

Roman LEWANDOWSKI *)
Anita KACZOR **)
Bożena OKUPNIAK **)

DRGANIA STOCHASTYCZNE RAM PŁASKICH Z ZAINSTALOWANYMI TŁUMIKAMI DRGAŃ

1. Wstęp

Parcie wiatru jest zasadniczym obciążeniem budynków wysokich. Ma ono charakter obciążenia dynamicznego i powinno być traktowane jako przestrzenno-czasowy proces losowy. Oznacza to, że odpowiedź dynamiczna konstrukcji ma również charakter procesu losowego. Amplitudy drgań budynków wysokich mogą być znaczne i wobec tego może zachodzić potrzeba dodatkowego usztywnienia konstrukcji lub zastosowania innych sposobów w celu zmniejszenia przemieszczeń dynamicznych. Jeden z tych sposobów polega na instalowaniu w budynku czynnych lub biernych tłumików drgań.

W analizie drgań stochastycznych często stosuje się podejście modalne. Jest ono bardzo korzystne ponieważ pozwala na znaczną redukcję stopni dynamicznej swobody przy zachowaniu wymaganej dokładności obliczeń. Zalety tego podejścia są w pełni wykorzystane jeżeli równania ruchu we współrzędnych głównych są rozseparowane. Jest to możliwe tylko wtedy gdy macierz tłumienia \mathbf{C} jest proporcjonalna do macierzy mas \mathbf{M} i macierzy sztywności konstrukcji \mathbf{K} tzn.

$$\mathbf{C} = \mu\mathbf{M} + \kappa\mathbf{K} , \quad (1)$$

gdzie symbolami μ oraz κ oznaczono współczynniki proporcjonalności.

Wspomniana powyżej struktura macierzy \mathbf{C} nie może być z reguły zachowana jeżeli na budowli zainstalowano tłumiki drgań. Często są to dynamiczne, masowe tłumiki drgań lub też dodatkowe bezmasowe elementy tłumiące. Należy również zauważyć, że próby dokładniejszego opisu sił tłumienia często prowadzą do macierzy tłumienia nie spełniającej warunku (1).

W niniejszej pracy omawia się komputerową metodę analizy dynamicznej ram płaskich poddanych działaniu wiatru. Zakłada się, że macierz tłumienia nie spełnia warunku (1). Działanie wiatru w czasie jest traktowane jako stacjonarny proces stochastyczny. Postuluje się pełną korelację przestrzenną obciążenia wiatrem.

(*) Dr hab. inż. - Politechnika Poznańska

(**) Mgr inż. - Politechnika Poznańska

Podano sformułowanie ogólne oraz wyniki przykładowych obliczeń. Wykazano, że podejście modalne prowadzi do znacznych błędów jeżeli pomija się wzajemne sprzężenia w równaniach ruchu wynikające z nieproporcjonalnego tłumienia. Zaproponowana metoda bezpośrednia analizy drgań stochastycznych nie wymaga żadnych założeń odnośnie postaci macierzy tłumienia.

2. Równania ruchu

Równanie ruchu konstrukcji ramowej traktowanej jako układ dyskretny daje się zapisać w postaci:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{P}(t) , \quad (2)$$

gdzie symbole $\mathbf{q}(t)$ oraz $\mathbf{P}(t)$ oznaczają odpowiednio wektor przemieszczeń i obciążeń węzłowych.

Wektor obciążeń węzłowych określa się na podstawie parcia wiatru $p(x, z, t)$. Parcie to wyznacza się ze wzoru:

$$p(x, z, t) = 0,5\rho C_z V^2(x, z, t) , \quad (3)$$

gdzie symbole ρ , C_z oraz $V(x, z, t)$ oznaczają odpowiednio gęstość powietrza, współczynnik opływu oraz chwilową prędkość wiatru. Prędkość wiatru jest sumą prędkości średniej $\bar{V}(x, z)$ oraz losowych fluktuacji prędkości $V_L(x, z, t)$. Losowe fluktuacje prędkości wiatru są małe w porównaniu z prędkościami średnimi i wobec tego statyczne parcie średnie $\bar{p}(x, z)$ oraz losowe, dynamiczne parcie wiatru $p_L(x, z, t)$ można przedstawić w postaci:

$$\bar{p}(x, z) = 0,5\rho C_z \bar{V}^2(x, z) , \quad p_L(x, z, t) = \rho C_z \bar{V}(x, z) V_L(x, z, t) . \quad (4)$$

Na tej podstawie, w zwykły sposób otrzymuje się wektory obciążeń węzłowych $\bar{\mathbf{P}}$ i $\mathbf{P}_L V_L(t)$ wynikające odpowiednio ze statycznego i dynamicznego parcia wiatru.

Wektor przemieszczeń węzłowych $\mathbf{q}(t)$ można również podzielić na część statyczną $\bar{\mathbf{q}}$ oraz część dynamiczną $\tilde{\mathbf{q}}(t)$. Ponieważ część dynamiczna przemieszczeń ma charakter losowy więc oszacowanie całkowitych przemieszczeń konstrukcji może być zapisane w postaci:

$$\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}} \pm \sigma \tilde{\mathbf{q}} , \quad (5)$$

gdzie symbolami σ oraz $\tilde{\mathbf{q}}$ oznaczono odpowiednio współczynnik krotności odchylenia standardowego oraz wektor odchyżeń standardowych od wartości oczekiwanej $\bar{\mathbf{q}}$.

Część statyczną wektora przemieszczeń (wartość oczekiwaną procesu) wyznacza się rozwiązując równanie równowagi statycznej o postaci:

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{P}} . \quad (6)$$

Przemieszczenia dynamiczne konstrukcji otrzymamy rozwiązując następujące równanie ruchu:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_L(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_L(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}_L(t) = \mathbf{P}_L V_L(t) . \quad (7)$$

3. Rozwiązanie problemu dynamicznego

Występujące w równaniu ruchu (7) siły wymuszające są siłami zmieniającymi się w czasie w sposób losowy. Opis losowego wymuszenia wymaga podania funkcji gęstości widmowej. W niniejszej pracy korzysta się z funkcji gęstości widmowej podanej przez Davenporta. Ma ona postać:

$$S_{pp}(p) = \frac{2KL^2}{\pi^2} \frac{|p|}{\left[1 + \left(\frac{pL}{\pi\bar{V}}\right)^2\right]^{\frac{4}{3}}}, \quad (8)$$

gdzie K oznacza współczynnik zależny od ukształtowania terenu, p - częstość kołową wymuszenia \bar{V} - średnią prędkością wiatru na wysokości 10 m, a L oznacza skalę długości (przyjęto $L = 600$ m).

Rozwiązanie problemu sprowadza się do wyznaczenia wektora odchylenia standardowego $\tilde{\mathbf{q}}$.

Założmy, że znamy dwa wektorowe procesy stochastyczne $\mathbf{q}_L(t_1)$ i $\mathbf{q}_L(t_2)$. Funkcję korelacji tych procesów definiuje się w sposób następujący:

$$\mathbf{K}_{qq}(t_1, t_2) = E\left[\mathbf{q}_L(t_1)\mathbf{q}_L^T(t_2)\right], \quad (9)$$

gdzie symbol $E[\bullet]$ oznacza wartość oczekiwaną wielkości podanych w nawiasie.

Stan dynamiczny układu można określić za pomocą macierzowej funkcji przejścia $\mathbf{H}(t)$ w sposób następujący:

$$\mathbf{q}_L(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{H}(t-\tau)\mathbf{P}_L V_L(t)d\tau. \quad (10)$$

Macierzową funkcję przejścia należy rozumieć jako reakcję układu w chwili t na impulsy jednostkowe przyłożone w chwili τ . Dokładniej, element tej macierz o indeksach k, l opisuje ustaloną reakcję (w chwili t) przemieszczenia uogólnionego k na jednostkowy impuls przyłożony po kierunku przemieszczenia uogólnionego l (w chwili τ) podczas gdy pozostałe składowe wektora wymuszenia są równe zeru.

Podstawiając (10) do (9) otrzymuje się:

$$\mathbf{K}_{qq}(t_1, t_2) = E\left[\int_{-\infty}^{t_1} \mathbf{H}(t_1-\tau_1)\mathbf{P}_L V_L(t_1)d\tau_1 \int_{-\infty}^{t_2} V_L(t_2)\mathbf{P}_L^T \mathbf{H}^T(t_2-\tau_2)d\tau_2\right]. \quad (11)$$

Ponieważ wymuszenie ma charakter losowy więc funkcja korelacji obciążenia może być przedstawiona w postaci:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{pp}(\tau_1, \tau_2) &= E\left[\mathbf{P}_L V_L(\tau_1)V_L(\tau_2)\mathbf{P}_L^T\right] =, \\ \mathbf{P}_L E[V_L(\tau_1)V_L(\tau_2)]\mathbf{P}_L^T &= \mathbf{P}_L K_{pp}(\tau_1, \tau_2)\mathbf{P}_L^T, \end{aligned} \quad (12)$$

gdzie $K_{pp}(\tau_1, \tau_2)$ jest funkcją korelacji obciążenia względem czasu.

Umożliwia to zapisanie równania (11) w sposób następujący:

$$\mathbf{K}_{qq}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} \mathbf{H}(t_1-\tau_1)\mathbf{P}_L K_{pp}(\tau_1, \tau_2)\mathbf{P}_L^T \mathbf{H}^T(t_2-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2. \quad (13)$$

Jeżeli obciążenie zewnętrzne zaczęło działać w chwili $t_0 = 0$, a dla $t < 0$ układ był w spoczynku to dolna granica całek w (13) jest równa 0. Zakładając stacjonarność wymuszenia można dokonać następującej zamiany zmiennych:

$$t_1 - \tau_1 = \tau'_1, \quad t_2 - \tau_2 = \tau'_2, \quad t_2 - t_1 = \tau, \quad (14)$$

a następnie przepisać związek (13) w postaci:

$$\mathbf{K}_{qq}(\tau) = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} \mathbf{H}(\tau_1) \mathbf{P}_L K_{pp}(\tau - \tau_2 + \tau_1) \mathbf{P}_L^T \mathbf{H}^T(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 . \quad (15)$$

W dalszym ciągu pomijając się będzie kreski przy τ_1 i τ_2 .

Jeżeli odwrotna transformata Fouriera \mathbf{K}_{qq} oraz K_{pp} będzie zdefiniowana w sposób następujący:

$$\mathbf{K}_{qq}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}_{qq}(p) e^{ip\tau} dp , \quad K_{pp}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{pp}(p) e^{ip\tau} dp , \quad (16)$$

to zależność (13) da się zapisać w postaci:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}_{qq}(p) e^{ip\tau} dp = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} \mathbf{H}(\tau_1) \mathbf{P}_L S_{pp}(p) e^{ip(\tau - \tau_2 + \tau_1)} \mathbf{P}_L^T \mathbf{H}^T(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 dp , \quad (17)$$

przy czym symbolem i oznaczono jednostkę urojoną ($i^2 = -1$).

Niech macierzowa funkcja przenoszenia \mathbf{F} rozumiana jako odwrotna transformata Fouriera impulsowej macierzowej funkcji przejścia \mathbf{H} będzie zdefiniowana w sposób następujący:

$$\mathbf{F}(ip) = \int_0^{\infty} \mathbf{H}(\tau) e^{-ip\tau} d\tau , \quad (18)$$

przy czym zakłada się dodatkowo, że impuls nie wystąpił dla $\tau < 0$. Funkcja ta wyraża stosunek ustalonego rozwiązania równania ruchu przy wymuszeniu harmonicznym do wartości tego wymuszenia. Dokładniej element tej macierzy o indeksach k, l jest rozumiany jako amplitudę rozwiązania ustalonego opisujące przemieszczenie q_k wywołanego siłą wymuszającą $P_l = e^{ip\tau}$ działającą po kierunku przemieszczenia q_l . Macierz ta może być wobec tego zapisana w sposób następujący:

$$\mathbf{F}(ip) = \left(-p^2 \mathbf{M} + ip\mathbf{C} + \mathbf{K} \right)^{-1} . \quad (19)$$

Równanie (17) może być teraz przepisane w postaci:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}_{qq}(p) e^{ip\tau} dp = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{F}}(ip) \mathbf{P}_L S_{pp}(p) \mathbf{P}_L^T \mathbf{F}^T(ip) e^{ip\tau} dp , \quad (20)$$

gdzie $\tilde{\mathbf{F}}(ip) = \mathbf{F}(-ip)$. Ponieważ równanie (20) ma być spełnione dla dowolnego τ więc

$$\mathbf{S}_{qq}(p) = \tilde{\mathbf{F}}(ip) \mathbf{P}_L S_{pp}(p) \mathbf{P}_L^T \mathbf{F}^T(ip) . \quad (21)$$

Podstawiając (21) do równania (16.1) oraz biorąc pod uwagę, że funkcja podcałkowa jest parzysta możemy napisać:

$$\mathbf{K}_{qq}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} \tilde{\mathbf{F}}(ip) \mathbf{P}_L S_{pp}(p) \mathbf{P}_L^T \mathbf{F}^T(ip) e^{-ip\tau} dp . \quad (22)$$

Obliczając macierz korelacji należy przyjąć $t_1 = t_2 = t$ oraz $\tau = 0$ i wobec tego:

$$\mathbf{K}_{qq}(0) = 2 \int_0^{\infty} \tilde{\mathbf{F}}(ip) \mathbf{P}_L S_{pp}(p) \mathbf{P}_L^T \mathbf{F}^T(ip) dp . \quad (23)$$

Element \tilde{q}_i wektora średniego odchylenia standardowego wektora $\tilde{\mathbf{q}}$ jest równy:

$$\tilde{q}_i = \sqrt{K_{ii}} . \quad (24)$$

Jak już wspomniano powyżej, do rozwiązania omawianego problemu często stosuje się podejście modalne. Równanie ruchu (7) jest wtedy przekształcane do postaci modalnej

$$\ddot{r}_i + 2\gamma_i \omega_i \dot{r}_i + \omega_i^2 r_i = R_i V_L(t) , \quad i=1,2,\dots \quad (25)$$

za pomocą transformacji własnej

$$\mathbf{q}_L = \mathbf{V} \mathbf{r} . \quad (26)$$

W powyższych równaniach \mathbf{V} oznacza macierz wektorów własnych, \mathbf{r} wektor współrzędnych głównych a symbolami ω_i , γ_i oraz R_i oznaczono odpowiednio częstość drgań własnych, bezwymiarowy współczynnik tłumienia oraz wymuszenie modalne. Postępując podobnie jak to opisano w pracy [1] można zapisać wzór na korelację wzajemną współrzędnych głównych r_i oraz r_j zapisać w postaci:

$$k_{ij} = \int_0^{\infty} \frac{2R_i R_j S_{pp}(p) [(\omega_i^2 - p^2)(\omega_j^2 - p^2) + 4\gamma_i \gamma_j \omega_i \omega_j p^2]}{[(\omega_i^2 - p^2)^2 + (2\gamma_i \omega_i p)^2][(\omega_j^2 - p^2)^2 + (2\gamma_j \omega_j p)^2]} dp . \quad (27)$$

Wielkość k_{ij} jest elementem macierzy korelacji \mathbf{K}_{rr} współrzędnych głównych. Kwadrat odchylenia standardowego współrzędnej fizycznej q_j oblicza się ze wzoru

$$\tilde{q}_j^2 = \mathbf{v}_j^T \mathbf{K}_{rr} \mathbf{v}_j , \quad (28)$$

gdzie symbolem \mathbf{v}_j oznaczono wektor kolumnowy utworzony z wiersza o numerze j macierzy \mathbf{V} .

4. Wyniki przykładowych obliczeń numerycznych

Do opisu zachowania dynamicznego budynku zastosowano często stosowany model ramy ścinanej [2]. W modelu tym zakłada się, że masa konstrukcji jest skoncentrowana na poziomie stropów oraz, że stropy są elementami nieodkształcalnymi w płaszczyźnie poziomej. Wektor przemieszczeń węzłowych konstrukcji składa się z przemieszczeń poziomych poszczególnych kondygnacji, a macierze mas, sztywności i tłumienia są macierzami trójdziagonalnymi. Analizuje się drgania budynku bez zainstalowanych tłumików drgań i z zainstalowanym tłumikiem drgań. Przyjęto, że masowy tłumik drgań został zamontowany na ostatniej kondygnacji budynku. Składa się on z dodatkowej masy połączonej z konstrukcją budynku za pomocą więzi o sztywności k i współczynnika tłumienia c . Zbliżone do optymalnych parametry masowego tłumika drgań zostały określone za pomocą procedury opisanej w pracy [3]. Wykonano przykładowe obliczenia dla ramy jednoprzęsłowej budynku o 16 kondygnacjach. Przyjęto następujące podstawowe dane do obliczeń:

- wysokość kondygnacji 3 m,
- masa stropu 35000,0 kg,

- sztywność słupa na zginanie $EJ = 43200,0 \text{ kNm}^2$
- bezwymiarowy współczynnik tłumienia 1 i 2 postaci drgań 0,02.
Wartości sił statycznych i amplitud sił dynamicznych przyłożonych na poziomie stropu każdej kondygnacji podano w tabeli 1. Obliczono je zakładając, że budynek znajduje się na terenie podmiejskim, a współczynnik opływu przyjęto równy $C_z = 0,7$.

Tablica 1 Obciążenia statyczne i dynamiczne ramy

Nr stropu	1	2	3	4	5	6	7	8
Siła statyczna [kN]	3,74	5,51	6,91	8,12	9,20	10,19	11,11	11,97
Siła dynamiczna [kN]	0,349	0,424	0,474	0,514	0,548	0,576	0,602	0,624
Nr stropu	9	10	11	12	13	14	15	16
Siła statyczna [kN]	12,79	13,56	14,31	15,02	15,71	16,38	17,02	8,82
Siła dynamiczna [kN]	0,645	0,665	0,683	0,700	0,715	0,730	0,745	0,379

Pierwsze cztery częstotliwości drgań własnych ramy są równe:

$$\omega_1 = 3,1521 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_2 = 9,4278 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_3 = 15,618 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_4 = 21,667 \text{ s}^{-1}.$$

W tabeli 2 zestawiono statyczne przemieszczenia poziome stropów (wartości oczekiwane procesu stochastycznego) oraz odchylenia standardowe wspomnianych przemieszczeń. Wyniki obliczeń uzyskane za pomocą podejścia modalnego i bezpośredniego są identyczne ponieważ przyjęta macierz tłumienia konstrukcji spełnia warunek (1).

Tablica 2 Przemieszczenia statyczne i odchylenia standardowe ramy bez tłumika drgań

Nr stropu	1	2	3	4	5	6	7	8
Przemieszczenie statyczne [cm]	0,470	0,930	1,375	1,803	2,209	2,592	2,948	0,327
Odchylenie standardowe [cm]	0,422	0,838	1,243	1,634	2,009	2,363	2,694	3,000
Nr stropu	9	10	11	12	13	14	15	16
Przemieszczenie statyczne [cm]	3,570	3,833	4,060	4,250	4,401	4,511	4,578	4,601
Odchylenie standardowe [cm]	3,279	3,528	3,744	3,927	4,075	4,186	4,260	4,295

Ponadto wykonano obliczenia tej samej ramy z zainstalowanym na stropie najwyższej kondygnacji tłumikiem drgań. Parametry tłumika są następujące:

- masa tłumika $m=2024,0 \text{ kg}$,
- sztywność tłumika $k=1987 \text{ N/m}$,
- współczynnik tłumienia $c=698,0 \text{ Ns/m}$.

Macierz tłumienia ramy z tłumikiem nie spełnia warunku (1). Pierwsze cztery częstotliwości drgań własnych ramy z tłumikiem są równe:

$$\omega_1 = 3,0129 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_2 = 3,2756 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_3 = 9,4318 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_4 = 15,62 \text{ s}^{-1}.$$

W tablicy 3 podano odchylenia standardowe przemieszczeń poziomych węzłów ramy z tłumikiem obliczone za pomocą obu omawianych metod. Wykonując obliczenia we współrzędnych głównych zaniedbano sprzężenia w równaniach modalnych wynikające z niespełnienia przez macierz tłumienia warunku (1). Widać, że odchylenia standardowe wyznaczo-

ne za pomocą metody modalnej są znacznie mniejsze od odchyień standardowych otrzymanych z obliczeń metodą bezpośrednią. Projektując tłumik drgań założono, że w wyniku zainstalowania tłumika maksymalne odchylenie standardowe zmniejszy się o 40%. Rezultaty obliczeń pokazują, że maksymalne odchylenie standardowe zmniejszyło się jednak tylko o 20%. Wskazuje to na potrzebę doskonalenia procedur projektowania tłumików drgań dla budowli poddanych działaniu obciążeń losowych

Tablica 3 Odchylenia standardowe przemieszczeń ramy z tłumikiem drgań

Nr stropu	1	2	3	4	5	6	7	8
Odchylenie standardowe - podejście modalne [cm]	0,147	0,292	0,432	0,568	0,697	0,819	0,933	1,038
Odchylenie standardowe - podejście bezpośrednie [cm]	0,343	0,679	1,006	1,320	1,620	1,902	2,166	2,409
Nr stropu	9	10	11	12	13	14	15	16
Odchylenie standardowe - podejście modalne [cm]	1,134	1,219	1,293	1,356	1,407	1,445	1,470	1,482
Odchylenie standardowe - podejście bezpośrednie [cm]	2,630	2,826	2,997	3,142	3,258	3,346	3,403	3,430

5. Zakończenie

Dynamiczne zachowanie ram z zainstalowanymi tłumikami drgań opisywane jest równaniami ruchu w których występują nieproporcjonalne siły tłumienia a macierz tłumienia nie spełnia warunku (1). Analiza dynamiczna tych układów we współrzędnych głównych z równoczesnym pominięciem sprzężeń między poszczególnymi współrzędnymi prowadzi do błędnych rezultatów. Przedstawiona w pracy metoda bezpośrednia rozwiązania pozwala na uwzględnienie tłumienia nieproporcjonalnego.

Literatura

- [1] Bołotin W.W.: Metody statystyczne w mechanice budowli, Arkady, Warszawa, 1968
- [2] Paz M.: Structural dynamics: theory and computation, Van Nostrand Reihold Company, New York, 1985
- [3] Klasztorny M.: Reduction of steady-state forced vibrations of structures with dynamic absorbers, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 24, 1995, pp.1155-1172

Praca została wykonana w ramach programu badań naukowych finansowanych przez Komitet Badań Naukowych (DS.....).

STOCHASTIC VIBRATION OF PLANAR FRAMES

WITH TUNED MASS DAMPER

Summary

In this paper, the analysis of stochastic, wind induced vibration of planar frames with and without tuned mass damper are presented. The direct and modal methods of analysis of considered systems are discussed and compared. It was found that for frames with mass damper the modal equations are coupled by damping terms which cannot be neglected. The direct method is more appropriate in this case because the modal transformation is not used.