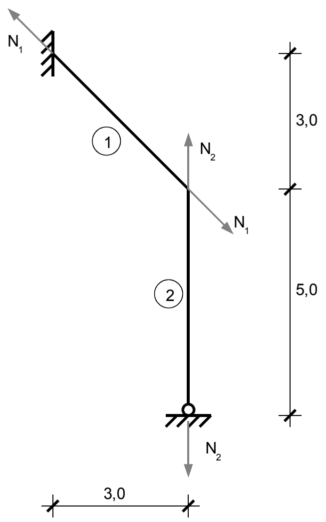
POLITECHNIKA POZNAŃSKA
Instytut Konstrukcji Budowlanych
Zakład Mechaniki Budowli

15.11.05

STATECZNOŚĆ UKŁADÓW PRĘTOWYCH– WERSJA KOMPUTEROWA

<u>Zadanie:</u> Dla układu jak na rys.1. należy wyznaczyć wartość obciążenia krytycznego.



Rys. 1. Zadana rama

Dane:

$$N_1 = \lambda \cdot (-8{,}183)\,kN = \lambda \cdot (-8183)\,N$$

$$N_2 = \lambda \cdot (-106{,}1)\,kN = \lambda \cdot (-106100)\,N$$

E=205 GPa = $205 \cdot 10^9$ Pa

przekrój : I 260

Określenie charakterystyk prętów:

Pręt	*długość L* *[m]*	*Moduł sprężystości E* *[Pa]*	*Wskaźnik wytrzymałości I* *[m^4]*	*Pole powierzchni A* *[m^2]*
1	$3\sqrt{2}$	$205 \cdot 10^9$	$5740 \cdot 10^{-8}$	$53{,}4 \cdot 10^{-4}$
2	5	$205 \cdot 10^9$	$5740 \cdot 10^{-8}$	$53{,}4 \cdot 10^{-4}$

W zadaniach stateczności zajmować będziemy się wyłącznie układami obciążonymi siłami osiowymi!

W celu określenia wartości obciążenia krytycznego należy rozwiązać układ równań w postaci macierzowej:

$$([K]+\lambda[K_g])q=0 \tag{\#.1}$$

Zadanie sprowadzi się do rozwiązania problemu własnego.

W celu prawidłowego rozwiązania przy pomocy programu UPW równanie #.1 przekształcamy do postaci:

$$([K_G]-\bar{\lambda}[K])q=0 \tag{\#.2}$$

gdzie:

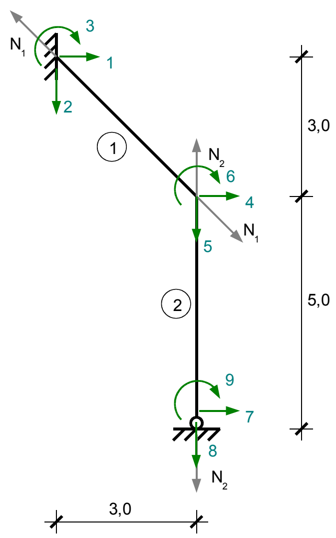
$$\bar{\lambda}=\frac{-1}{\lambda} \tag{\#.3}$$

Należy zatem określić macierze sztywności oraz macierze geometryczne elementów, a następnie zagregować globalne macierze dla całego układu.

Podział 1-1r

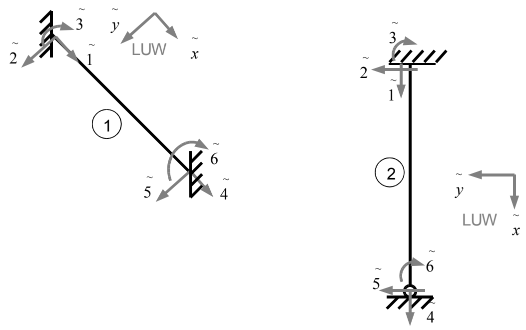
Każdy pręt będziemy traktować jako jeden element. Wykorzystamy ponadto proces redukcji statycznej przy wyznaczaniu macierzy sztywności oraz macierzy geometrycznej układu.

Dla układu globalnego przyjmiemy przemieszczenia węzłowe jak na rysunku 2.:



Rys. 2. Przemieszczenia węzłowe

W celu wyznaczenia macierzy sztywności oraz macierzy geometrycznych należało przyjąć układy lokalne dla poszczególnych prętów:



Rys. 3. Lokalne przemieszczenia węzłowe

Macierze sztywności poszczególnych prętów w układach lokalnych i globalnych mają postać:

a) pręt 1

$[\tilde{K}_{e1}]$

258023264,45	0	0	-258023264,45	0	0
0	1849005,67	3922333,33	0	-1849005,67	3922333,33
0	3922333,33	11094033,99	0	-3922333,33	5547017
-258023264,45	0	0	258023264,45	0	0
0	-1849005,67	-3922333,33	0	1849005,67	-3922333,33
0	3922333,33	5547017	0	-3922333,33	11094033,99

$\alpha = 45^o$ [T]

0,71	0,71	0	0	0	0
-0,71	0,71	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0,71	0,71	0
0	0	0	-0,71	0,71	0
0	0	0	0	0	1

Zgodnie z prawem transformacji:

$$[K^{(e)}] = [T]^T \cdot \tilde{K}^{(e)} \cdot [T] \tag{\#.5}$$

Zatem: $[K_{e1}]$

129936135,06	128087129,39	-2773508,5	-129936135,06	-128087129,39	-2773508,5
128087129,39	129936135,06	2773508,5	-128087129,39	-129936135,06	2773508,5
-2773508,5	2773508,5	11094033,99	2773508,5	-2773508,5	5547017
-129936135,06	-128087129,39	2773508,5	129936135,06	128087129,39	2773508,5
-128087129,39	-129936135,06	-2773508,5	128087129,39	129936135,06	-2773508,5
-2773508,5	2773508,5	5547017	2773508,5	-2773508,5	11094033,99

b) pręt 2

$[\tilde{K}_{e2}]$

218940000	0	0	-218940000	0	0
0	282408	1412040	0	-282408	0
0	1412040	7060200	0	-1412040	0
-218940000	0	0	218940000	0	0
0	-282408	-1412040	0	282408	0
0	0	0	0	0	0

$\alpha = 90^o$ [T]

0	1	0	0	0	0
-1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	-1	0	0
0	0	0	0	0	1

Zgodnie z prawem transformacji:

$[K_{e2}]$

282408	0	-1412040	-282408	0	0
0	218940000	0	0	-218940000	0
-1412040	0	7060200	1412040	0	0
-282408	0	1412040	282408	0	0
0	-218940000	0	0	218940000	0
0	0	0	0	0	0

W celu określenia wartości wyrazów macierzy geometrycznych należy w pierwszej kolejności określić wartości sił normalnych dla poszczególnych prętów od zadanego obciążenia. Z danych:

$$N_1 = -8183\ N$$

$$N_2 = -106100\ N$$

Macierze geometryczne poszczególnych prętów w układach lokalnych i globalnych mają postać:
a) pręt 1

$[\tilde{K}_{Ge1}]$

0	0	0	0	0	0
0	-2314,5	-818,3	0	2314,5	-818,3
0	-818,3	-4629	0	818,3	1157,25
0	0	0	0	0	0
0	2314,5	818,3	0	-2314,5	818,3
0	-818,3	1157,25	0	818,3	-4629

$\alpha = 45^o$ [T]

0,71	0,71	0	0	0	0
-0,71	0,71	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0,71	0,71	0
0	0	0	-0,71	0,71	0
0	0	0	0	0	1

Z prawa transformacji #.5 otrzymam:

$[K_{Ge1}]$

-1157,25	1157,25	578,63	1157,25	-1157,25	578,63
1157,25	-1157,25	-578,63	-1157,25	1157,25	-578,63
578,63	-578,63	-4629	-578,63	578,63	1157,25
1157,25	-1157,25	-578,63	-1157,25	1157,25	-578,63
-1157,25	1157,25	578,63	1157,25	-1157,25	578,63
578,63	-578,63	1157,25	-578,63	578,63	-4629

b) pręt 2

$[\tilde{K}_{Ge2}]$

0	0	0	0	0	0
0	-25464	-21220	0	25464	0
0	-21220	-106100	0	21220	0
0	0	0	0	0	0
0	25464	21220	0	-25464	0
0	0	0	0	0	0

$\alpha = 90^o$

[T]

0	1	0	0	0	0
-1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	-1	0	0
0	0	0	0	0	1

Z prawa transformacji #.5 otrzymam:

$[K_{Ge2}]$

-25464	0	21220	25464	0	0
0	0	0	0	0	0
21220	0	-106100	-21220	0	0
25464	0	-21220	-25464	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Tabela powiązań dla zadanego układu ma postać:

pręt	*Nr przemieszczenia w układzie lokalnym*					
	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	4	5	6	7	8	9

Wykonując agregację otrzymam globalną macierz sztywności w postaci:

$[K]$

129936135,06	128087129,39	-2773508,5	-129936135,06	-128087129,39	-2773508,5	0	0	0
128087129,39	129936135,06	2773508,5	-128087129,39	-129936135,06	2773508,5	0	0	0
-2773508,5	2773508,5	11094033,99	2773508,5	-2773508,5	5547017	0	0	0
-129936135,06	-128087129,39	2773508,5	130218543,06	128087129,39	1361468,5	-282408	0	0
-128087129,39	-129936135,06	-2773508,5	128087129,39	348876135,06	-2773508,5	0	-218940000	0
-2773508,5	2773508,5	5547017	1361468,5	-2773508,5	18154233,99	1412040	0	0
0	0	0	-282408	0	1412040	282408	0	0
0	0	0	0	-218940000	0	0	218940000	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

oraz globalną macierz geometryczną w postaci: $[K_G]$

-1157,25	1157,25	578,63	1157,25	-1157,25	578,63	0	0	0
1157,25	-1157,25	-578,63	-1157,25	1157,25	-578,63	0	0	0
578,63	-578,63	-4629	-578,63	578,63	1157,25	0	0	0
1157,25	-1157,25	-578,63	-26621,25	1157,25	20641,37	25464	0	0
-1157,25	1157,25	578,63	1157,25	-1157,25	578,63	0	0	0
578,63	-578,63	1157,25	20641,37	578,63	-110729	-21220	0	0
0	0	0	25464	0	-21220	-25464	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

Po wykonaniu agregacji macierzy [K] i [K_G] należy uwzględnić warunki brzegowe:

$q_1 = q_2 = q_3 = q_7 = q_8$ (zerowe przemieszczenia w miejscach podpór)

$q_9 = 0$ (redukcja statyczna)

W wyniku otrzymamy macierz sztywności i macierz geometryczną jak niżej:

[K]

130218543,06	128087129,39	1361468,5
128087129,39	348876135,06	-2773508,5
1361468,5	-2773508,5	18154233,99

[K_G]

-26621,25	1157,25	20641,37
1157,25	-1157,25	578,63
20641,37	578,63	-110729

Powyższe postaci [K] i [K_G] należy uwzględnić w równaniu #.2. Rozwiązaniem tego równania będą wartości wartości własne oraz odpowiadające im wektory własne. Obliczenia wykonano wykorzystując program UPW.

Otrzymano następujące wyniki:

Wartości własne:

Nr przemieszczenia	$\bar{\lambda}$	λ
1	-2,96E-006	337506,03
2	-2,82E-004	3549,72
3	-6,25E-003	160,1

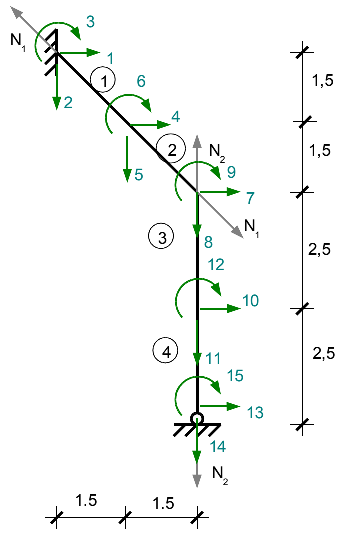
W zadaniu, jako że poszukujemy najmniejszego obciążenia krytycznego, interesować nas będzie najmniejsza wartość własna :

$$\lambda_{kr} = 160{,}1$$

PODZIAŁ 2-2r

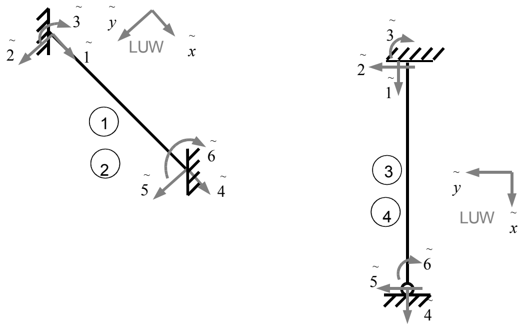
Analogiczny tok rozwiązania przeprowadzimy teraz, dzieląc każdy z prętów na 2 elementy. Ponownie przy wyznaczaniu macierzy sztywności oraz macierzy geometrycznej zastosujemy redukcję statyczną.

Dla układu globalnego przyjmiemy przemieszczenia węzłowe jak na rysunku 4.:



Rys. 4. Przemieszczenia węzłowe

W celu wyznaczenia macierzy sztywności oraz macierzy geometrycznych należało przyjąć układy lokalne dla poszczególnych prętów:



Rys. 5. Lokalne przemieszczenia węzłowe

Macierze sztywności poszczególnych prętów w układach lokalnych i globalnych mają postać:
a) pręt 1

$$[\tilde{K}_{el}]$$

516046528,91	0	0	-516046528,91	0	0
0	14792045,32	15689333,33	0	-14792045,32	15689333,33
0	15689333,33	22188067,98	0	-15689333,33	11094033,99
-516046528,91	0	0	516046528,91	0	0
0	-14792045,32	-15689333,33	0	14792045,32	-15689333,33
0	15689333,33	11094033,99	0	-15689333,33	22188067,98

$\alpha = 45^o$

[T]

0,71	0,71	0	0	0	0
-0,71	0,71	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0,71	0,71	0
0	0	0	-0,71	0,71	0
0	0	0	0	0	1

Zgodnie z prawem transformacji #.5

$[K_{e1}]$

265419287,12	250627241,79	-11094033,99	-265419287,12	-250627241,79	-11094033,99
250627241,79	265419287,12	11094033,99	-250627241,79	-265419287,12	11094033,99
-11094033,99	11094033,99	22188067,98	11094033,99	-11094033,99	11094033,99
-265419287,12	-250627241,79	11094033,99	265419287,12	250627241,79	11094033,99
-250627241,79	-265419287,12	-11094033,99	250627241,79	265419287,12	-11094033,99
-11094033,99	11094033,99	11094033,99	11094033,99	-11094033,99	22188067,98

b) pręt 2

$[\tilde{K}_{e2}]$

516046528,91	0	0	-516046528,91	0	0
0	14792045,32	15689333,33	0	-14792045,32	15689333,33
0	15689333,33	22188067,98	0	-15689333,33	11094033,99
-516046528,91	0	0	516046528,91	0	0
0	-14792045,32	-15689333,33	0	14792045,32	-15689333,33
0	15689333,33	11094033,99	0	-15689333,33	22188067,98

$\alpha = 45^o$

[T]

0,71	0,71	0	0	0	0
-0,71	0,71	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0,71	0,71	0
0	0	0	-0,71	0,71	0
0	0	0	0	0	1

Zgodnie z prawem transformacji #.5

$[K_{e2}]$

265419287,12	250627241,79	-11094033,99	-265419287,12	-250627241,79	-11094033,99
250627241,79	265419287,12	11094033,99	-250627241,79	-265419287,12	11094033,99
-11094033,99	11094033,99	22188067,98	11094033,99	-11094033,99	11094033,99
-265419287,12	-250627241,79	11094033,99	265419287,12	250627241,79	11094033,99
-250627241,79	-265419287,12	-11094033,99	250627241,79	265419287,12	-11094033,99
-11094033,99	11094033,99	11094033,99	11094033,99	-11094033,99	22188067,98

c) pręt 3

$[\tilde{K}_{e3}]$

437880000	0	0	-437880000	0	0
0	9037056	11296320	0	-9037056	11296320
0	11296320	18827200	0	-11296320	9413600
-437880000	0	0	437880000	0	0
0	-9037056	-11296320	0	9037056	-11296320
0	11296320	9413600	0	-11296320	18827200

$\alpha = 90^o$

[T]

0	1	0	0	0	0
-1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	-1	0	0
0	0	0	0	0	1

Zgodnie z prawem transformacji:

$[K_{e3}]$

9037056	0	-11296320	-9037056	0	-11296320
0	437880000	0	0	-437880000	0
-11296320	0	18827200	11296320	0	9413600
-9037056	0	11296320	9037056	0	11296320
0	-437880000	0	0	437880000	0
-11296320	0	9413600	11296320	0	18827200

d) pręt 4

$$[\tilde{K}_{e4}]$$

437880000	0	0	-437880000	0	0
0	2259264	5648160	0	-2259264	0
0	5648160	14120400	0	-5648160	0
-437880000	0	0	437880000	0	0
0	-2259264	-5648160	0	2259264	0
0	0	0	0	0	0

$\alpha = 90^o$ [T]

0	1	0	0	0	0
-1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	-1	0	0
0	0	0	0	0	1

Zgodnie z prawem transformacji:

$$[K_{e4}]$$

2259264	0	-5648160	-2259264	0	0
0	437880000	0	0	-437880000	0
-5648160	0	14120400	5648160	0	0
-2259264	0	5648160	2259264	0	0
0	-437880000	0	0	437880000	0
0	0	0	0	0	0

W celu określenia wartości wyrazów macierzy geometrycznych należy w pierwszej kolejności określić wartości sił normalnych dla poszczególnych prętów od zadanego obciążenia. Z danych:

$$N_1 = N_2 \;\; = \;\; -8183 \; N$$

$$N_3 = N_4 \;\; = \;\; -106100 \; N$$

Macierze geometryczne poszczególnych prętów w układach lokalnych i globalnych mają postać:
a) pręt 1

$$[\tilde{K}_{Ge1}]$$

0	0	0	0	0	0
0	-4629	-818,3	0	4629	-818,3
0	-818,3	-2314,5	0	818,3	578,63
0	0	0	0	0	0
0	4629	818,3	0	-4629	818,3
0	-818,3	578,63	0	818,3	-2314,5

$\alpha = 45^o$ [T]

0,71	0,71	0	0	0	0
-0,71	0,71	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0,71	0,71	0
0	0	0	-0,71	0,71	0
0	0	0	0	0	1

Z prawa transformacji #.5 otrzymam:

$$[K_{Ge1}]$$

-2314,5	2314,5	578,63	2314,5	-2314,5	578,63
2314,5	-2314,5	-578,63	-2314,5	2314,5	-578,63
578,63	-578,63	-2314,5	-578,63	578,63	578,63
2314,5	-2314,5	-578,63	-2314,5	2314,5	-578,63
-2314,5	2314,5	578,63	2314,5	-2314,5	578,63
578,63	-578,63	578,63	-578,63	578,63	-2314,5

b) pręt 2

$[\tilde{K}_{Ge2}]$

0	0	0	0	0	0
0	-4629	-818,3	0	4629	-818,3
0	-818,3	-2314,5	0	818,3	578,63
0	0	0	0	0	0
0	4629	818,3	0	-4629	818,3
0	-818,3	578,63	0	818,3	-2314,5

$\alpha = 45^o$ [T]

0,71	0,71	0	0	0	0
-0,71	0,71	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0,71	0,71	0
0	0	0	-0,71	0,71	0
0	0	0	0	0	1

Z prawa transformacji #.5 otrzymam:

$[K_{Ge2}]$

-2314,5	2314,5	578,63	2314,5	-2314,5	578,63
2314,5	-2314,5	-578,63	-2314,5	2314,5	-578,63
578,63	-578,63	-2314,5	-578,63	578,63	578,63
2314,5	-2314,5	-578,63	-2314,5	2314,5	-578,63
-2314,5	2314,5	578,63	2314,5	-2314,5	578,63
578,63	-578,63	578,63	-578,63	578,63	-2314,5

c) pręt 3

$[\tilde{K}_{Ge3}]$

0	0	0	0	0	0
0	-50928	-10610	0	50928	-10610
0	-10610	-35366,67	0	10610	8841,67
0	0	0	0	0	0
0	50928	10610	0	-50928	10610
0	-10610	8841,67	0	10610	-35366,67

$\alpha = 90^o$ [T]

0	1	0	0	0	0
-1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	-1	0	0
0	0	0	0	0	1

Z prawa transformacji #.5 otrzymam:

$[K_{Ge3}]$

-50928	0	10610	50928	0	10610
0	0	0	0	0	0
10610	0	-35366,67	-10610	0	8841,67
50928	0	-10610	-50928	0	-10610
0	0	0	0	0	0
10610	0	8841,67	-10610	0	-35366,67

d) pręt 4

$[\tilde{K}_{Ge4}]$

0	0	0	0	0	0
0	-50928	-21220	0	50928	0
0	-21220	-53050	0	21220	0
0	0	0	0	0	0
0	50928	21220	0	-50928	0
0	0	0	0	0	0

$\alpha = 90^o$

[T]

0	1	0	0	0	0
-1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	-1	0	0
0	0	0	0	0	1

Z prawa transformacji #.5 otrzymam:

$[K_{Ge4}]$

-50928	0	21220	50928	0	0
0	0	0	0	0	0
21220	0	-53050	-21220	0	0
50928	0	-21220	-50928	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Tabela powiązań dla zadanego układu ma postać:

pręt	*Nr przemieszczenia w układzie lokalnym*					
	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	4	5	6	7	8	9
3	7	8	9	10	11	12
4	10	11	12	13	14	15

Po wykonaniu agregacji otrzymam globalną macierz sztywności w postaci:

$[K]$

265419287,12	250627241,79	-11094033,99	-265419287,12	-250627241,79	-11094033,99	0	0	0	0	0	0	0	0	0
250627241,79	265419287,12	11094033,99	-250627241,79	-265419287,12	11094033,99	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-11094033,99	11094033,99	22188067,98	11094033,99	-11094033,99	11094033,99	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-265419287,12	-250627241,79	11094033,99	530838574,23	501254483,59	0	-265419287,12	-250627241,79	-11094033,99	0	0	0	0	0	0
-250627241,79	-265419287,12	-11094033,99	501254483,59	530838574,23	0	-250627241,79	-265419287,12	11094033,99	0	0	0	0	0	0
-11094033,99	11094033,99	11094033,99	0	0	44376135,97	11094033,99	-11094033,99	11094033,99	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-265419287,12	-250627241,79	11094033,99	274456343,12	250627241,79	-202286,01	-9037056	0	-11296320	0	0	0
0	0	0	-250627241,79	-265419287,12	-11094033,99	250627241,79	703299287,12	-11094033,99	0	-437880000	0	0	0	0
0	0	0	-11094033,99	11094033,99	11094033,99	-202286,01	-11094033,99	41015267,98	11296320	0	9413600	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-9037056	0	11296320	11296320	0	5648160	-2259264	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-437880000	0	0	875760000	0	0	-437880000	0
0	0	0	0	0	0	-11296320	0	9413600	5648160	0	32947600	5648160	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2259264	0	5648160	2259264	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-437880000	0	0	437880000	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

oraz globalną macierz geometryczną w postaci:

$[K_G]$

-2314,5	2314,5	578,63	2314,5	-2314,5	578,63	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2314,5	-2314,5	-578,63	-2314,5	2314,5	-578,63	0	0	0	0	0	0	0	0	0
578,63	-578,63	-2314,5	-578,63	578,63	578,63	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2314,5	-2314,5	-578,63	-4629	4629	0	2314,5	-2314,5	578,63	0	0	0	0	0	0
-2314,5	2314,5	578,63	4629	-4629	0	-2314,5	2314,5	-578,63	0	0	0	0	0	0
578,63	-578,63	578,63	0	0	-4629	-578,63	578,63	578,63	0	0	0	0	0	0
0	0	0	2314,5	-2314,5	-578,63	-53242,5	2314,5	10031,37	50928	0	10610	0	0	0
0	0	0	-2314,5	2314,5	578,63	2314,5	-2314,5	578,63	0	0	0	0	0	0
0	0	0	578,63	-578,63	578,63	10031,37	578,63	-37681,17	-10610	0	8841,67	0	0	0
0	0	0	0	0	0	50928	0	-10610	-101856	0	10610	50928	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	10610	0	8841,67	10610	0	-88416,67	-21220	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	50928	0	-21220	-50928	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Następnie w macierzach [K] i [K_G] należy uwzględnić warunki brzegowe:

$q_1 = q_2 = q_3 = q_{13} = q_{14}$ (zerowe przemieszczenia w miejscach podpór)

$q_{15} = 0$ (redukcja statyczna)

W wyniku otrzymamy macierz sztywności i macierz geometryczną jak niżej:

[K]

530838574,23	501254483,59	0	-265419287,12	-250627241,79	-11094033,99	0	0	0
501254483,59	530838574,23	0	-250627241,79	-265419287,12	11094033,99	0	0	0
0	0	44376135,97	11094033,99	-11094033,99	11094033,99	0	0	0
-265419287,12	-250627241,79	11094033,99	274456343,12	250627241,79	-202286,01	-9037056	0	-11296320
-250627241,79	-265419287,12	-11094033,99	250627241,79	703299287,12	-11094033,99	0	-437880000	0
-11094033,99	11094033,99	11094033,99	-202286,01	-11094033,99	41015267,98	11296320	0	9413600
0	0	0	-9037056	0	11296320	11296320	0	5648160
0	0	0	0	-437880000	0	0	875760000	0
0	0	0	-11296320	0	9413600	5648160	0	32947600

[K_G]

-4629	4629	0	2314,5	-2314,5	578,63	0	0	0
4629	-4629	0	-2314,5	2314,5	-578,63	0	0	0
0	0	-4629	-578,63	578,63	578,63	0	0	0
2314,5	-2314,5	-578,63	-53242,5	2314,5	10031,37	50928	0	10610
-2314,5	2314,5	578,63	2314,5	-2314,5	578,63	0	0	0
578,63	-578,63	578,63	10031,37	578,63	-37681,17	-10610	0	8841,67
0	0	0	50928	0	-10610	-101856	0	10610
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	10610	0	8841,67	10610	0	-88416,67

Powyższe postaci [K] i [K_G] należy uwzględnić w równaniu #.2. Rozwiązaniem tego równania będą wartości wartości własne oraz odpowiadające im wektory własne. Obliczenia wykonano wykorzystując program UPW.

Otrzymano następujące wyniki:

Wartości własne:

Nr przemieszczenia	$\bar{\lambda}$	λ
1	0,00E+000	
2	8,08E-015 ≈ 0	
3	-2,80E-006	356940,17
4	-1,01E-004	9946,19
5	-2,73E-004	3666,76
6	-3,05E-004	3275,48
7	-1,11E-003	902,32
8	-3,47E-003	287,84
9	-1,48E-002	67,41

W zadaniu, jako że poszukujemy najmniejszego obciążenia krytycznego, interesować nas będzie najmniejsza wartość własna :

$$\lambda_{kr} = 67,41$$

Zastanówmy się teraz nad otrzymanymi wynikami. Dla podziału 1-1r otrzymaliśmy $\lambda_{kr} = 160,1$. Dla podziału 2-2r natomiast $\lambda_{kr} = 67,41$. Zagęszczając dalej podziały prętów oraz rezygnując ze stosowania redukcji statycznej, która w przypadku zadania stateczności nie prowadzi do poprawnego wyniku, otrzymalibyśmy kolejno coraz to mniejsze wartości współczynnika λ_{kr} . Wartości te byłyby oczywiście bliższe rozwiązaniu dokładnemu. Przyczyną różnic w wynikach jest „sztuczne" przesztywnienie układu w przypadku przyjęcia zbyt małej liczby elementów. Otrzymanie zbyt dużej wartości λ_{kr} (tak jak dla przypadku 1-1 r) jest groźne z inżynierskiego punktu widzenia, gdyż może prowadzić do błędnej oceny nośności konstrukcji (możliwości przenoszenia przez konstrukcję znacznie większych obciążeń niż w rzeczywistości). W przypadku tego zadania w miarę poprawne wyniki otrzymalibyśmy już przy podziale 3-3.

Na koniec porównajmy jeszcze otrzymane wyniki z rozwiązania zadania w wersji komputerowej z rozwiązaniem otrzymanym przy zastosowaniu klasycznej metody przemieszczeń (ze wzorami transformacyjnymi uwzględniającymi działanie sił osiowych). Wynik otrzymany tą metodą to $\lambda_{kr}=66{,}738$, co jak widać jest bliskie rozwiązaniu przy podziale 2-2r, a jeszcze bliższe wynikom dla gęstszych podziałów w metodzie komputerowej. Warto podkreślić, że rozwiązanie metodą klasyczna uwzględnia dokładne funkcje kształtu dla elementów, nie uwzględnia natomiast skracalności prętów.