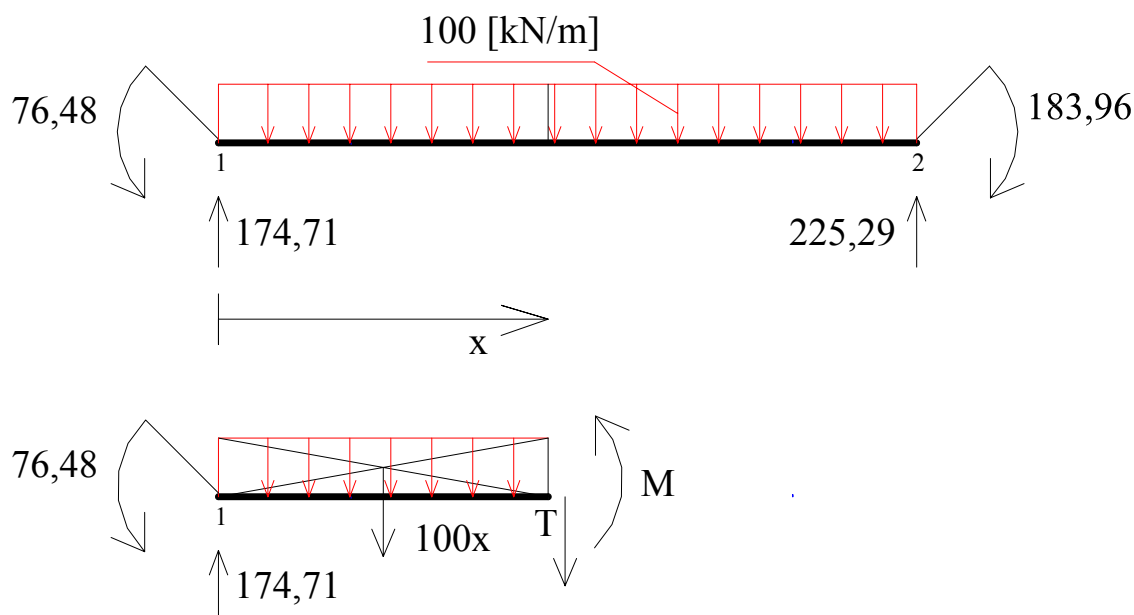
$$\underline{\tilde{R}}^{(i)} = \underline{\tilde{K}}^{*(i)} \cdot \underline{\tilde{q}}^{(i)} + \underline{\tilde{R}}_0^{(i)}$$



otrzymuję następujące wektory reakcji węzłowych w układach lokalnych (wartości podane są w kN i kNm):

$$\underline{R}_1 = \begin{pmatrix} 2992,557 \\ 25,737 \\ 0,000 \\ -2992,557 \\ -25,737 \\ -12,534 \end{pmatrix} \quad \underline{R}_2 = \begin{pmatrix} 4025,743 \\ 7,443 \\ 12,534 \\ -4025,743 \\ -7,443 \\ 76,481 \end{pmatrix} \quad \underline{R}_3 = \begin{pmatrix} 4025,736 \\ -174,709 \\ -76,481 \\ -4025,736 \\ -225,291 \\ 183,995 \end{pmatrix}$$

Dla elementu 3 przebieg sił tnących oraz momentów zginających znajduję z równań równowagi (pręt obciążony obciążeniem równomiernie rozłożonym)



$$\sum X = 0 \Leftrightarrow 174,71 - 100x = T(x)$$

$$\sum M_x = 0 \Leftrightarrow M_x = -76,48 + 174,71x - 100 \frac{x^2}{2}$$

$$M(2) = 72,94$$

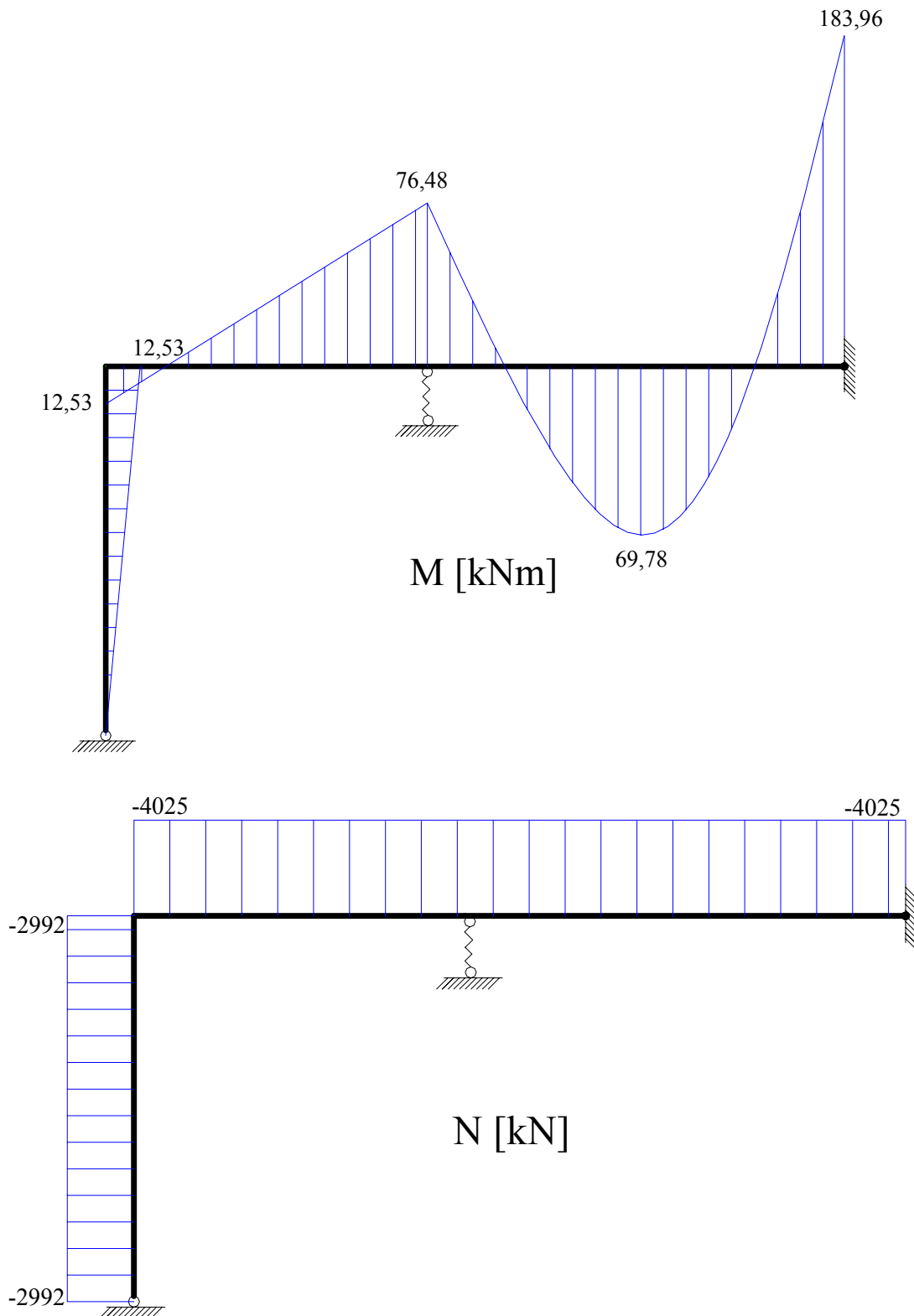
$$M(4) = -177,64$$

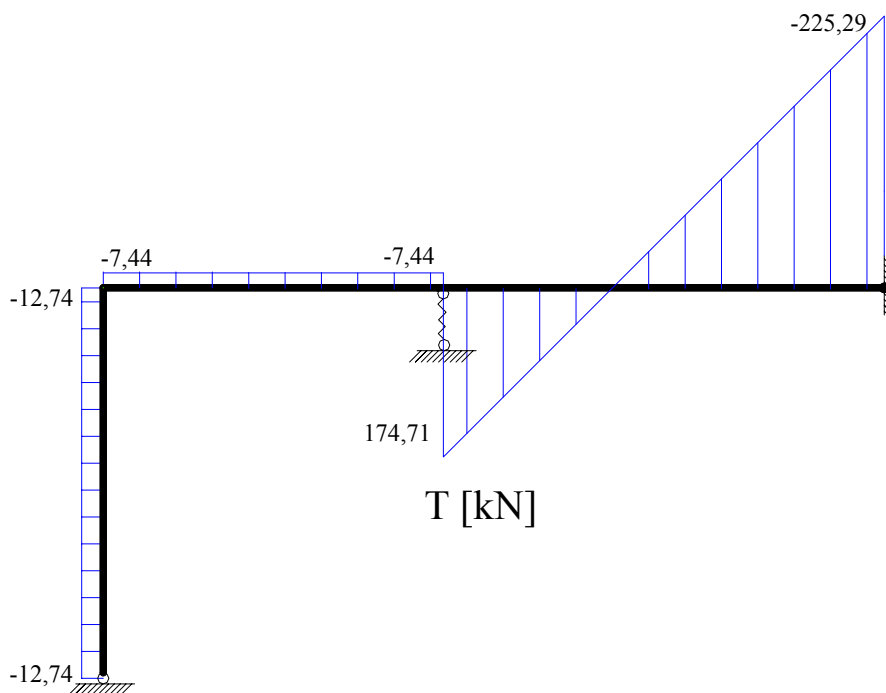
Można zauważyć, że wyznaczona przeze mnie funkcja przebiegu momentów zginających nie jest poprawna, gdyż nie spełnia warunków brzegowych ($M(4) \neq -183,96 [kNm]$). Jest to spowodowane nieuwzględnieniem dodatkowego momentu od działania siły N na mimośródzie powstałym po ugięciu pręta. W dalszych obliczeniach przyjmuje wykres momentów w tym elemencie jako superpozycję: liniowego, spełniającego warunki brzegowe, oraz paraboli powstałej od obciążenia ciągłego. Analogicznie postępuje z pozostałymi elementami. Należy jednak pamiętać, że to uproszczenie sprowadza funkcje



momentu do funkcji kwadratowej lub liniowej, a tnących do funkcji liniowej, a co za tym idzie nie odzwierciedla poprawnie tych wartości w przeszle.

Wykresy sił przekrojowych:





Porównanie sił normalnych w prętach z rozwiązania statycznego oraz po pierwszej iteracji (uwzględnienie dodatkowych momentów od sił normalnych)

Numer pręta	N^{stat} (statyka) [kN]	N^I (I iteracja) [kN]	$N^I - N^{stat}$ [kN]	$N^I - N^{stat}$ [%]
1	-2955	-2992	-37	1,25
2	-3988	-4025	-37	0,93
3	-3988	-4025	-37	0,93